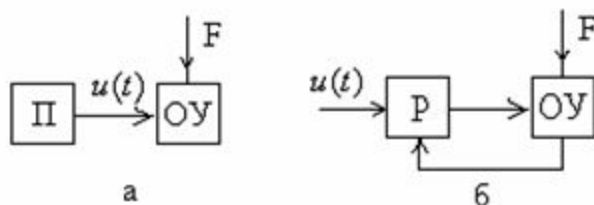


8. Методы теории оптимальных систем управления

Основные понятия и определения.

В теории оптимальных систем управления рассматриваются задачи синтеза систем с изменяемой структурой.



Синтез оптимальной системы для заданного объекта заключается в подборе **программатора или регулятора**, которые наилучшим образом решают поставленную задачу управления.

Программатор (П) на основе априорной информации об объекте и возмущениях F формирует входное воздействие $u(t)$, обеспечивающее наилучший из возможных переход из начального состояния в заданное. Жесткое программное управление называют оптимальным по режиму управления.

Регулятор (Р) на основе информации о текущем состоянии объекта формирует управление, обеспечивающее наилучшее выполнение задания.

Оптимальные системы с регулятором в цепи обратной связи называют оптимальными по переходному процессу.

8.1 Общая постановка задачи оптимального управления.

При решении задач оптимального управления задают:

1. уравнения объекта,
2. ограничения на управление и фазовый вектор,
3. краевые условия,
4. критерий оптимальности.

1. Уравнения объекта: $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$;

x - n - мерный вектор состояния (фазовый вектор),

u - r - мерный вектор управления ,

2. на управление и вектор состояния могут быть наложены ограничения:

$u(t) \in U_t^{(r)}$; $x(t) \in X_t^{(n)}$; $U_t^{(r)}$, $X_t^{(n)}$; - зависящие от времени, допустимые множества значений векторов входного воздействия и состояния,

3. Краевые (граничные) условия на вектор состояния в начальный t_0 и конечный t_f моменты времени: $x(t_0) \in X_0$; $x(t_f) \in X_f$,

4. Критерий оптимальности: $J = J(u(t), x(t))$; J - функционал,

Задача оптимального управления заключается в следующем: при заданном уравнении объекта управления, ограничениях и краевых условиях найти такое

программное управление $u^*(t)$ или

управление с обратной связью $u^*(x, t)$ и фазовую траекторию $x^*(t)$,

при которых критерий J принимает **min** значение.

Управление $u^*(t)$ и траекторию $x^*(t)$ называют оптимальными.

Пример 1. Управление движением летательного аппарата.

Вывод ЛА из $x(t_0)$ в заданную точку пространства $x(t_f)$ за **min** время;

Критерий оптимальности: $J = (t_f - t_0); \rightarrow \min;$

$x_{верт} > 0$; ограничения на фазовый вектор (вертикальная составляющая вектора координат ЛА должна быть положительна).

Можно ставить и задачу перевода ЛА на максимальную дальность при ограниченном запасе топлива.

Пример 2. Управление двигателем постоянного тока.

Линеаризованное уравнение движения вала двигателя постоянного тока: $I\ddot{\beta} = i_{я}k_{\Phi} - M_C$;

$I\ddot{\beta}$ - момент инерции ротора двигателя и всех нагрузок, присоединенных к валу,

$i_{я}k_{\Phi}$ - момент вращения на валу двигателя, M_C - момент сопротивления,

$i_{я}$ - ток якоря двигателя, β - угол поворота вала.

Обозначим: $x_1 = \beta$; $x_2 = \dot{\beta}$: - компоненты вектора состояния.

$u = i_{я}$ - входное воздействие, $u_C = \frac{M_C}{I}$ - внешнее возмущение, $b = \frac{k_{\Phi}}{I}$ тогда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = bu - u_C; \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu + \tilde{q}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}; \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_C \end{pmatrix};$$

Задача поворота вала на заданный угол без остановки за **min** время.

Ограничения: $|u| \leq u_{\max}$; сила тока в якорной цепи должна быть ограничена,

$$x_1(t_0) = x_1^0; \quad x_1(t_f) = x_1^f;$$

Краевые условия:

$$x_2(t_0) = x_2^0; \quad x_2(t_f) \text{ - никак не ограничивается.}$$

Критерий оптимальности: $J = (t_f - t_0); \rightarrow \min$.

Задача поворота вала на заданный угол без остановки за время T

$$\text{при } \mathbf{min} \text{ расходе энергии: } J = \int_{t_0}^{t_0+T} i_{я}^2 dt \rightarrow \mathbf{min}; .$$

8.1.1. Классификация задач оптимального управления.

1. Классификация по виду ограничений

а) ограничения равенства $\varphi_k(u, x, t) = 0; \quad k = 1, K; \quad 8.1$

б) ограничения неравенства $\varphi_k(u, x, t) \leq 0; \quad k = 1, K; \quad 8.2$

в) изопериметрические ограничения $\int_{t_0}^{t_f} f_{n+j}(x, u, t) dt \leq b_j; \quad j = 1, J; \quad 8.3$

Замечание 1. Введением дополнительных уравнений от изопериметрических ограничений можно избавиться, введя дополнительные состояния x_{n+j} в описание объекта и дополнив уравнения состояния уравнениями:

$$\dot{x}_{n+j}(t) = f_{n+j}(x, u, t); \quad x_{n+j}(t_0) = 0; \quad x_{n+j}(t_f) \leq b_j; \quad j = 1, J;$$

Замечание 2. Ограничения неравенства можно заменить равенствами, если расширить вектор управления новыми компонентами u_{r+k} по числу неравенств и записать:

$$\varphi_k(u, x, t) + u_{r+k}^2 = 0; \quad k = 1, K;$$

2. Классификация по виду краевых условий:

а) с фиксированными концами, каждое из множеств X_0, X_f , содержит по одной точке,

б) с подвижным правым концом (в множестве X_f более одной точки),

в) с свободным правым концом (без ограничений на правом конце).

3. Классификация по времени начала и конца процесса управления:

а) с фиксированным временем (t_0 и t_f - фиксированы),

б) с нефиксированным временем (одно из t_0, t_f - не фиксировано).

4. Классификация по критерию оптимальности

а) задача Больца: $J = g_0(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt; \rightarrow \min;$ 8.4

здесь: g_0, f_0 - скалярные функции векторного аргумента,

g_0 - имеет смысл штрафа за неправильно выполненное задание на управление,

f_0 - неотрицательно определенная функция

задает расходы (энергетические, финансовые) на выполнение управления.

б) задача Лагранжа: $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt; \rightarrow \min;$ 8.5

в) задача Майера: $J = g_0(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f); \rightarrow \min;$ 8.6

если $J = g_0(x(t_0), x(t_f));$ - задача терминального управления,

если $J = (t_f - t_0);$ - задача максимального быстродействия

8.2 Метод классического вариационного исчисления при построении оптимального программатора.

8.2.1 Задача Лагранжа с фиксированным временем и закрепленными концами.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ уравнения состояний объекта,
2. $\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,
3. $x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) = x^f;$ краевые условия, x - n -мерный вектор, 8.7
4. $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt; \rightarrow \min;$ задача Лагранжа,

Здесь: $f_i(x, u, t) \quad i = 0, n;$ непрерывная, дифференцируемая по всем аргументам функция,

$u(t)$ - кусочно-непрерывная на интервале $[t_0, t_f]$ функция (непрерывная за исключением конечного числа разрывов первого рода).

$x(t)$ - кусочно-гладкая на интервале $[t_0, t_f]$ функция (сама непрерывна, а ее производная кусочно-непрерывна).

Управление и фазовый вектор, удовлетворяющие перечисленным ограничениям, называют допустимыми.

Смысл задачи в том, чтобы подобрать входное управление, переводящее систему из состояния $x(t_0) = x^0;$ в состояние $x(t_f) = x^f$ за фиксированное время $t_f - t_0$ с минимальными затратами (например, энергии, финансовых ресурсов и т.п.).

При решении этой задачи воспользуемся классическим вариационным исчислением.

Замечание 1 . О вариационной задаче Лагранжа без ограничений; уравнения Эйлера.

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(y, \dot{y}, t) dt \rightarrow \text{extr} \quad 8.8$$

$$y(t_0) = y^0, \quad y(t_f) = y^f;$$

$y \in C^1[t_0, t_f]$ - класс непрерывных, дифференцируемых на интервале $[t_0, t_f]$ скалярных функций.

Если существует функция $y^*(t)$, доставляющая экстремум функционалу (8.8), то согласно основной лемме вариационного исчисления $y^*(t)$ должна быть решением уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_0(y, \dot{y}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} f_0(y, \dot{y}, t) = 0 \Big|_{y = y^*}; \quad 8.9$$

$y^*(t)$ при этом называют экстремалью или стационарной точкой.

Если в (8.8) $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$ векторная функция, то экстремаль $y^*(t)$ должна быть

решением системы уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} f_0(y, \dot{y}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_j} f_0(y, \dot{y}, t) = 0 \Big|_{y = y^*}; \quad j = 1, p; \quad 8.10$$

при краевых условиях $y(t_0) = y^0, \quad y(t_f) = y^f;$

(По определению производная скалярной функции $f(z)$ векторного аргумента

$z = (z_1, z_2, \dots, z_p)^T$ по z есть вектор строка $f'_z = (f'_{z_1}, f'_{z_2}, \dots, f'_{z_p})$)

Замечание 2 . О вариационной задаче с ограничениями; уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\begin{aligned}
 & \Phi_i(z, \dot{z}, t) = 0; \quad i = 1, p; && \text{ограничения,} \\
 & \varphi_k(z, t) = 0; \quad k = 1, l; && \\
 & z(t_0) = z^0, \quad z(t_f) = z^f; && \text{краевые условия,} \\
 & J(z) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi_0(z, \dot{z}, t) dt \rightarrow \text{extr}; && 8.11 \\
 & z - \text{векторная функция времени размерности } s; \\
 & \Phi_i, \varphi_k - \text{дифференцируемые по всем аргументам функции.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Составим функцию: } L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = \sum_{i=1}^p \psi_i \Phi_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k + \psi_0 \Phi_0; \quad 8.12$$

ψ_i - функции времени, $i = 1, p$; ψ_0 и λ_k - константы, $k = 1, l$;
 $L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t)$ - функция Лагранжа, а ψ_i и λ_k - множители Лагранжа.

