Плотность распределения

Если ФР непрерывна и дифференцируема, то существует другая удобная форма полного описания непрерывной СВ.

Эта форма представления ЗР –

функция плотности вероятности

(или)

***плотность распределения* (ПР)**

ПР определяется как предел отношения вероятности попадания СВ в интервал к величине этого интервала, когда она стремится к нулю

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{X \in (x, x + \Delta x)\}}{\Delta x} =$$

f(x) –

дифференциальная ФР

?

$$f(x) = F'(x)$$

Свойства плотности распределения

Следуют из определения ПР

а) **ПР – неотрицательная функция**

$$f(x) \geq 0$$

(как производная неубывающей функции F)

***dP* – элемент вероятности**

б) значение в достаточно малом интервале Δx пропорциональна ФП

$$P\{X \in (x, x+\Delta x)\} \approx f(x) \cdot \Delta x$$

Точное равенство при

$$\Delta x = dx$$

$$P\{X \in (x, x+dx)\} = f(x) \cdot dx = dP$$

«Если $\Delta x = 0$, то $P = 0$» → «вероятность попадания X в (·) равна 0» (это невозможное событие)

Попадание непрерывной СВ в (·) лишено физического смысла →

F(x) − *интегральная ФР*

в) $P\{X \in (x_{\min}, x)\} = \int\limits_{x_{\min}}^{x} f(x)dx = F(x)$

$$P\{X \in (-\infty, x)\} = \int\limits_{-\infty}^{x} \underbrace{f(x)dx}_{dP} = F(x)$$

г)

$$P\{X \in (g,h)\} = \int_g^h f(x)dx = F(h) - F(g)$$

Соответствует свойству (г) ФР.

Важно для практики!

Вероятность попадания СВ в любой интервал ее значений можно определить, если известны ФР или ПР

to be continued

д)

$$P\{X \in (x_{\min}, x_{\max})\} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx \overset{?}{=} 1$$

или в более общей форме

$$P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Эти выражения еще раз утверждают:
сумма вероятностей всех возможных значений СВ равна
<u>единице</u>
(вероятности достоверного события – неизбежно принять одно из значений)

График функции плотности –
к р и в а я   р а с п р е д е л е н и я

Три примера «3 пары графиков ФР и кривых распределения» ⟶ иллюстрируют суть, взаимосвязь свойств и практическую пользу ФР и ПР

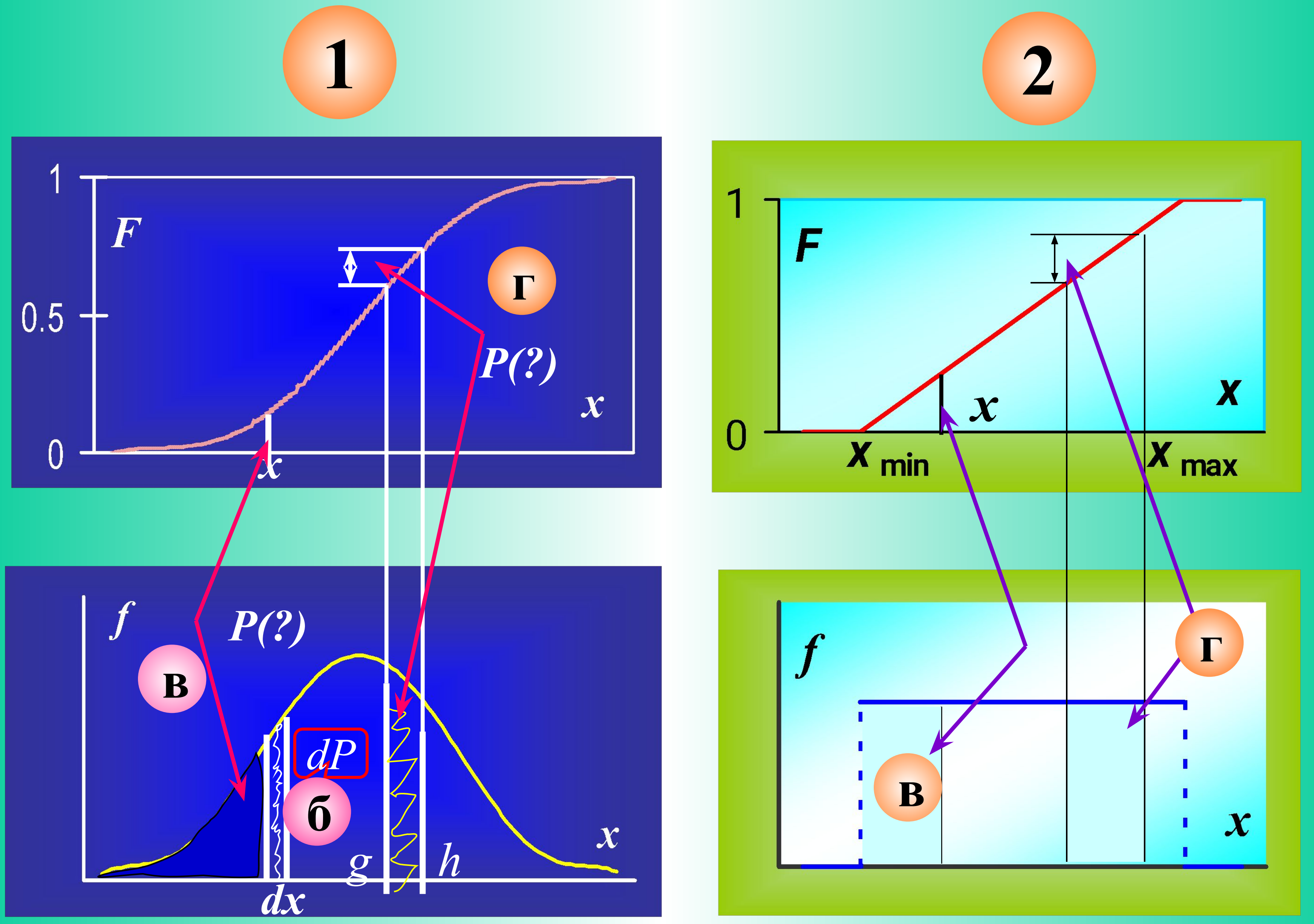
Графическая интерпретация свойств функции и плотности распределения

