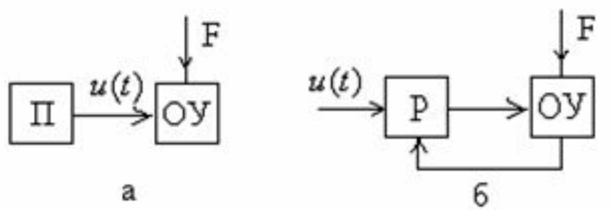
8 . Методы теории оптимальных систем управления

Основные понятия и определения.

В теории оптимальных систем управления рассматриваются задачи синтеза систем с изменяемой структурой.



Синтез оптимальной системы для заданного объекта заключается в подборе **программатора** **или** **регулятора,** которые наилучшим образом решают поставленную задачу управления.

Программатор (П) на основе априорной информации об объекте и возмущениях F формирует входное воздействие $u(t)$, обеспечивающее наилучший из возможных переход из начального состояния в заданное. Жесткое программное управление называют

оптимальным по режиму управления.

Регулятор (Р) на основе информации о текущем состоянии объекта формирует управление, обеспечивающее наилучшее выполнение задания.

Оптимальные системы с регулятором в цепи обратной связи называют

оптимальными по переходному процессу.

8.1 Общая постановка задачи оптимального управления.

При решении задач оптимального управления задают:

1. уравнения объекта,
2. ограничения на управление и фазовый вектор,
3. краевые условия,
4. критерий оптимальности.

1. Уравнения объекта: $\dot{x}(t) = f(x,u,t)$;

x - n - мерный вектор состояния (фазовый вектор),
u - r - мерный вектор управления ,

2. на управление и вектор состояния могут быть наложены ограничения:

$u(t) \in U_t^{(r)}$; $x(t) \in X_t^{(n)}$; $U_t^{(r)}$, $X_t^{(n)}$; - зависящие от времени, допустимые множества значений векторов входного воздействия и состояния,

3. Краевые (граничные) условия на вектор состояния в начальный t_0 и конечный t_f моменты времени: $x(t_0) \in X_0$; $x(t_f) \in X_f$,

4. Критерий оптимальности: $J = J(u(t),x(t))$; J - функционал,

Задача оптимального управления заключается в следующем: при заданном уравнении объекта управления, ограничениях и краевых условиях найти такое

программное управление $u^*(t)$ или

управление с обратной связью $u^*(x,t)$ и фазовую траекторию $x^*(t)$,

при которых критерий J принимает **min** значение.

Управление $u^*(t)$ и траекторию $x^*(t)$ называют оптимальными.

Пример 1. Управление движением летательного аппарата.

Вывод ЛА из $x(t_0)$ в заданную точку пространства $x(t_f)$ за **min** время;

Критерий оптимальности: $J = (t_f - t_0); \to \min$;

$x_{верт} > 0$; ограничения на фазовый вектор (вертикальная составляющая вектора координат ЛА должна быть положительна).

Можно ставить и задачу перевода ЛА на максимальную дальность при ограниченном запасе топлива.

Пример 2. Управление двигателем постоянного тока.

Линеаризованное уравнение движения вала двигателя постоянного тока: $I\ddot{\beta} = i_Я k_Ф - M_C$;

$I\ddot{\beta}$ - момент инерции ротора двигателя и всех нагрузок, присоединенных к валу,

$i_Я k_Ф$ - момент вращения на валу двигателя, M_C - момент сопротивления,

$i_Я$ - ток якоря двигателя, β - угол поворота вала.

Обозначим: $x_1 = \beta; x_2 = \dot{\beta}$: - компоненты вектора состояния.

$u = i_Я$ - входное воздействие, $u_C = \dfrac{M_C}{I}$ - внешнее возмущение, $b = \dfrac{k_Ф}{I}$ тогда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = bu - u_C; \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{x} = Ax + Bu + \tilde{q}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}; \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_C \end{pmatrix};$$

Задача поворота вала на заданный угол без остановки за **min** *время.*

Ограничения : $|u| \le u_{\max}$; сила тока в якорной цепи должна быть ограничена,

Краевые условия:
$$x_1(t_0) = x_1^0; \quad x_1(t_f) = x_1^f;$$
$$x_2(t_0) = x_2^0; \quad x_2(t_f) \text{ - никак не ограничивается.}$$

Критерий оптимальности: $J = (t_f - t_0); \to \min$.

Задача поворота вала на заданный угол без остановки за время T

при **min** *расходе энергии:* $J = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} i_Я^2\,dt \;\to\; \min;$.

8.1.1. Классификация задач оптимального управления.