Рассмотрим задачу отыскания экстремали функционала:

$$\tilde{J}(z) = \int_{t_0}^{t_f} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) dt \rightarrow \text{extr}; \quad 8.13$$

при краевых условиях: $z(t_0) = z^0, \quad z(t_f) = z^f$;

В преобразованной задаче (8.13) в обозначениях (8.8) подынтегральная функция $f_0(y, \dot{y}, t)$

$$\text{имеет вид: } L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = \sum_{i=1}^p \psi_i \Phi_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k + \psi_0 \Phi_0;$$

аргументами подынтегральной функции являются:

время t и векторы $y = (z, \psi, \lambda)^T, \quad \dot{y} = (\dot{z}, 0, 0)^T$ размерности $s + p + l$

Экстремаль задачи $y^*(t)$ должна быть решением системы $s + p + l$ уравнений Эйлера (8.10):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_i} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = 0; & i = 1, s; \\ \frac{\partial}{\partial \psi_j} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = 0; & j = 1, p; \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = 0; & k = 1, l; \end{cases} \quad 8.14$$

при краевых условиях $z(t_0) = z^0$, $z(t_f) = z^f$;

В системе (8.14) уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi_j} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = 0; & \quad j = 1, p; \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = 0; & \quad k = 1, l; \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Phi_i(z, \dot{z}, t) = 0; & \quad i = 1, p; \\ \varphi_k(z, t) = 0; & \quad k = 1, l; \end{aligned}$$

совпадают с равенствами ограничениями в (8.11).

В соответствии с **леммой Лагранжа** экстремаль $z^*(t)$ функционала (8.11) при наличии ограничений совпадает с экстремалью функционала (8.13) задачи безусловной оптимизации типа (8.8, 8.10) и должна быть решением соответствующих уравнений Эйлера (8.10, 8.14).

Итак, экстремаль $z^*(t)$ функционала (8.11) должна удовлетворять уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = 0; \quad i = 1, s; \quad 8.15$$

и равенствам-ограничениям:

$$\begin{aligned} \Phi_j(z, \dot{z}, t) = 0; & \quad j = 1, p; \\ \varphi_k(z, t) = 0; & \quad k = 1, l; \end{aligned}$$

при краевых условиях: $z(t_0) = z^0$, $z(t_f) = z^f$; z - вектор размерности s .

Вернемся к задаче (8.7) оптимального управления объектом.

1. $f_i(x, u, t) - \dot{x}_i(t) = 0; \quad i = 1, n;$ уравнения состояний объекта,
2. $\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,
3. $x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) = x^f;$ краевые условия, x - n -мерный вектор,
4. $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt; \rightarrow \min;$ задача Лагранжа,

Это задача отыскания экстремали функционала (4) при наличии ограничений (1,2).

Составим функцию Лагранжа: $L = \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k + \psi_0 f_0;$

Роль аргумента z играет вектор $(x, u)^T$ размерности $n + r$.

В соответствии с (8.15) уравнения Эйлера-Лагранжа есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} L - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} L = 0; & i = 1, n; \\ \frac{\partial}{\partial u_j} L = 0; & j = 1, r; \end{cases} \quad 8.16$$

ограничения:

$$f_i(x, u, t) - \dot{x}_i(t) = 0; \quad i = 1, n;$$

$$\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$$

краевые условия

$$x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) = x^f;$$

Решение уравнений Эйлера-Лагранжа совместно с ограничениями и краевыми условиями дает экстремаль $(x^*, u^*)^T$.

уравнения Эйлера-Лагранжа (8.16) записывают также, используя функцию:

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k; \quad - \text{ гамильтониан,} \quad 8.17$$

$$L = \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k + \psi_0 f_0; \quad \Rightarrow \quad L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i; \quad 8.18$$

В обозначениях (8.17, 8.18) уравнения Эйлера-Лагранжа (8.16) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; & i = 1, n; \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; & j = 1, r; \end{cases} \quad 8.19$$

Второе из уравнений (8.19) есть условие стационарности (точка, в которой функционал имеет экстремум, называют стационарной). Гамильтониан, при каждом фиксированном t , как функция от управления, на экстремали удовлетворяет необходимому условию экстремума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; \quad j = 1, r;.$$

Правило множителей Лагранжа.

Если допустимая пара $u^*(t), x^*(t)$ является решением задачи оптимального управления (8.7), то необходимо, чтобы существовали не равные одновременно нулю множители Лагранжа, ψ_i и λ_k , а пара $u^*(t), x^*(t)$ удовлетворяла:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; & i = 1, n; \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; & j = 1, r; \end{cases} \quad - \text{ уравнениям Эйлера-Лагранжа}$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$$

$$\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$$

$$x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) = x^f;$$

- уравнениям объекта,

- ограничениям на управление и фазовую траекторию,

- краевым условиям

Итак, чтобы найти оптимальное управление и оптимальную траекторию необходимо совместно решить уравнения

$$\begin{cases} \psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; & i = 1, n; \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; & j = 1, r; \end{cases}$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$$

$$\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$$

при краевых условиях: $x_i(t_0) = x_i^0; \quad x_i(t_f) = x_i^f; \quad i = 1, n;$

Замечание 3. уравнения Эйлера-Лагранжа получены в предположении, что $u(t)$ - непрерывная, а $x(t)$ - гладкая на интервале $[t_0, t_f]$ функции.

Правило Лагранжа остается справедливым и в том случае, когда $u(t)$ - кусочно-непрерывная, а $x(t)$ - кусочно-гладкая на интервале $[t_0, t_f]$ функция при этом в точках разрыва должны дополнительно выполняться условия Вейерштрасса-Эрдмана:

$$\psi^- = \psi^+; \quad H^- = H^+;$$

Множители Лагранжа определяются с точностью до постоянного множителя, поэтому один из множителей Лагранжа можно назначать произвольно; принято выбирать $\psi_0 = -1$;

Для определения $2n + r + l$ неизвестных:

$x_i; i = 1, n; \quad \psi_i; i = 1, n; \quad u_j; j = 1, r; \quad \lambda_k; k = 1, l;$ имеется столько же уравнений, но среди них $2n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка, при решении которых появляется $2n$ постоянных интегрирования. Эти неизвестные находят из краевых условий.

Решение исходной вариационной задачи свелось к решению краевой задачи Коши. Уравнения Эйлера-Лагранжа дают необходимые условия экстремали; т.е. всякая экстремаль должна удовлетворять уравнениям Эйлера-Лагранжа, но не всякое решение есть экстремаль. Однако, если решение единственно, оно и есть экстремаль.

Пример 1. Задача поворота вала электродвигателя на заданный угол с остановкой при минимальном расходе энергии.

Начало и конец движения, $t_0 = 0$; $t_f = 1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases} \quad \text{уравнения движения электродвигателя;}$$

Здесь для простоты полагаем, что внешней нагрузки на вал нет — $u_c = 0$; , а $b = 1$;

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) = 0; \\ x_1(1) = 1; \quad x_2(1) = 0; \end{aligned} \quad \text{краевые условия;}$$

Выбрать управление u так, чтобы $J = \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min$;

Задача Лагранжа с фиксированным временем и закрепленными концами $n = 2$; $r = 1$; $l = 0$;

Гамильтониан: $H = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k$; ограничений нет $l = 0$; $\psi_0 = -1$;

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \psi_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; & \Rightarrow & \psi_1 = C_1; \\ \psi_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; & \Rightarrow & \psi_2 = -C_1 t + C_2; \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0; & \Rightarrow & -2u + \psi_2 = 0; \Rightarrow u = \frac{\psi_2}{2} = \frac{-C_1 t + C_2}{2}; \end{cases}$$

Подставляя u в уравнение объекта и интегрируя получим:

$$\dot{x}_2 = \frac{-C_1 t + C_2}{2}; \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_2 t}{2} + C_3; \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_2 t^2}{4} + C_3 t + C_4;$$

краевые условия дают:

$$x_1(0) = 0; \Rightarrow C_4 = 0;$$

$$x_2(0) = 0; \Rightarrow C_3 = 0;$$

$$x_2(1) = 0; \Rightarrow -\frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{2} = 0; \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{2};$$

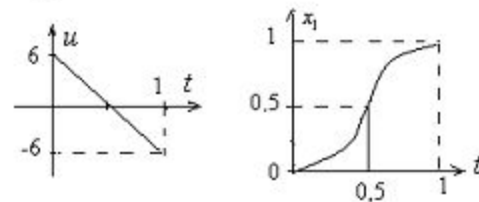
$$x_1(1) = 1; \Rightarrow 1 = -2\frac{C_2}{12} + \frac{C_2}{4}; \Rightarrow C_2 = 12; C_1 = 24;$$

Итак, оптимальные управления и фазовые траектории имеют вид:

$$u^*(t) = -12t + 6;$$

$$x_1^*(t) = -2t^3 + 3t^2;$$

$$x_2^*(t) = -6t^2 + 6t ;$$



8.2.2 Задача построения оптимального программатора с переменным временем управления и подвижными концами.

