4. Функция распределения. Плотность распределения. Вероятность попадания СВ в интервал значений

функция распределения (ФР)

накопленная

to be continued

разрывная ступенчатая функция

равномерное дискретное распределение

равномерный закон

свойства функции распределения

плотность распределения (ПР) или
функция плотности или
плотность вероятности

дифференциальная ФР
интегральная ФР

свойства плотности распределения
элемент вероятности
кривая распределения

геометрическая интерпретация свойств ФР и ПР

площадь под кривой распределения

вероятностная мера

Функция распределения

– наиболее общая, универсальная форма описания СВ – и дискретных, и непрерывных

Функция распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X есть веро… переменная X примет зна…нного x

Запомнить и понять!

$$F(x) = P(X < x)$$

ФР определяет <u>такую</u> вероятность для каждого из значений x величины X

В соответствии с определением ФР и правилом сложения

ФР называют *кумулятивной* (накопленной) вероятностью

?

Для дискретной X, заданной рядом

$$X: \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_m \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_m \end{array}$$

F(x) = ?

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P\{X = x_i\} = \sum_{i: x_i < x} p_i$$

Для x в разных диапазонах значений:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \ldots & \\ \sum_{j=1}^{i} p_j, & x_i < x \le x_{i+1} \\ \ldots & \\ 1, & x_m < x \end{cases}$$

Пример «со 2-ым стрелком»:

Y:

1	2	3
0.2	0.5	0.3

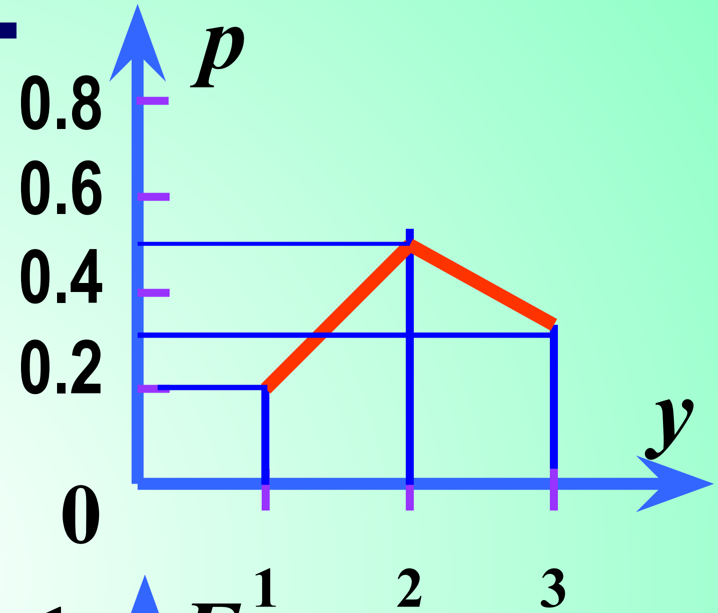
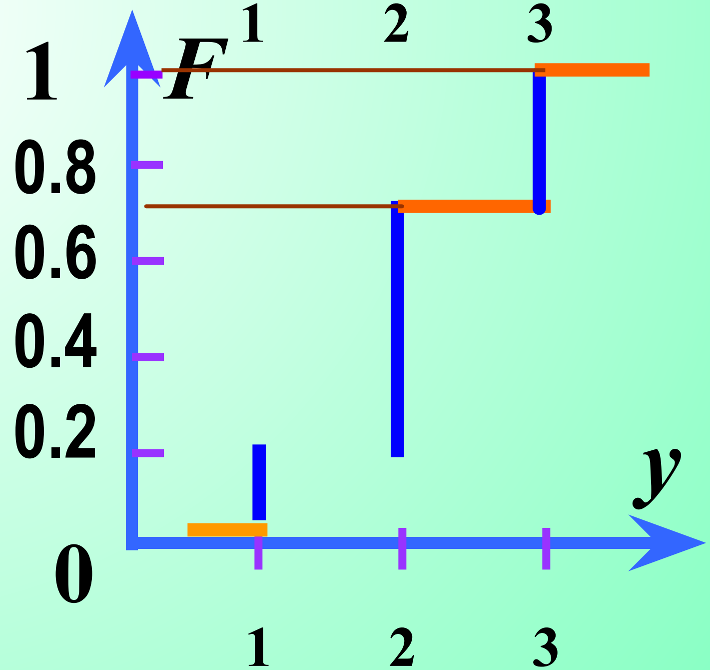