2 пары графиков описывают непрерывные СВ
3-я пара представляет ЗР дискретной величины

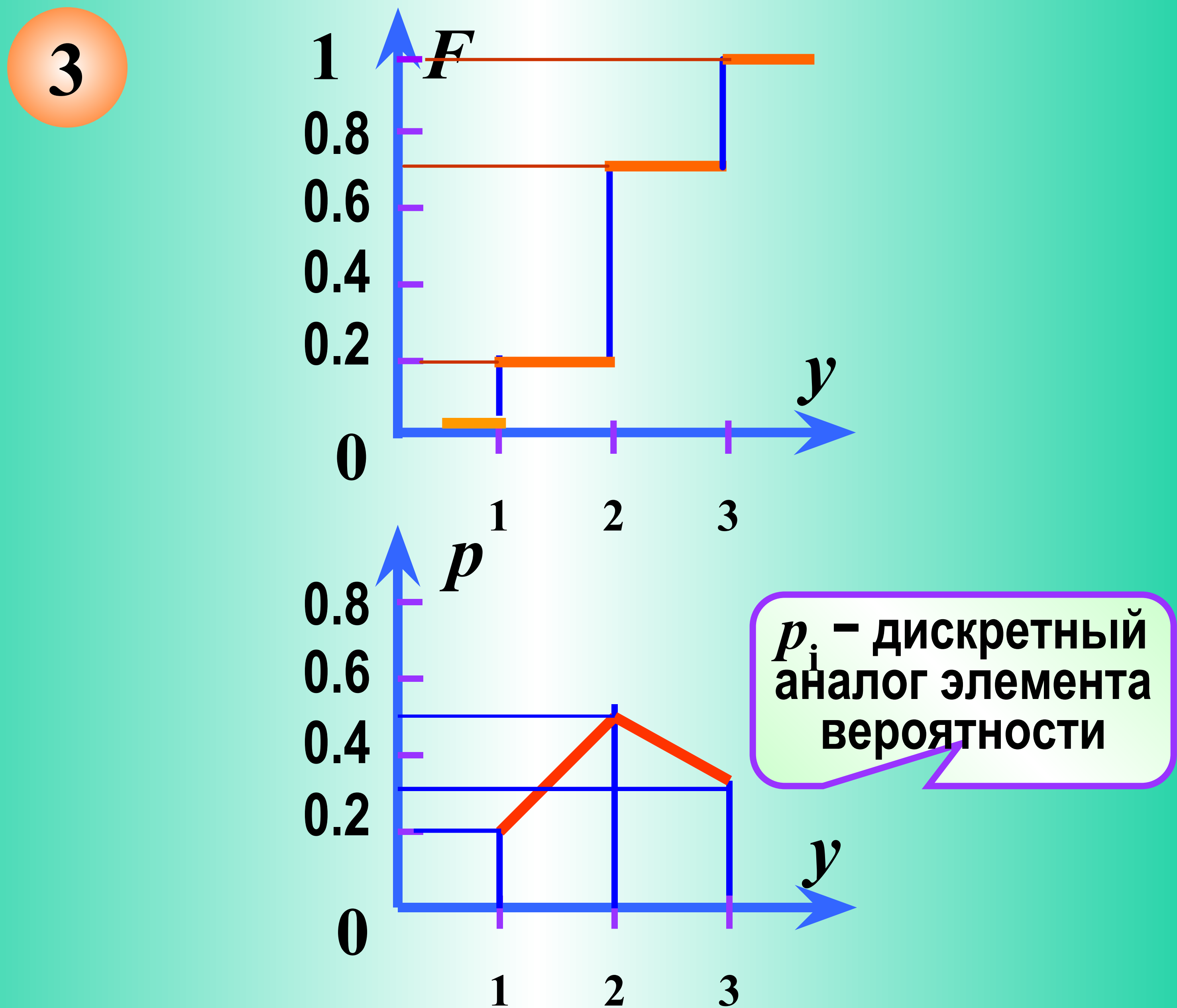
На всех верхних – ФР,
на нижних показаны функции «плотности»:
кривые распределения – графики производных (1, 2)
и ломаная линия полигона распределения (3)

Полигон – дискретный аналог кривой распределения:

вероятности сконцентрированы в нескольких отдельных точках	шансы распределены между бесчисленным числом точек



1
2
1
0.5
0
F
x
г
P(?)
x
f
P(?)
в
dP
б
g
h
x
dx
1
F
x
x
0
x min
x max
f
г
в
x



3
1
F
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0
1
2
3
p
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0
1
2
3
pi – дискретный аналог элемента вероятности

Графические образы явно демонстрируют свойство (а)

Вероятность того, что X примет значение между g и h равна:

1) разности ординат F для g и h или

2) площади под кривой распределения между g и h

Площадь под всей кривой распределения равна единице

Площадь под любой кривой распределения равна единице

Различия между разными ЗР заключается в том, как единичная площадь распределена вдоль (между участками) числовой оси

Значения разных величин распределены вдоль числовой оси в соответствии с разной мерой возможности → *вероятностной мерой* $f(x)$

Пример:

The End

Дана

< 40

F < 44

Записать ПР,
построить графики обеих функций,
найти вероятность
попадания в интервал (41, 43)