Замечание. Задача Больца в вариационном исчислении о нахождении экстремума

$$\text{функционала: } J = g_0[y(t_0), y(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(y, \dot{y}, t) dt, \rightarrow \text{extr}; \quad 8.20$$

где g_0, f_0 - непрерывные и дифференцируемые по всем аргументам функции. Если существует экстремаль $y^*(t)$ функционала (8.20), то помимо уравнений Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial y_j} f_0(y, \dot{y}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_j} f_0(y, \dot{y}, t) = 0 \Big|_{y = y^*}; \quad j = 1, p;$$

она должна удовлетворять условиям трансверсальности:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j} \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial g_0}{\partial \dot{y}_j(t_0)}; \quad \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j} \Big|_{t=t_f} = - \frac{\partial g_0}{\partial \dot{y}_j(t_f)}; \quad j = 1, p; \quad 8.21$$

Итак, решение $y^*(t)$ вариационной задачи с подвижными концами должно удовлетворять уравнениям Эйлера и условиям трансверсальности (8.21) вместо краевых условий.

Задача с фиксированным временем и подвижными концами.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ уравнения состояний объекта,
2. $\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,
3. $g_j[x(t_0), x(t_f)] = 0; \quad j = 1, q; \quad q \leq 2n;$ 8.22
4. $J = g_0[x(t_0), x(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt; \rightarrow \min;$ задача Больца,

Ограничения в (8.22) предполагаются независимыми, функции g_j - непрерывные и дифференцируемые по всем аргументам. Используя прием Лагранжа преобразуем эту задачу в простейшую задачу Больца:

$$\tilde{J} = G[x(t_0), x(t_f), v] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, u, \psi, \lambda, t) dt, \rightarrow \min; \quad 8.23$$

$$G = \sum_{i=0}^q v_i g_i;$$

$$L = \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k + \psi_0 f_0 = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i;$$

ψ_0, v_0 - могут выбираться произвольно; обычно выбирают: $\psi_0 = v_0 = -1$;

Экстремаль, если она существует, должна быть решением уравнений Эйлера-

Лагранжа:

$$\begin{cases} \psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; & i = 1, n; \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; & j = 1, r; \end{cases}$$

$\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ уравнений состояний объекта,

$\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$ ограничений на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,

Постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений находят из условий трансверсальности

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \quad \psi_i(t_f) = +\frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}; \quad i = 1, n; \quad 8.24$$

Если часть граничных значений фиксирована, условия трансверсальности для этих координат не выписываются, а граничные условия используются для определения констант интегрирования также как в задаче с фиксированными концами.

Пример 2. Перемещение вала электродвигателя из неподвижного исходного положения в заданное, без остановки вала, за заданное время, с минимальным расходом энергии.

Начало $t_0 = 0$; и конец $t_f = 1$ движения,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases} \text{ уравнения движения электродвигателя;}$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$; $x_1(1) = 1$; $x_2(1)$ - не определено; краевые условия;

Выбрать управление u так, чтобы $J = \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min$; $g_0 = 0$;

Гамильтониан: $H = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k$; ограничений нет $l = 0$; $\psi_0 = -1$;

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; & \Rightarrow & \psi_1 = C_1; \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; & \Rightarrow & \psi_2 = -C_1 t + C_2; \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0; & \Rightarrow & -2u + \psi_2 = 0; \Rightarrow u = \frac{\psi_2}{2} = \frac{-C_1 t + C_2}{2}; \end{cases}$$

Три из 4-х граничных условий фиксированы, одно свободно.

$G = 0$; т.к. ни в функционале ($g_0 = 0$), ни в списке ограничений нет ограничений на положение концов траекторий. Одно состояние при $t=1$ не фиксировано (свободно), отсюда условие трансверсальности

$$\psi_2(1) = \frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = 0; \Rightarrow \psi_2(1) = 0; \Rightarrow C_1 = C_2; \Rightarrow \psi_2 = C_1(1-t); \Rightarrow u = \frac{C_1(1-t)}{2};$$

Интегрируя уравнения объекта:

$$\dot{x}_2 = C_1(1-t)/2; \quad x_2 = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_1 t}{2} + C_3; \quad x_2(0) = 0; \Rightarrow C_3 = 0;$$

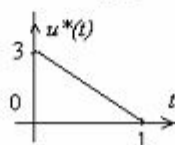
$$\dot{x}_1 = x_2; \Rightarrow x_1 = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_1 t^2}{4} + C_4;$$

$$x_1(0) = 0; \Rightarrow C_4 = 0; \quad x_1(1) = 1; \Rightarrow C_1 = 6;$$

$$u^*(t) = 3(1-t);$$

Итак: $x_1^*(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2;$

$$x_2^*(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 3t;$$



Задача с нефиксированным временем и подвижными концами.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ уравнения состояний объекта,
2. $\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,
3. $g_j[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] = 0; \quad j = 1, q; \quad q \leq 2n;$
4. $J = g_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt; \rightarrow \min;$ задача Больца,

8.25

Необходимые условия экстремума.

Если допустимая пара $(x^*, u^*)^T$ при $t \in [t_0^*, t_f^*]$ есть решение задачи (8.25), то пара $(x^*, u^*)^T$ будет и решением задачи (8.22) при фиксированных значениях времени: $t_0 = t_0^*; t_f = t_f^*;$

Поэтому решение задачи (8.25) должно удовлетворять

- уравнениям Эйлера-Лагранжа,
- уравнениям объекта,
- ограничениям на управление и фазовую траекторию,
- условиям трансверсальности и (или) крайвым условиям
- и соотношениям, обусловленным вариациями времени начала и конца движения

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; & i = 1, n; \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; & j = 1, r; \end{cases} \quad \text{уравнения Эйлера-Лагранжа,}$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n; \quad \text{уравнения состояний объекта,}$$

$$\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l; \quad \text{ограничения на управление } u(t) \text{ и траекторию } x(t),$$

Постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений находят из условий трансверсальности и (или) крайвых условий

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \quad \psi_i(t_f) = +\frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}; \quad \text{условия трансверсальности и (или) крайвые условия}$$

$$H \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}; \quad H \Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f}; \quad \text{соотношения, обусловленные вариациями времени начала и конца движения} \quad 8.26$$

Правило множителей Лагранжа.

Если допустимая пара $u^*(t), x^*(t)$ является решением задачи оптимального управления (8.25),

то необходимо, чтобы

существовали не равные одновременно нулю множители Лагранжа,

эта пара удовлетворяла уравнениям Эйлера-Лагранжа (8.19),

уравнениям объекта и ограничениям на управление и фазовую траекторию,

условиям трансверсальности и (или) крайвым условиям,

дополнительным условиям (8.26).

Итак, чтобы найти оптимальное управление и оптимальную траекторию необходимо совместно решить уравнения

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; & i = 1, n; \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; & j = 1, r; \end{cases}$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$$

$$\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$$

при выполнении условий трансверсальности: $\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}$; $\psi_i(t_f) = +\frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}$; и (или)

краевых условиях: $x_i(t_0) = x_i^0$; $x_i(t_f) = x_i^f$; общее число условий - $2n$.

и дополнительных условий: $H|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}$; $H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f}$;

В точках разрыва управлений или производных фазовых траекторий, если такие есть, должны дополнительно выполняться условия Вейерштраса - Эрдмана: $\psi^- = \psi^+$; $H^- = H^+$;

Пример 3. Поворот вала электродвигателя из неподвижного исходного положения в заданное, с остановкой вала, за минимальное время и заданным расходом энергии.

Начало $t_0 = 0$; и конец t_f движения;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases} \text{ уравнения движения электродвигателя; } \quad (*)$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$; $x_1(t_f) = d$; $x_2(t_f) = 0$; краевые условия,

$$\int_0^{t_f} u^2 dt = b; \quad \text{изопериметрическое ограничение.} \quad (**)$$

Выбрать управление u так, чтобы $J = t_f - t_0$; $\rightarrow \min$;

Введем новую координату x_3 в описание объекта и преобразуем ограничение (**)

в еще одну строку $\dot{x}_3 = u^2$; уравнений (*) при граничных условиях $x_3(0) = 0$; $x_3(t_f) = b$;

$$\begin{array}{l} \text{уравнения} \\ \text{объекта} \end{array} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \\ \dot{x}_3 = u^2 \end{cases} \quad (***)$$

$$\text{Функция } G = -t_f; \quad \nu_0 = -1; \quad \text{Условие (8.26) есть: } H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f} = 1; \quad 8.27$$

$$\text{Гамильтониан: } H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2;$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; & \Rightarrow & \quad \psi_1 = C_1; \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; & \Rightarrow & \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2; \\ \dot{\psi}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0; & \Rightarrow & \quad \psi_3 = C_3; \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0; & \Rightarrow & \quad 2u\psi_3 + \psi_2 = 0; \Rightarrow u = -\frac{\psi_2}{2\psi_3} = \frac{C_1 t - C_2}{2C_3}; \end{aligned}$$

Уравнения
Эйлера-Лагранжа

$$\text{Введем новые постоянные } C_4 = \frac{C_1}{2C_3}; \quad C_5 = \frac{C_2}{2C_3} \quad \text{и запишем } u = C_4 t - C_5;$$

Интегрируя уравнения объекта (***) :

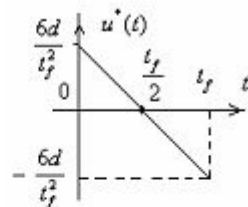
$$\dot{x}_2 = u; \quad x_2(0) = 0; \Rightarrow x_2 = \frac{C_4 t^2}{2} - C_5 t; \quad x_2(t_f) = 0; \Rightarrow C_4 = \frac{2C_5}{t_f};$$

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad x_1(0) = 0; \Rightarrow x_1 = \frac{C_4 t^3}{6} - \frac{C_5 t^2}{2}; \quad x_1(t_f) = d; \Rightarrow C_5 = -\frac{6d}{t_f^2}; \quad C_4 = -\frac{12d}{t_f^3};$$

$$\dot{x}_3 = u^2 = (C_4 t - C_5)^2; \quad x_3(0) = 0; \Rightarrow x_3 = \frac{C_4^2 t^3}{3} - C_4 C_5 t^2 + C_5^2 t;$$

$$x_3(t_f) = b; \Rightarrow t_f = \sqrt[3]{\frac{12d^2}{b}};$$

$$\text{Итак: } u^*(t) = \frac{12d}{t_f^3} \left(\frac{t_f}{2} - t \right);$$



В этой задаче мы не использовали условие (8.27). Оно бы потребовалось при необходимости вычисления функций ψ_i ; константы C_1, C_2, C_3 находят из

$$C_4 = \frac{C_1}{2C_3}; \quad C_5 = \frac{C_2}{2C_3}; \quad \text{и условия} \quad H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f} = 1;$$

8.2.2 Принцип максимума Понтрягина.