График функции распределения

$F(y) =$ … 2

$0.7,\quad 2 < y \leq 3$

$1,\quad 3 < y$



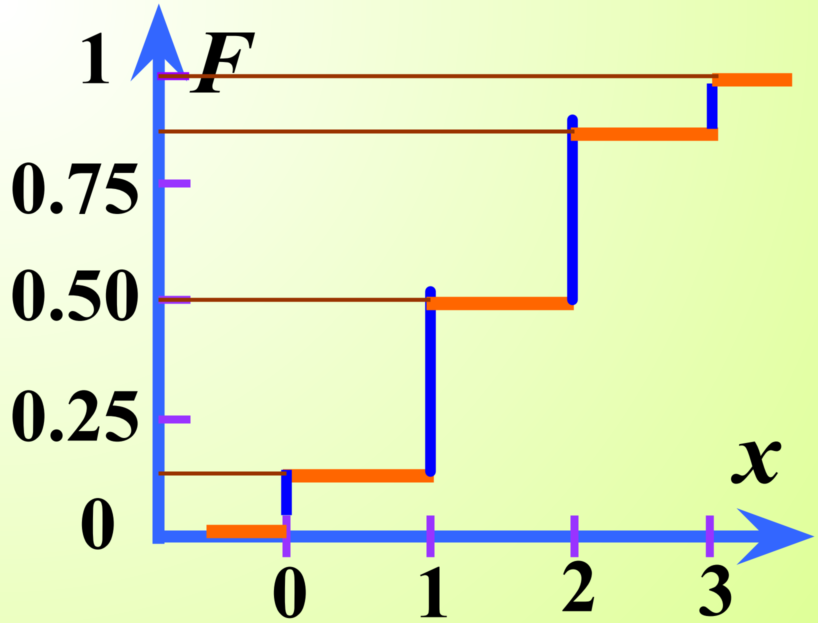
Еще пример:

так выглядит ФР числа попаданий при 3-х выстрелах, при вероятности попасть в каждом $p = 0.5$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1/8, & 0 < x \le 1 \\ 4/8, & 1 < x \le 2 \\ 7/8, & 2 < x \le 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

X:

0	1	2	3
1/8	3/8	3/8	1/8



В соответствии с определением и как видно из формул и графиков

ФР дискретной СВ – это разрывная ступенчатая функция.

Ее скачки соответствуют возможным значениям величины и равны вероятностям этих значений.

Между скачками она постоянна; в точках разрыва равна значению, с которым подходит слева

Равномерное дискретное распределение

Очки игральной кости, номера в лототроне, числа рулетки, …

X принимает m значений с равными вероятностями:

$$P(x_i) = p = 1/m, \quad X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots, x_m\}$$

Как видели,

<u>в случае дискретной величины</u>

единичная вероятность достоверного события (величина примет одно из ее возможных значений) распределена между счетным …чеством m отдельных значений x_i. Ска… вероятностям p_i этих з…

