

**ТЕМА ЛЕКЦИИ:  
«ОПРЕДЕЛИТЕЛИ  
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ»**

# ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ
2. МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ
3. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ
4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

# ОБОЗНАЧЕНИЯ

КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА  $n$ -ГО ПОРЯДКА

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МАТРИЦЫ

$$\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & \boxtimes & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ 1-го и 2-го ПОРЯДКОВ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1-го ПОРЯДКА

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 2-го ПОРЯДКА

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

# МНЕМОНИЧЕСКОЕ ПРАВИЛО

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ  
2-го ПОРЯДКА РАВЕН  
ПРОИЗВЕДЕНИЮ ЭЛЕМЕНТОВ  
ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛИ  
МИНУС  
ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ  
ПОБОЧНОЙ ДИАГОНАЛИ

# МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

# МИНОР ЭЛЕМЕНТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

МИНОРОМ ЭЛЕМЕНТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ  
НАЗЫВАЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ,  
ПОЛУЧЕННЫЙ ИЗ ИСХОДНОГО  
ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ **ПРИ ПОМОЩИ**  
**ВЫЧЕРКИВАНИЯ СТРОКИ И**  
**СТОЛБЦА**, В КОТОРЫХ  
СТОИТ ЭТОТ ЭЛЕМЕНТ



# ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ МИНОРА

МИНОР  $M_{21}$  ЭЛЕМЕНТА  $a_{21}$  ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ТАК:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} - & -1 & 2 \\ - & - & - \\ - & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 18 = -19$$

# АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ДОПОЛНЕНИЕМ  $A_{ij}$   
ЭЛЕМЕНТА  $a_{ij}$  ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ  
НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

ГДЕ  $M_{ij}$  – МИНОР ЭЛЕМЕНТА  $a_{ij}$

# СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

**РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ЛЮБОЙ  
СТРОКЕ (ЛЮБОМУ СТОЛБЦУ)**

**ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ  
РАВЕН СУММЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ  
ЭЛЕМЕНТОВ ЛЮБОЙ СТРОКИ  
(ЛЮБОГО СТОЛБЦА) НА ИХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ**

# ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

РАЗЛОЖИМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПО 2-й СТРОКЕ

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} - & -1 & 2 \\ - & - & - \\ - & 9 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & - & 2 \\ - & - & - \\ 7 & - & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (-1) \cdot (-1 - 18) + 1 \cdot (3 - 14) = 19 - 11 = 8$$

# МЕТОД ТРЕУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИ- ТЕЛЕЙ МАТРИЦ 3-го ПОРЯДКА

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & - & - \\ - & a_{22} & - \\ - & - & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - & a_{12} & - \\ - & - & a_{23} \\ a_{31} & - & - \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - & - & a_{13} \\ a_{21} & - & - \\ - & a_{32} & - \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} - & - & a_{13} \\ - & a_{22} & - \\ a_{31} & - & - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} - & a_{12} & - \\ a_{21} & - & - \\ - & - & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & - & - \\ - & - & a_{23} \\ - & a_{32} & - \end{pmatrix}$$

# ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \cdot (-3) + 5 \cdot (-2) \cdot 4 - \\ &- 4 \cdot 1 \cdot (-3) - 5 \cdot 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-3) \cdot 2 = \\ &= 2 + 27 - 40 + 12 - 15 - 12 = -26 \end{aligned}$$

**ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ  
ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ  
РАВЕН ПРОИЗВЕДЕНИЮ  
ЭЛЕМЕНТОВ ГЛАВНОЙ  
ДИАГОНАЛИ**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$



# РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

# ОБЩИЙ ВИД СИСТЕМЫ $n$ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С $n$ НЕИЗВЕСТНЫМИ

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

# МАТРИЧНЫЙ ВИД СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

# ГЛАВНЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАМЕРА НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ИЗ 3-х УРАВНЕНИЙ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

# НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛ КРАМЕРА

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

# ФОРМУЛЫ КРАМЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$



# ПРИМЕР РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 13, \\ 4x + 3y - z = 7, \\ x - 2y + 5z = 15 \end{cases}$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 24 + 1 - 9 - 4 + 20 = 14 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \\ 15 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 195 - 42 + 15 - 135 - 26 + 35 = 42,$$

# ПРОДОЛЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 70 + 130 - 13 - 21 + 30 - 260 = -14,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 15 \end{vmatrix} = 90 - 140 - 7 - 39 + 28 + 60 = 28.$$

# ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ОТВЕТ

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2.$$