Часто на управление накладываются ограничения в виде неравенств; часто оптимальное управление в таких задачах имеет разрывы; классический метод вариационного исчисления при построении оптимального управления не позволяет найти местоположение разрывов в управлении. Опыт показывает, что такие задачи удобно решать, используя принцип максимума Понтрягина (1953 г.).

Задача Лагранжа с фиксированным временем и закрепленными концами при отсутствии ограничений на фазовую траекторию.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ уравнения состояний объекта,
 2. $u \in U^r;$ ограничения только на управление $u(t)$,
на траекторию $x(t)$ - ограничений нет,
 3. $x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) = x^f;$ краевые условия, x - n - мерный вектор,
 4. $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt; \rightarrow \min;$ задача Лагранжа,
- 8.28

Здесь: $f_i(x, u, t) \quad i = 0, n;$ непрерывная, дифференцируемая по x и t функция, дифференцируемость $f_i(x, u, t)$ по u не требуется.

$u(t)$ - кусочно-непрерывная на интервале $[t_0, t_f]$ функция (непрерывная за исключением конечного числа разрывов первого рода).

$x(t)$ - кусочно-гладкая на интервале $[t_0, t_f]$ функция (сама непрерывна, а ее производная кусочно-непрерывна).

Составим функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \psi_0 f_0 = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i; \quad 8.29$$

Гамильтониан вида: $H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i$; называют функцией Понтрягина.

Задача минимизации функционала (8.28) при наличии ограничений сводится к задаче отыскания максимума функционала:

$$\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, u, \psi, t) dt; \rightarrow \max_{u \in U^r}; \quad 8.30$$

при $x_i(t_0) = x_i^0$; $x_i(t_f) = x_i^f$; $i = 1, n$; краевые условия.

Функционал $\tilde{J} \rightarrow \max$, хотя в (8.28) $J \rightarrow \min$ это в силу того, что в функции Лагранжа (8.29) назначено: $\psi_0 = -1$;

Пусть далее $u^*(t)$, $x^*(t)$, $\psi^*(t)$ - решение задачи (8.30)., тогда

при известных u^* можно трансформировать ее в задачу

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, u^*, \psi, t) dt; \rightarrow \max_{x, \psi}; \quad \text{при любом фиксированном } u^*, \quad 8.31$$

либо при известных x^*, ψ^* в задачу

$$\tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f} L(x^*, \dot{x}^*, u, \psi^*, t) dt; \rightarrow \max_{u \in U^r}; \quad \text{при любых фиксированных } x^*, \psi^*, \quad 8.32$$

при тех же (8.30) краевых условиях

или в обозначениях (8.29):

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u^*, \psi, t) - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i] dt; \rightarrow \max_{x, \psi}; \quad 8.33$$

$$\tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f} [H(x^*, u, \psi^*, t) - \sum_{i=1}^n \psi_i^* \dot{x}_i^*] dt; \rightarrow \max_{u \in U^r}; \quad 8.34$$

Задача (8.33) классическая задача вариационного исчисления без ограничений на фазовую траекторию $x(t)$ и $\psi(t)$. Решение этой задачи x^*, ψ^* , если оно существует, должно

удовлетворять уравнениям Эйлера (8.10):
$$\dot{\psi}_i^* = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1, n; \quad 8.35$$

$$\dot{x}_i^* = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}; \quad i = 1, n; \quad 8.36$$

(8.36) есть уравнение состояний объекта: $\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$.

Уравнения (8.35) называют сопряженной системой.

Решение задачи (8.34) очевидно: управление $u^*(t)$ доставляет максимум функционалу в том и только том случае, если всюду на $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва, выполнено

равенство:
$$H(x^*, u^*, \psi^*, t) = \max_{u \in U^r} H(x^*, u, \psi^*, t); \quad 8.37$$

Необходимое условие (8.35) экстремали задачи (8.33) совместно с условием (8.37) составляют необходимые условия максимума задачи (8.28),

называемые принципом максимума Понтрягина.

Принцип максимума для задачи Лагранжа с фиксированным временем и закрепленными концами при отсутствии ограничений на фазовую траекторию.

Для того чтобы допустимая для задачи (8.28) пара $u^*(t), x^*(t)$ была ее решением, необходимо существование не обращающиеся одновременно в нуль константы $\psi_0^* < 0$ и решений ψ_i^* , $i = 1, n$, сопряженной системы (8.35), таких что при $x(t) = x^*(t)$; и $u(t) = u^*(t)$; функция $H(x^*, u^*, \psi^*, t)$ достигала максимума во всех точках интервала $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва функции $u^*(t)$; при краевых условиях $x_i^*(t_0) = x_i^0$; $x_i^*(t_f) = x_i^f$; $i = 1, n$;

Задача с нефиксированным временем и подвижными концами.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ уравнения состояний объекта,
2. $u \in U^r;$ ограничения только на управление $u(t),$
3. $g_j[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] = 0; \quad j = 1, q; \quad q \leq 2n;$ 8.38
4. $J = g_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt; \rightarrow \min;$ задача Больца,

Здесь: $f_i(x, u, t) \quad i = 0, n;$ непрерывная, дифференцируемая по x и t функция, дифференцируемость $f_i(x, u, t)$ по (u) не требуется.

$g_j[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f]$ - дифференцируемая по всем аргументам функция, $j = 1, q;$

функция $H(x^*, u^*, \psi^*, t)$ достигала максимума во всех точках интервала $[t_0, t_f],$ кроме точек разрыва функции $u^*(t);$ при краевых условиях $x_i^*(t_0) = x_i^0; \quad x_i^*(t_f) = x_i^f; \quad i = 1, n;$

Используя прием Лагранжа сведем задачу (8.38) к вариационной задаче:

$$\tilde{J} = G + \int_{t_0}^{t_f} \left[H(x, u, \psi, t) - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i \right] dt; \rightarrow \max_{x, u, \psi}; \quad 8.39$$

$$\text{где } G = \sum_{i=0}^q v_i g_i; \quad H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i; \quad \psi_0 = v_0 = -1;$$

Далее также как в задаче Лагранжа с закрепленными концами и фиксированным временем (8.28) задача расщепляется на две и получают необходимые условия в форме принципа максимума.

Принцип максимума. Для того чтобы допустимая для задачи (8.28) пара $u^*(t), x^*(t)$ была ее решением, необходимо:

1. чтобы существовали такие не обращающиеся одновременно в нуль константа $\psi_0^* \leq 0$ и решения ψ_i^* ; $i = 1, n$; сопряженной системы (8.35), что при $x(t) = x^*(t)$; и $u(t) = u^*(t)$; функция $H(x^*, u^*, \psi^*, t)$ достигала максимума во всех точках интервала $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва функции $u^*(t)$, т.е. $H(x^*, u^*, \psi^*, t) = \max_{u \in U^*} H(x^*, u, \psi^*, t)$;

2. выполнение условий трансверсальности: $\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}$; $\psi_i(t_f) = +\frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}$; $i = 1, n$;

$$\text{и равенств: } H|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}; \quad H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f};$$

Если часть граничных значений фиксирована, условия трансверсальности для этих координат не выписываются, а граничные условия используются для определения констант интегрирования также как в задаче с фиксированными концами.

Метод максимума Понтрягина построения оптимального программатора применим к задачам, в которых:

1. нет ограничений на фазовую траекторию; ограничения накладываются только на управление,
2. не требуется дифференцируемость функций $f_i(x, u, t)$ по управлению $u(t)$.

Пример 4. При ограничении на управление требуется повернуть вал двигателя за заданное время на максимальный угол.

Задача с подвижными концами и фиксированным временем.