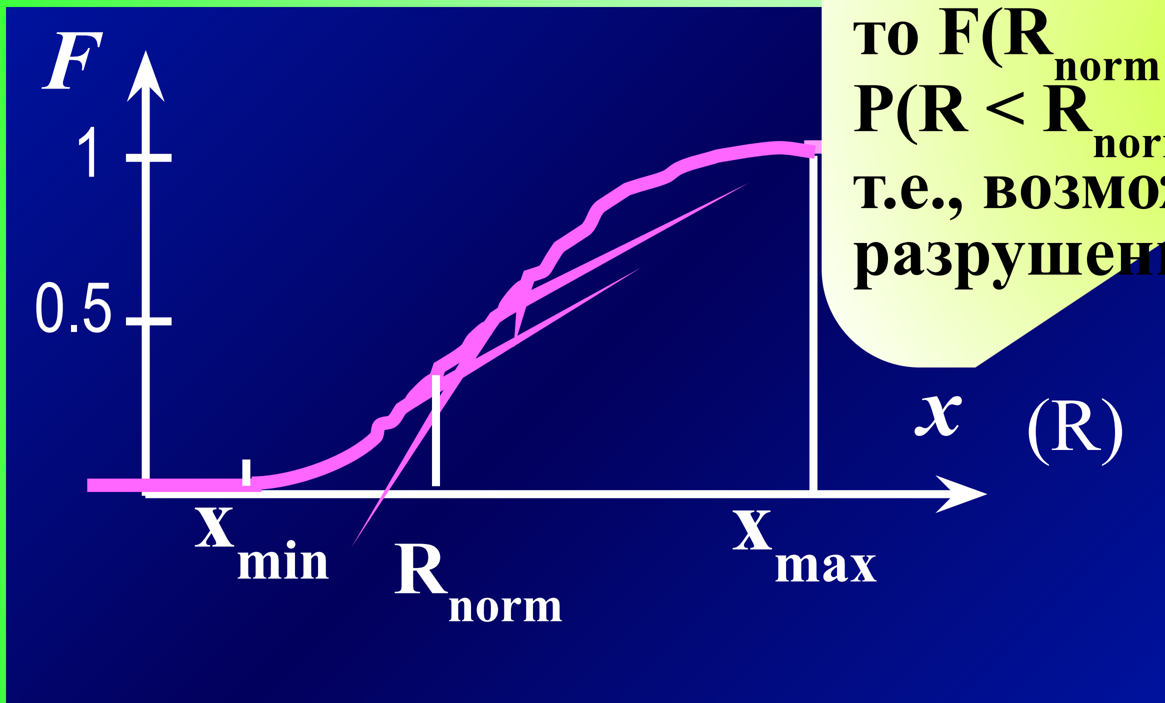
Например, такой

<u>Для непрерывной величины</u>

эта «1» распределена между бесчисленным числом значений, скачки оказываются бесконечно малыми, а ФР − непрерывной.

1-ый пример того, как может выглядеть ФР непрерывной ве

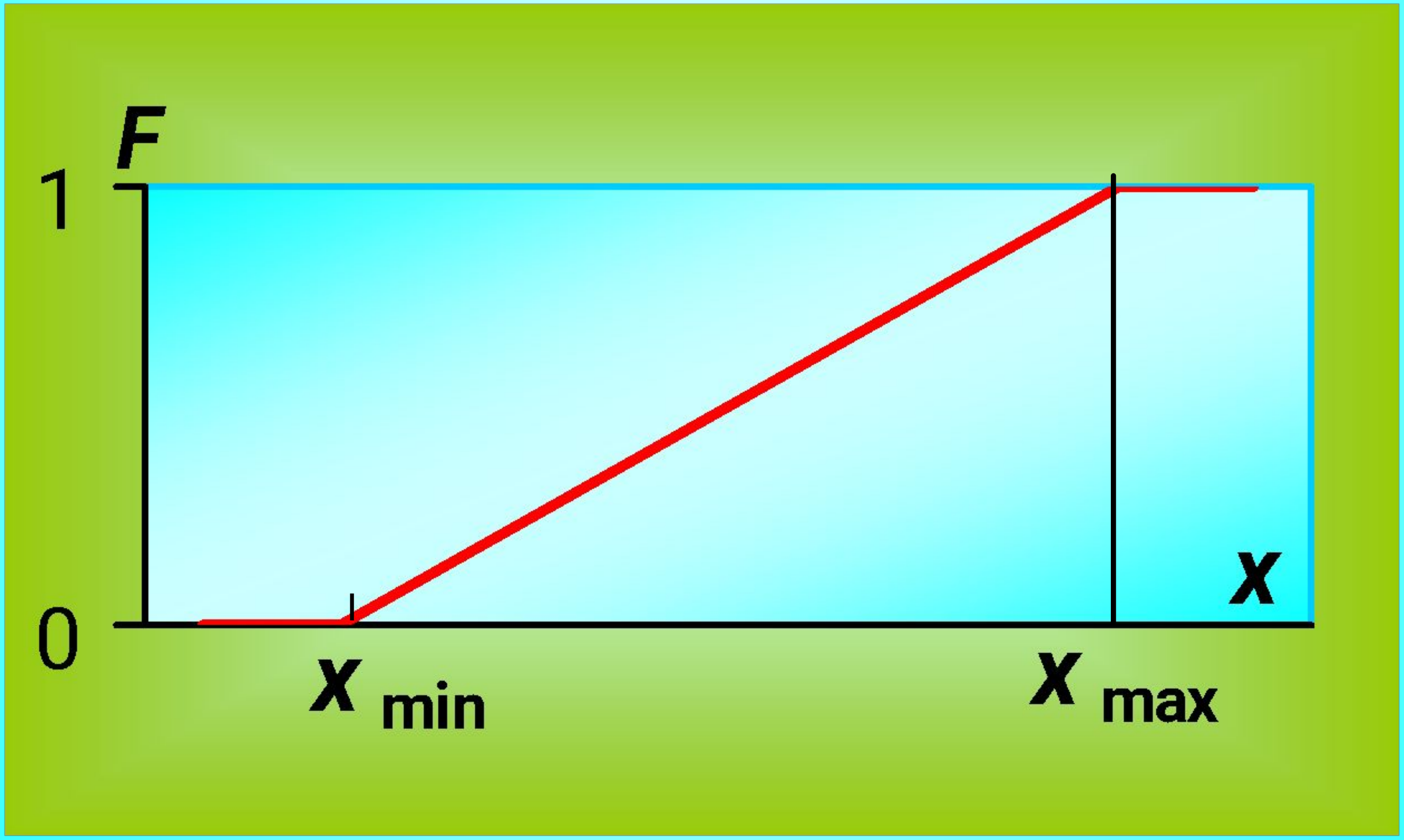
Если R_{norm} – требуемая нормативная прочность, то $F(R_{norm})$ означает $P(R < R_{norm})$, т.е., возможность отказа, разрушения …