Начало $t_0 = 0$; и конец $t_f = T$; движения;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases} \quad \text{уравнения движения электродвигателя;}$$

$$|u| \leq a; \quad \Rightarrow \quad (u \geq -a; \quad \text{и} \quad u \leq a;) \quad 8.40$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0; \quad x_2(T) = 0; \quad \text{краевые условия}$$

Выбрать управление u так, чтобы $J = -x_1(T); \rightarrow \min;$

Сначала попробуем решить задачу классическим способом. Для этого преобразуем ограничения – неравенства (8.40) в ограничения равенства и приведем задачу к стандартному виду. Введем переменные z_1, z_2 ; и заменим неравенства (8.40) равенствами $u + a = z_1^2, \quad u - a = -z_2^2$; перемножим эти равенства: $u^2 - a^2 = -z_1^2 z_2^2 = -z^2$; здесь обозначено: $z_1 z_2 = z$; введение одной дополнительной компоненты в вектор управления от ограничений (8.40) позволило перейти к ограничениям равенствам

$$u^2 - a^2 + z^2 = 0; \quad \Rightarrow \quad \varphi(u, z, x) = 0; \quad 8.41$$

$$\text{Гамильтониан: } H = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k; \quad H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \lambda(u^2 - a^2 + z^2);$$

$$G = -v_0 x_1(T); \quad \text{положим} \quad v_0 = -1; \quad \Rightarrow \quad G = x_1(T);$$

$$\text{условие трансверсальности: } \psi_1(T) = \frac{\partial G}{\partial x_1(T)} = 1; \quad 8.42$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\psi_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = C_1; \quad \psi_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \quad 8.43$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0; \quad \Rightarrow \quad 2\lambda u + \psi_2 = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial z} = 2\lambda z = 0; \quad 8.44$$

Из (8.42) и $\psi_1 = C_1$; $\Rightarrow \psi_1 = 1$; из (8.43) $\Rightarrow \psi_2 = C_2 - t$; из $2\lambda u + \psi_2 = 0$; $\Rightarrow u = (t - C_2) / 2\lambda$;

поскольку u ограничено (8.40), то $\lambda \neq 0$; из (8.44) $\Rightarrow z = 0$;

Итак, из (8.41) управление должно быть равным: $u = \pm a$; 8.45

Однако, проинтегрировав уравнения состояний объекта при $u = \pm a$; с учетом краевых условий на левом конце $x_2(0) = 0$; получаем: $x_2(t) = \pm at$; и убеждаемся, что ни одно из управлений $u = a$; или $u = -a$; не обеспечивают выполнения краевых условий на правом конце $x_2(T) = 0$; ($x_2(T) = \pm aT$), а это означает, что в классе непрерывных управлений решения нет.

Поэтому решение надо искать в классе кусочно-постоянных управлений, удовлетворяющих уравнениям Эйлера-Лагранжа всюду на $[0, T]$ кроме точек разрыва, однако положение этих точек разрыва установить не удастся.

Воспользуемся методом максимума Понтрягина для решения этой же задачи.

Функция Понтрягина: $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$; $G = x_1(T)$; Сопряженные уравнения имеют вид:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1;$$

условие трансверсальности одно: $\psi_1(T) = \frac{\partial G}{\partial x_1(T)} = 1$; все координаты x_i кроме одной

фиксированы на концах: $x_1(0) = x_2(0) = 0$; $x_2(T) = 0$;

$$\psi_1 = 1; \quad \psi_2 = C_2 - t;$$

В соответствии с принципом максимума оптимальное управление должно удовлетворять сопряженным уравнениям и условию максимума функции Понтрягина:

$$\max_{|u| \leq a} H = \psi_1 x_2 + \max_{|u| \leq a} (\psi_2 u); \quad 8.46$$

Оптимальное управление принимает только крайние значения $u = \pm a$; а его знак должен совпадать со знаком функции ψ_2 всюду на интервале $[0, T]$, т.е. $u(t) = a \text{Sign}(C_2 - t)$;
Линейная функция изменяет знак на конечном интервале не более одного раза.

Пусть точка, в которой это происходит есть t_1 . 8.47

$$u(t) = \begin{cases} a & \text{if } 0 \leq t \leq t_1; \\ -a & \text{if } t_1 < t \leq T; \end{cases}$$

На интервале $0 \leq t \leq t_1$ вал двигателя ускоряется, а при $t_1 < t \leq T$ замедляется. По условию задачи вал необходимо повернуть на максимальный угол в положительном направлении.

Определим точку переключений t_1 ; проинтегрируем уравнения объекта $\dot{x}_2 = u$; при выбранном (8.47) управлении и краевом условии $x_2(0) = 0$;

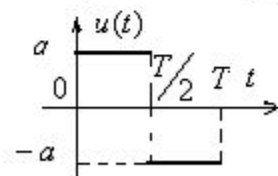
$$x_2 = \begin{cases} at & \text{if } 0 \leq t \leq t_1; \\ C_3 - at & \text{if } t_1 < t \leq T; \end{cases} \quad 8.48$$

Поскольку $x_2(t)$ непрерывная функция, при t_1 : $at_1 = C_3 - at_1$; $\Rightarrow C_3 = 2at_1$;

$$x_2 = \begin{cases} at & \text{if } 0 \leq t \leq t_1; \\ a(2t_1 - t) & \text{if } t_1 < t \leq T; \end{cases}$$

Из краевых условий на правом конце: $x_2(T) = 0$; $\Rightarrow a(2t_1 - T) = 0$; $\Rightarrow t_1 = T/2$;

Итак, окончательно: $u^*(t) = \begin{cases} a & \text{if } 0 \leq t \leq T/2; \\ -a & \text{if } T/2 < t \leq T; \end{cases}$



Метод максимума Понтрягина позволил найти положение точки разрыва управления и записать его в явном виде.

8.2.2.1 Принцип максимума Понтрягина в задаче максимального быстродействия.

Найти допустимое управление, переводящее объект из начальной точки (точка в пространстве состояний) в конечную за минимальное время.

Это частный случай задачи Майера.

Если положить $t_0 = 0$, то критерий оптимальности имеет вид: $J = t_f \rightarrow \min$;

В данном случае $g_0 = t_f$; $f_0 = 0$; и функция Понтрягина: $H = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i$,

поскольку концы траектории закреплены, то: $G = -g_0 = -t_f$;

единственное ограничение на H имеет вид: $H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f} = 1$;

Рассмотрим случай управления линейным объектом: $\dot{x} = Ax + Bu$;

при ограничениях на управление: $\alpha \leq u \leq \beta$; α, u, β - векторы одинаковой размерности $r \times 1$.

Краевые условия $x(t_0) = x^0$; $x(t_f) = 0$; - предполагается, что уравнения записаны в отклонениях,

цель управления привести объект в состояние $x(t_f) = 0$; за минимальное время $J = t_f \rightarrow \min$;

функция Понтрягина в этом случае: $H = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i = \psi^T (Ax + Bu)$, где $\psi^T = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$.

Решение задачи оптимального управления ψ^*, x^* должно удовлетворять сопряженному

$$\text{уравнению: } \dot{\psi}^T = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad 8.49$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление находят из условия:

$$\begin{aligned} \max_{u \in U^r} H &= \max_{u \in U^r} \psi^{*T} (Ax^* + Bu) = \sum_{i=1}^n \psi_i^* \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k^* + \max_{u \in U^r} \sum_{i=1}^n \psi_i^* \sum_{j=1}^r b_{i,j} u_j; \\ \max_{u \in U^r} \sum_{i=1}^n \psi_i^* \sum_{j=1}^r b_{i,j} u_j &= \max_{u \in U^r} \sum_{j=1}^r u_j \sum_{i=1}^n b_{i,j} \psi_i^* = \sum_{j=1}^r \max_{u \in U^r} u_j \sum_{i=1}^n b_{i,j} \psi_i^*; \end{aligned} \quad 8.50$$

Если выполняется “условие нормальности”, то сумма $\sum_{i=1}^n b_{i,j} \psi_i^*$ обращается в нуль только в конечном числе изолированных точек; в этом случае компоненты оптимального управления u^* кусочно-постоянны и принимают крайние значения α_j или β_j $j=1,r$;

$$u_j^* = \begin{cases} \alpha_j & \text{if } \sum_{i=1}^n b_{i,j} \psi_i^* \leq 0; \\ \beta_j & \text{if } \sum_{i=1}^n b_{i,j} \psi_i^* > 0; \end{cases}$$

Если ограничения симметричны $|u_j| \leq \alpha_j$; $\Rightarrow u_j^* = \alpha_j \text{Sign} \sum_{i=1}^n b_{i,j} \psi_i^*$;

“Условие нормальности” объекта:

Рассматривается семейство r матриц размера $n \times n$

$$M[j] = [B_j, (AB)_j, \dots, (A^{n-1}B)_j] \quad j=1,r;$$

составленных из j - столбцов $B_j, (AB)_j, \dots, (A^{n-1}B)_j$ матриц $B, AB, \dots, A^{n-1}B$.

Для объекта $\dot{x} = Ax + Bu$; выполнено условие нормальности, если матрицы $M[j]$ не вырождены для всех $j=1,r$.

Объект, для которого выполнено условие нормальности называют нормальным.

Для объекта n -го порядка с одним входом, одним выходом типа:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = bu; \quad a_0 \neq 0; b \neq 0; \text{ всегда выполнено условие нормальности.}$$

Теорема об n - интервалах (Фельдбаум) Необходимое и достаточное условие оптимальности программного управления по быстродействию линейным объектом n -го порядка.

- 1) Принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности линейной задачи максимального быстродействия при выполнении условий нормальности объекта.
- 2) При оптимальном по быстродействию управлении линейным объектом функции $u_j(t)$, $j=1,r$ принимают только граничные значения при любых собственных числах матрицы A , если выполнено условие нормальности.
- 3) Если собственные числа матрицы A действительные, то компоненты оптимального управления кусочно-постоянны, принимают только крайние значения и имеют не более n интервалов постоянства, т.е. не более $(n-1)$ переключений.

8. 3. Метод динамического программирования.

Метод динамического программирования предложен Беллманом в начале 50-х годов прошлого века для оптимизации многошаговых процессов различной природы.

Основу метода составляют:

1. принцип оптимальности,
2. принцип инвариантного погружения, т.е. включение исходной задачи в семейство аналогичных ей задач,
3. функциональное уравнение, получаемое на основе принципа оптимальности и инвариантного погружения.

Идея метода инвариантного погружения в следующем. Вместо того, чтобы решать исходную задачу ее включают в некоторое семейство задач оптимизации. При этом может оказаться, что между отдельными задачами существуют простые соотношения и среди задач семейства найдется задача, которая просто решается. Тогда, используя решения простой задачи и связи между задачами, находят решение и поставленной задачи.

Пример. Рассмотрим задачу, с которой и начинался метод динамического программирования. Пусть требуется найти \min функции $f(x)$ вида:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \min_{x \in G^n}, \quad (8.51)$$

$$\text{где } G^n = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \quad x_i \in G_i \quad i = 1, n$$

G^n - область определения функции $f(x)$.

Рассмотрим семейство задач:

$$f^{(m)}(x^{(m)}) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \rightarrow \min_{x^{(m)} \in G^m}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.52)$$

В этом соотношении $x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m)^T$. Исходная задача (8.51) погружена в семейство задач (8.52) в том смысле, что она входит в это семейство как частный случай (при $m = n$).

В задаче (8.52) параметр m можно трактовать как дискретное время.

Введем функцию:

$$B_m = \min_{x^{(m)} \in G^{(m)}} \sum_{i=1}^m f_i(x_i) ; \text{ называемую функцией Беллмана.}$$

Очевидно:

$$\begin{aligned} B_{m+1} &= \min_{x^{(m+1)} \in G^{(m+1)}} \left[f_{m+1}(x_{m+1}) + \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \right] = \\ &= \min_{x_{m+1} \in G_{m+1}} \left[f_{m+1}(x_{m+1}) \right] + \min_{x^{(m)} \in G^{(m)}} \sum_{i=1}^m f_i(x_i); \end{aligned} \quad (8.53)$$

Второе слагаемое в (8.53) есть B_m , поэтому функция Беллмана удовлетворяет уравнению:

$$B_{m+1} = \min_{x_{m+1} \in G_{m+1}} \left[f_{m+1}(x_{m+1}) \right] + B_m; \quad (8.54)$$

причем: $B_1 = \min_{x_1 \in G_1} f_1(x_1); \quad (8.55)$

Вычисляя (8.54) с учетом (8.55) последовательно получим

$$B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \quad \text{и} \quad x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$$

Здесь задача (8.51) минимизации скалярной функции от n переменных сведена к n задачам минимизации скалярных функций одной переменной. По сравнению с методом нахождения \min функции $f(x)$ перебором на множестве G^n достигается существенный выигрыш в объеме вычислений. Если каждое множество $G_i \quad i = 1, n$ содержит по l элементов, то при решении перебором требуется просмотр l^n вариантов. Метод динамического программирования предлагает просмотр $l \cdot n$ вариантов.

При использовании (8.54, 8.55), вычисление B_m производится в направлении возрастания аргумента, т.е. в прямом времени (если трактовать m как дискретное время). Уравнения (8.54) называют прямыми уравнениями Беллмана, в отличие от обратных, где используется вычисление B_m при убывающих m .

Для получения обратного уравнения произведем инвариантное погружение задачи (8.51) в другое семейство:

$$\tilde{f}^{(m)}(\tilde{x}^{(m)}) = \sum_{i=m}^n f_i(x_i) \rightarrow \min_{\tilde{x}^{(m)} \in \tilde{G}^{(m)}} ; \quad m = n, n-1, \dots, 1;$$

где $\tilde{G}^{(m)} = G_m \times G_{m+1} \times \dots \times G_n$ $x_i \in G_i$ $i = 1, n$;

$$\tilde{x}^{(m)} = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)^T;$$

при $m = 1$ $f(x) = \tilde{f}^{(1)}(\tilde{x}^{(1)})$.

Введем функцию Беллмана: $S_m = \min_{\tilde{x}^{(m)} \in \tilde{G}^{(m)}} \sum_{i=m}^n f_i(x_i)$;

Очевидно:

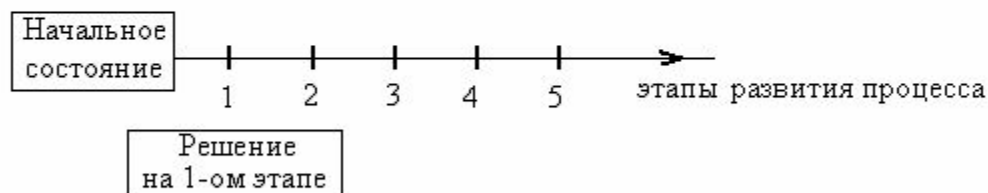
$$S_{m-1} = \min_{\tilde{x}^{(m-1)} \in \tilde{G}^{(m-1)}} [f_{m-1}(x_{m-1})] + \min_{\tilde{x}^{(m)} \in \tilde{G}^{(m)}} \sum_{i=m}^n f_i(x_i);$$

$$S_{m-1} = \min_{\tilde{x}^{(m-1)} \in \tilde{G}^{(m-1)}} [f_{m-1}(x_{m-1})] + S_m;$$

В приведенном примере вывод уравнений Беллмана основан на очевидных соотношениях; в более сложных случаях используется принцип оптимальности Беллмана.

8.3.1. Принцип оптимальности Беллмана

Беллманом рассматривалась задача оптимизации результатов многошагового процесса принятия решений.



По Беллману оптимальная стратегия поведения в процессе многошагового принятия решений такова, что каковы бы ни были состояния и решения на начальных этапах решение на очередном этапе должно быть оптимальным по отношению к состоянию, которое имеет место к данному моменту.

Замечание.

Min (max) суммы достигается на сумме минимумов (максимумов) слагаемых:

$$\min_{u \in U} (f_1(u) + f_2(u)) = \min_{u \in U} (f_1(u)) + \min_{u \in U} (f_2(u))$$

В задачах теории управления оптимальность управления определяется функционалом: $J(u, x, t, t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$, где

$x(t)$ - состояние системы,

$u(t)$ - управление на интервале $[t_0, t_f]$,

$x(t_0), x(t_f)$ - начальное и конечное значения траектории движения.

Принцип оптимальности Беллмана в задачах теории управления справедлив для систем, в которых после выбора управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ на интервале $[t_0, t']$ влияние управления и траектории на оставшемся интервале $[t', t_f]$ на величину функционала J зависит только от состояния в конце начального интервала $x(t')$ и выбора управления в последующие моменты времени.

Этим требованиям удовлетворяют системы, которые можно описать уравнениями состояний.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$x' = f(x, u, t);$$

$$u(t) \in U_t; \quad x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) \in X^f \quad (8.56)$$

время управления не фиксировано, конец траектории подвижен;

$$J = g_0(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(u, x, t) dt \rightarrow \min.$$

Обозначим функцию $u(t)$ на интервале $[a, b]$ $u[a, b]$.

В соответствии с принципом Беллмана для оптимальности допустимой пары решений $x^*(t), u^*(t)$ задачи (8.56) на любом интервале $[t_0, t_f]$ необходимо, чтобы при любом $t' \in [t_0, t_f]$ управление $u^*[t', t_f]$ было оптимальным относительно состояния $x^*(t')$, в котором окажется объект в момент t' при использовании на начальном отрезке времени $t_0 \leq t < t'$ управления $u^*[t_0, t']$.

Это утверждение легко доказывается от противного. Допустим оно не верно и существует управление $u^+[t', t_f]$ переводящее объект из точки $x^*(t')$ в точку $x^+(t_f^+) \in X_f$ в момент t_f^+ , при котором функционал

$$J_2(u^+[t', t_f^+]) = g_0(t_f^+, x(t_f^+)) + \int_{t'}^{t_f^+} f_0(u^+, x, t) dt$$

принимает меньшее значение, чем при управлении $u^*[t', t_f^*]$ т.е.:

$$J_2(u^+[t', t_f^+]) < J_2(u^*[t', t_f^*]); \quad J_2(\dots) - \text{функционал на интервале } [t', t_f] \quad (8.57)$$

Тогда критерий оптимальности в задаче (8.56) при управлении:

$$u^+[t_0, t_f^+] = \begin{cases} u^*(t) & t_0 \leq t < t' \\ u^+(t) & t' \leq t < t_f^+ \end{cases}$$

принимает меньшее значение, чем при управлении $u^*[t_0, t_f^*]$, т.е.

$$\begin{aligned} J(u^+[t_0, t_f^+]) &= g_0(t_f^+, x(t_f^+)) + \int_{t_0}^{t'} f_0(u^*, x^*, t) dt + \int_{t'}^{t_f^+} f_0(u^+, x, t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t'} f_0(u^*, x^*, t) dt + J_2(u^+[t', t_f^+]) \end{aligned}$$

$$J(u^*[t_0, t_f^*]) = \int_{t_0}^{t'} f_0(u^*, x^*, t) dt + J_2(u^*[t', t_f^*])$$

и если выполняется (8.57), то это **противоречит** тому, что $u^*[t_0, t_f^*]$ оптимальное решение, поскольку $J(u^*[t_0, t_f^*]) > J(u^+[t_0, t_f^+])$.

Справедливо также более общее утверждение:

если допустимая пара $x(t), u(t)$ оптимальна $x^*(t), u^*(t)$, то каков бы ни был подинтервал $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ управление $u^*(t)$ на этом подинтервале является оптимальным относительно граничных точек $x^*(t_1), x^*(t_2)$.

Частным случаем этого утверждения является **обратный принцип оптимальности** для оптимальной допустимой пары $x^*(t), u^*(t)$ необходимо, чтобы при любом $t_1 \in [t_0, t_f]$ управление $u^*[t_0, t_1]$ было оптимально относительно конечного для интервала $[t_0, t_1]$ состояния $x(t_1) = x^*(t_1)$.

8.3.2. Функция и уравнение Беллмана.

Рассмотрим задачу (8.56) построения оптимального управления

$$x' = f(x, u, t);$$

$$u(t) \in U_t; \quad x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) \in X^f$$

время управления не фиксировано, конец траектории подвижен;

$$J = g_0(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(u, x, t) dt \rightarrow \min.$$

Произведем инвариантное погружение задачи (8.56) в семейство задач, которое получается из задачи (8.56) заменой начального условия $x(t_0) = x^0$ параметрическим условием $x(t') = x'$, $t' \in [t_0, t_f]$.

В новой задаче t' и x' рассматриваются как параметры.