волокна, годовой зарплаты, возраста владельцев кредитных карт,

прочности материала (R) и т.д.

Еще пример ФР непрерывной СВ
(и график, и формула)



$F(X)$ растет с ростом x обратно пропорционально диапазону значений

$x < x_{min}$

F

$< x_{max}$

<u>Например:</u>
так распределено время ожидания поезда в метро при условии постоянных интервалов между поездами и случайного прихода пассажира

Равномерный закон распределения

Свойства функции распределения

Следуют из определения ФР

а) **ФР – неубывающая функция**

$F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 \le x_2$

to be continued

б) $F(x)$ x_{min}, $F(-\infty) = 0$

(невозможное событие – нет значений меньше таких x)

в) $F(x) = 1$ для всех $x > x_{max}$, $F(\infty) = 1$

(достоверное событие – любое из значений меньше таких x)

г) $P(g \le X < h) = F(h) - F(g)$

Следует из правила сложения вероятностей:
пусть $A \sim \{X < g\}$, $B \sim \{X < h\}$, $C \sim \{g \le X < h\}$;
тогда … $P(B) = P(A) + P(C)$, $P(C) = ?$

Важно для практики!

Если известна ФР, можно определить вероятность попадания СВ в интервал значений, в частности, что она не выйдет за нормативные границы

Пример:

Поезд в метро приходит с интервалом в 4 мин. Учитывая, что время ожидания τ распределено равномерно, с $\tau_{min} = 0$ и $\tau_{max} = 4$,
можно определить вероятности ожидания:

1) не более 1 мин.

$P(\tau < 1) = F(1) = (1 - 0) / (4 - 0) = 0.25$

2) более 2 мин.

$P(\tau > 2) = 1 - F(2) = 1 - (2 - 0) / (4 - 0) = 0.5$

3) от 1 до 2 мин.

$P(1 < \tau < 2) = F(2) - F(1) = 0.5 - 0.25 = 0.25$

Еще пример → решите !

Бухгалтер установил,
что сроки оплаты счетов
распределены равномерно
в интервале от 3 до 13 недель.

Какова вероятность,
что выбранный наугад счет
будет оплачен в период
от 4 до 8 недель?

?

0.4 !

$$P(4 < X < 8) = F(8) - F(4) = (8 - 4) / (13 - 3) = 0.4$$

Плотность распределения

Если ФР непрерывна и дифференцируема, то существует другая удобная форма полного описания непрерывной СВ.

Эта форма представления ЗР –

функция плотности вероятности

(или)

плотность распределения **(ПР)**

ПР определяется как предел отношения вероятности попадания СВ в интервал к величине этого интервала, когда она стремится к нулю

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{X \in (x, x+\Delta x)\}}{\Delta x} =$$

f(x) –

дифференциальная ФР

?

$$f(x) = F'(x)$$