При $t' = t_0$ из этого семейства задач выделяется задача (8.56).

Минимальное значение критерия оптимальности при параметрическом начальном условии зависит в соответствии с принципом оптимальности от значений t' и $x(t')$.

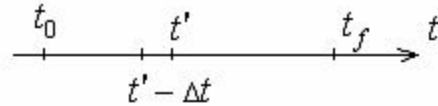
Составим функцию (это так называемая функция Беллмана):

$$S(x(t'), t') = \min_{\substack{u(t) \in U_t \\ t' \leq t \leq t_f}} \left\{ g_0(x(t_f), t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(x, u, t) dt \right\}, \quad (8.58)$$

$$\text{причем: } S(x(t_f), t_f) = g_0(x(t_f), t_f); \quad (8.59)$$

это граничное условие для будущего уравнения Беллмана.

Составим уравнение Беллмана:



$$\begin{aligned}
 S(x(t' - \Delta t), t' - \Delta t) &= \min_{\substack{u(t) \in U_t \\ t' - \Delta t \leq t \leq t_f}} \left\{ g_0(x(t_f), t_f) + \int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0(x, u, t) dt \right\} + \int_{t'}^{t_f} f_0(x, u, t) dt \\
 S(x(t' - \Delta t), t' - \Delta t) &= \min_{\substack{u(t) \in U_t \\ t' - \Delta t \leq t \leq t'}} \left\{ \int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0(x, u, t) dt \right\} + \min_{\substack{u(t) \in U_t \\ t' \leq t \leq t_f}} \left\{ g_0(x(t_f), t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(x, u, t) dt \right\} \\
 S(x(t' - \Delta t), t' - \Delta t) &= \min_{\substack{u(t) \in U_t \\ t' - \Delta t \leq t \leq t'}} \left\{ \int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0(x, u, t) dt + S(x(t'), t') \right\} \quad (8.60)
 \end{aligned}$$

Фазовый вектор $x(t' - \Delta t)$ и соответственно функция Беллмана в левой части соотношения (8.60) не зависит от управления на интервале $[t' - \Delta t, t']$ поэтому в (8.60) можно $S(x(t' - \Delta t), t' - \Delta t)$ внести под знак $\min \{ \cdot \}$ в правой части:

$$0 = \min_{\substack{u(t) \in U_t \\ t' - \Delta t \leq t \leq t'}} \left\{ \int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0(x, u, t) dt + S(x(t'), t') - S(x(t' - \Delta t), t' - \Delta t) \right\}; \quad (8.61)$$

$$\text{При малых } \Delta t \quad \int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0(x, u, t) dt = f_0(x(t'), u(t'), t') \Delta t + o(\Delta t) \quad (8.62)$$

Подставим (8.62) в (8.61), разделим (8.61) на Δt и в пределе $\Delta t \rightarrow 0$, приняв $t' = t$ получим:

$$0 = \min_{u(t) \in U_t} \left\{ f_0(x, u, t) + \frac{S(x(t), t)}{dt} \right\}$$

или

$$0 = \min_{u(t) \in U_t} \left\{ f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} \quad (8.63)$$

Это так называемое уравнение Беллмана.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \text{string} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n} \right) \text{ и т.к. } \frac{\partial S}{\partial t} \text{ не зависит от } u(t)$$

то величину $\frac{\partial S}{\partial t}$ можно вывести из под знака $\min\{.\}$:

$$\min_{u(t) \in U_t} \left\{ f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u, t) \right\} = - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (8.64)$$

Итак, если функция Беллмана дифференцируема, то для того, чтобы допустимая пара $u(t), x(t)$ для задачи (8.56) была ее решением необходимо чтобы она удовлетворяла уравнению Беллмана (8.64) при граничном условии: $S(x(t_f), t_f) = g_0(x(t_f), t_f)$.

Если терминальных ограничений нет и $g_0(x(t_f), t_f) = 0$, то $S(x(t_f), t_f) = 0$.

Если минимум в левой части (8.64) достигается во внутренней точке множества U_t , то уравнение Беллмана (8.64) можно записать:

$$f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u, t) = - \frac{\partial S}{\partial t}; \quad (8.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left\{ f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u, t) \right\} = 0; \quad j = 1, r \quad (8.66)$$

Уравнение (8.66) выражает необходимое условие минимума левой части (8.64) и заменяют операцию минимизации по управлению.

Замечание.

Если

- минимум в левой части (8.64) достигается во внутренней точке множества U_f
- система стационарна (все функции f_i и подынтегральное
- выражение f_0 в функционале не зависят явно от времени) и конечный момент t_f не фиксирован,

то функция Беллмана не зависит явно от времени и $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

Оптимальное управление методом динамического программирования находят в следующем порядке:

1. из уравнений (8.66) определяют управление как функцию $\frac{\partial S}{\partial x}$ т.е. находят $u^* = u^* \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)$;
2. подставляют $u^* \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)$ в (8.65) и решают его при краевом условии (8.59) и находят функцию Беллмана;
3. подставляют найденную функцию Беллмана в $u^*(s)$ и получают оптимальное управление как функцию фазовых координат.

Пример. Найти *opt* управление с обратной связью в задаче:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_1^0; & x_2(0) = x_2^0 \\ \dot{x}_2 = u & x_1(t_f) = 0; & x_2(t_f) = 0 \end{cases} \quad J = \int_0^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min$$

Уравнения состояний записаны в отклонениях; переходный процесс, вызванный отклонениями в начальных условиях, должен закончиться за время t_f ; ограниченный на t_f нет; t_f - любое. Функционал ограничивает как отклонения выходной переменной, так и управление.

В рассматриваемом случае правые части уравнений состояний, подынтегральное выражение в функционале явно от времени не зависят, отсюда функция Беллмана $S(x(t))$ функция только состояний и $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

Выпишем уравнения (8.65, 8.66) для данной задачи:

$$\begin{cases} x_1^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u = 0; \\ 2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \end{cases}$$

Из второго уравнения $u^* = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2}$; подставив его в первое:

$$\begin{aligned} x_1^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 &= 0; \quad \Rightarrow \\ x_1^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 &= 0; \end{aligned} \quad (8.67)$$

Решим это уравнение при граничном условии $S(x(t_f)) = 0$;
(в функционале $g_0(x(t_f), t_f) = 0$;)

Будем искать решение в виде квадратичной формы: $S = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ и граничном условии $S(x(t_f)) = 0$; подставим возможное решение в (8.67).

$$x_1^2 - \frac{1}{4}(2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2)^2 + (2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)x_2 = 0$$

$$(1 - a_{12}^2)x_1^2 + (2a_{11} - 2a_{12}a_{22})x_1x_2 + (2a_{12} - a_{22}^2)x_2^2 = 0$$

Последнее равенство выполняется тождественно, если:

$$\begin{cases} (1 - a_{12}^2) = 0 \\ a_{11} - a_{12}a_{22} = 0 \\ 2a_{12} - a_{22}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{эта система имеет решение} \quad \begin{cases} a_{12} = \pm 1 \\ a_{22} = \pm\sqrt{2} \\ a_{11} = \pm\sqrt{2} \end{cases} \quad (8.68)$$

По определению функция Беллмана $S(x(t')) = \min_{u(t) \in U_t} \int_{t'}^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt$; \Rightarrow

$S(x(t')) > 0$ при всех $t' < t_f$.

Отсюда квадратичная форма с коэффициентами (8.68) может быть функцией Беллмана, если она положительно определена. Этому условию удовлетворяют:

$$a_{12} = 1; \quad a_{22} = \sqrt{2}; \quad a_{11} = \sqrt{2};$$

$$S = \sqrt{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_2^2;$$

Оптимальное управление имеет вид: $u^*(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2} = -(x_1 + \sqrt{2}x_2)$.

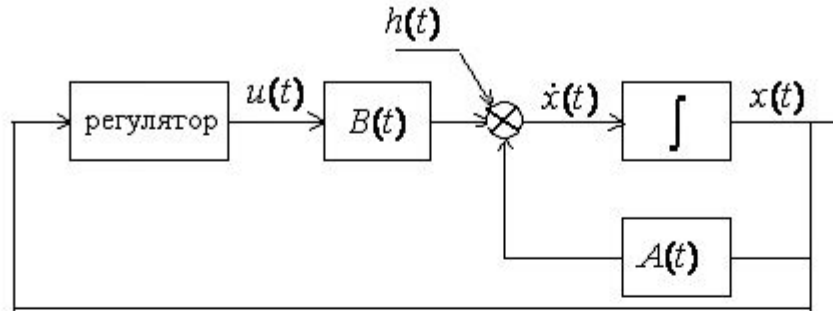
Замечание. Вариационные методы позволяют находить **opt** управление как функцию времени (синтезировать программатор). Метод динамического программирования дает возможность находить управление как функцию фазовых координат системы, т.е. решать задачу синтеза **opt** регулятора с обратной связью.

Недостаток метода динамического программирования в том, что задача оптимального управления сводится к решению трудноразрешимого нелинейного уравнения в частных производных.

Уравнения (8.65, 8.66) получены при условии гладкости (непрерывной дифференцируемости) функции Беллмана, которое часто не выполняется.

8.3.3. Синтез оптимальных линейных систем по интегральному квадратичному критерию.

$$\text{Объект: } \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + h(t) \quad (8.69)$$



$$J = x^T(t_f) \cdot F \cdot x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) \cdot Q(t) \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R(t) \cdot u(t)] dt \quad (8.70)$$

$h(t)$ - известная вектор-функция (внешнее воздействие),

F и $Q(t)$ - неотрицательно определенные матрицы

$$x^T(t_f) \cdot F \cdot x(t_f) \geq 0;$$

т.е.

$$x^T(t) \cdot Q(t) \cdot x(t) \geq 0; \text{ для всех } x(t) \text{ на интервале } [t_0, t_f]$$

$R(t)$ - положительно определенная матрица

$$u^T(t) \cdot R(t) \cdot u(t) > 0; \text{ для всех } u(t) \text{ на интервале } [t_0, t_f],$$

функции $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ - непрерывны,

требуется найти управление с обратной связью, такое, что при произвольном начальном условии $x(t_0) = x^0$, J принимает min значение.

Первое слагаемое в J (8.70) есть квадратичная терминальная ошибка; ее включают в функционал, когда необходимо обеспечить минимальное отклонение состояния системы в момент t_f от желаемого (задания),

$\int_{t_0}^{t_f} x^T(t) \cdot Q(t) \cdot x(t) dt$ - есть интегральная квадратичная ошибка, характеризующая качество регулирования на интервале $[t_0, t_f]$,

$\int_{t_0}^{t_f} u^T(t) \cdot R(t) \cdot u(t) dt$ - взвешенная “энергия” управления; эта компонента

включается в J , чтобы ограничить управление и соответствующие расходы на управление; $R(t)$ определяет веса потерь на управление.

Брайсон рекомендует выбирать матрицы F, Q, R диагональными; при этом элементы матриц можно связать с максимально допустимыми величинами:

$\frac{1}{f_{ii}}$ - равны максимально допустимым $x_i^2(t_f)$,

$\frac{1}{q_{ii}(t)}$ - равны произведению $(t_f - t_0)$ на максимально допустимые $x_i^2(t)$,

$\frac{1}{r_{ii}(t)}$ - равны произведению $(t_f - t_0)$ на максимально допустимые $u_i^2(t)$,

Использование уравнений Белмана (8.65, 8.66) позволило получить решение задачи (8.69, 8.70) в виде:

$$u^* = - (R^{-1} B^T Kx + \frac{1}{2} R^{-1} B^T p) \quad (8.71)$$

Где K - симметричная $(n \times n)$ матрица, p - $(n \times 1)$ -вектор, K и p находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1} B^T K - Q & (8.72) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = KBR^{-1} B^T p - A^T p - 2Kh & (8.73) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{4} p^T BR^{-1} B^T p - p^T h & (8.74) \end{cases}$$

при граничных условиях $K(t_f) = F$; $p(t_f) = 0$; $q(t_f) = 0$;

Уравнение (8.72) называют матричным уравнением Риккати; оно является нелинейным и его не удается аналитически решить даже в случае, когда матрицы A, B, R, Q - постоянны.

Решение (8.71) задачи (8.69, 8.70) синтеза оптимального, линейного, нестационарного регулятора состояния *существует и единственно*. Управляемость объекта не является обязательным условием оптимального управления. Решение существует и единственно даже в том случае, если объект не вполне управляем. Это связано с тем, что процесс управления рассматривается на конечном интервале и вклад неуправляемых координат в значение критерия оптимальности конечен.

Для получения соотношений (8.72, 8.73, 8.74) воспользуемся методом динамического программирования; запишем функцию

$$S(x(t'), t') = \min_{\substack{u(t) \in U_t \\ t' \leq t \leq t_f}} \{ g_0(x(t_f), t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(x, u, t) dt \}, \quad \text{причем: } S(x(t_f), t_f) = g_0(x(t_f), t_f);$$

здесь $x(t')$ – начальное состояние, из которого начинается движение; и соответствующее (8.64) уравнение Беллмана:

$$\min_u \{ f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u, t) \} = - \frac{\partial S}{\partial t}; \quad \Rightarrow$$

по условиям задачи (8.69, 8.70) ограничений на управление u нет;

$$\min_u \{ x^T Q x + u^T R u + \frac{\partial S}{\partial x} (Ax + Bu + h) \} = - \frac{\partial S}{\partial t}; \quad (8.75)$$

$$\text{граничные условия } S(x(t_f), t_f) = x^T(t_f) \cdot F \cdot x(t_f) \quad (8.76)$$

Поскольку ограничений на управление u нет, то квадратный трехчлен достигает минимума в стационарной точке, т.е. там, где: $\frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial u} = 0$.

Это позволяет записать (8.75) следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} x^T Q x + u^T R u + \frac{\partial S}{\partial x} (Ax + Bu + h) &= - \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (8.77)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2u^T R + \frac{\partial S}{\partial x} B &= 0 \end{aligned} \right. \quad (8.78)$$

Из (8.78) находим:
$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \quad (8.79)$$

Подставив (8.79) в (8.77):

$$x^T Qx - \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial x} BR^{-1}B^T \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T + \frac{\partial S}{\partial x} (Ax + h) = -\frac{\partial S}{\partial t}; \quad (8.80)$$

Решение уравнения (8.80) будем искать в виде квадратного трехчлена:

$$S(x(t), t) = x^T(t) K(t) x(t) + p^T(t) x(t) + q(t); \quad (8.81)$$

$x(t)$ - стартовое состояние, которое задается условиями задачи,

$K(t)$ - неотрицательно определена и симметрична при всех $t \in [t_0, t_f]$.

Подставляя
$$\frac{\partial S(x)}{\partial x} = 2x^T K(t) + p^T(t) \quad (8.82)$$

из (8.81) \rightarrow (8.80):

$$\begin{aligned} & x^T (Q - KBR^{-1}B^T K + KA + A^T K)x - \\ & - x^T (KBR^{-1}B^T p - A^T p - 2Kh) - \frac{1}{4} p^T BR^{-1}B^T p + p^T h = \\ & = -(x^T \dot{K}x + x^T \dot{p} + \dot{q}); \end{aligned}$$

Приравнявая выражения при одинаковых степенях x в правой и левой частях:

$$\begin{cases} Q - KBR^{-1}B^T K + KA + A^T K = -\dot{K} \\ KBR^{-1}B^T p - A^T p - 2Kh = \dot{p} \\ \frac{1}{4} p^T BR^{-1}B^T p - p^T h = \dot{q} \end{cases} \quad (8.83)$$

из подстановки (8.82) \rightarrow (8.79):

$$u^* = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \left(2x^T K + p^T \right)^T = -(R^{-1}B^T Kx + \frac{1}{2}R^{-1}B^T p) \quad (8.84)$$

Граничные условия для уравнений (8.83);
из подстановки (8.81) \rightarrow (8.76):

$$\begin{aligned} K(t_f) &= F; \\ x_f^T K(t_f) x_f + p^T(t_f) x_f + q(t_f) &= x_f^T F x_f; \quad \Rightarrow \quad p^T(t_f) = 0; \\ q(t_f) &= 0; \end{aligned}$$

Уравнения (8.83) решают в порядке их записи. Первое из уравнений (8.83)-нелинейное матричное дифференциальное уравнение аналитически не решается, его решают численно в обратном времени от t_f к t_0 заменой $\tau = t_f - t$, либо моделированием в прямом или обратном времени;

первое из уравнений (8.83) равносильно системе $\frac{n(n+1)}{2}$ скалярных, нелинейных, дифференциальных уравнений;

переход к обратному времени $\tau = t_f - t$ приводит к замене всех матриц, входящих в (8.83) на матрицы, зависящие от $(t_f - t)$:

решив первое из уравнений (8.83), решают второе – векторное линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка и, наконец, последнее – скалярное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

8.3.3.1. Оптимальные стационарные линейные системы.

Рассмотрим частный случай задачи (8.69, 8.70), в которой:
матрицы A, B, Q, R - постоянны;

внешнее возмущение равно нулю $h(t) = 0$;

время не фиксировано $t_f = \infty$;

финальные координаты фиксированы $x(t_f) = 0$;

система : $\dot{x} = Ax + Bu$; (8.85)

критерий : $J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \rightarrow \min$;

требуется найти управление с обратной связью, при котором замкнутая система *устойчива* и критерий оптимальности принимает минимальное значение.

Это задача синтеза оптимального стационарного линейного регулятора состояния.

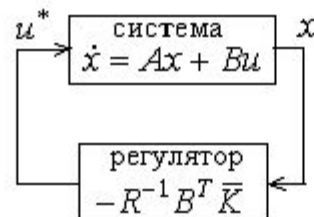
Решение этой задачи – решение уравнения Белмана при выборе функции Белмана равной $S(x) = x^T \bar{K}x$, (8.86)

где \bar{K} - постоянная положительно определенная матрица;

уравнение Риккати (8.72) принимает вид:

$$-\bar{K}A - A^T \bar{K} + \bar{K}BR^{-1}B^T \bar{K} - Q = 0, \quad (8.87)$$

а оптимальное управление в соответствии с (8.71) есть: $u^* = -R^{-1}B^T \bar{K}x$. (8.88)



Покажем, используя Вторую методу Ляпунова, что выбор управления (8.88) обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Подставив (8.88) в (8.85) получим:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T\bar{K})x \quad (8.89)$$

Функция Беллмана (8.86) $S(x) = x^T\bar{K}x$ положительно определена и может быть функцией Ляпунова для замкнутой системы (8.89).

Вычислим производную Функции Ляпунова по времени:

$$\frac{dS}{dt} = \dot{x}^T\bar{K}x + x^T\bar{K}\dot{x} = x^T(A^T\bar{K} + \bar{K}A - 2\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K})x;$$

с учетом (8.87):

$$\frac{dS}{dt} = -x^T(\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K} + Q)x$$

Матрица $\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K}$ неотрицательно определена, т.к. R и соответственно R^{-1} положительно определены, то $z^TR^{-1}z \geq 0$ при произвольных z .

Если положить $z = B^T\bar{K}x$, то $x^T\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K}x \geq 0$.

Матрица Q положительно определена по условию,

следовательно $\frac{dS}{dt} = -x^T(\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K} + Q)x$ отрицательно определена и

достаточные условия асимптотической устойчивости замкнутой системы доказаны.