1. **Классификация по виду ограничений:**

а) ограничения равенства $\varphi_k(u,x,t)=0; \quad k=1,K;$ 8.1

б) ограничения неравенства $\varphi_k(u,x,t)\le 0; \quad k=1,K;$ 8.2

в) изопериметрические ограничения $\int_{t_0}^{t_f} f_{n+j}(x,u,t)dt \le b_j; \quad j=1,J;$ 8.3

Замечание 1. Введением дополнительных уравнений от изопериметрических ограничений можно избавиться, введя дополнительные состояния x_{n+j} в описание объекта и дополнив уравнения состояния уравнениями:

$$\dot{x}_{n+j}(t)=f_{n+j}(x,u,t); \qquad x_{n+j}(t_0)=0; \quad x_{n+j}(t_f)\le b_j; \qquad j=1,J;$$

Замечание 2. Ограничения неравенства можно заменить равенствами, если расширить вектор управления новыми компонентами u_{r+k} по числу неравенств и записать:

$$\varphi_k(u,x,t)+u_{r+k}^2=0; \quad k=1,K;$$

2. **Классификация по виду краевых условий:**

а) с фиксированными концами; каждое из множеств X_0, X_f, содержит по одной точке,

б) с подвижным правым концом (в множестве X_f более одной точки),

в) с свободным правым концом (без ограничений на правом конце).

3. **Классификация по времени начала и конца процесса управления:**

а) с фиксированным временем (t_0 и t_f - фиксированы),

б) с нефиксированным временем (одно из t_0 , t_f - не фиксировано).

4 . Классификация по критерию оптимальности:

а) задача Больца: $J = g_0(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\, dt; \rightarrow \min;$ 8.4

здесь: g_0, f_0 - скалярные функции векторного аргумента,

g_0 - имеет смысл штрафа за неправильно выполненное задание на управление,

f_0 - неотрицательно определенная функция
задает расходы (энергетические , финансовые) на выполнение управления.

б) задача Лагранжа: $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\, dt; \rightarrow \min;$ 8.5

в) задача Майера: $J = g_0(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f); \rightarrow \min;$ 8.6

если $J = g_0(x(t_0), x(t_f));$ - задача терминального управления,

если $J = (t_f - t_0);$ - задача максимального быстродействия.

8.2 Метод классического вариационного исчисления при построении оптимального программатора.

8.2.1 Задача Лагранжа с фиксированным временем и закрепленными концами.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x,u,t); \quad i = 1,n;$ уравнения состояний объекта,
2. $\varphi_k(x,u,t) = 0; \quad k = 1,l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,
3. $x(t_0) = x^0; \; x(t_f) = x^f;$ краевые условия, x - n - мерный вектор, 8.7
4. $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\,dt; \;\to \min;$ задача Лагранжа,

Здесь: $f_i(x,u,t) \quad i = 0,n;$ непрерывная, дифференцируемая по всем аргументам функция,

$u(t)$ - кусочно-непрерывная на интервале $[t_0,t_f]$ функция (непрерывная за исключением конечного числа разрывов первого рода).

$x(t)$ - кусочно-гладкая на интервале $[t_0,t_f]$ функция (сама непрерывна , а ее производная кусочно-непрерывна).

Управление и фазовый вектор, удовлетворяющие перечисленным ограничениям, называют допустимыми.

Смысл задачи в том, чтобы подобрать входное управление, переводящее систему из состояния $x(t_0) = x^0;$ в состояние $x(t_f) = x^f$ за фиксированное время $t_f - t_0$ с минимальными затратами (например, энергии, финансовых ресурсов и т.п.).

При решении этой задачи воспользуемся классическим вариационным исчислением.

Замечание 1 . *О вариационной задаче Лагранжа без ограничений; уравнения Эйлера.*

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(y,\dot{y},t)dt \quad \to extr \qquad 8.8$$

$$y(t_0) = y^0, \quad y(t_f) = y^f;$$

$y \in C^1[t_0,t_f]$ - класс непрерывных, дифференцируемых на интервале $[t_0,t_f]$ скалярных функций.

Если существует функция $y^*(t)$, доставляющая экстремум функционалу (8.8) , то согласно основной лемме вариационного исчисления $y^*(t)$ должна быть решением уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_0(y,\dot{y},t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} f_0(y,\dot{y},t) = 0 \Big|_{y = y^*}; \qquad 8.9$$

$y^*(t)$ при этом называют экстремалью или стационарной точкой.

Если в (8.8) $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$ векторная функция, то экстремаль $y^*(t)$ должна быть решением системы уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} f_0(y,\dot{y},t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j} f_0(y,\dot{y},t) = 0 \Big|_{y = y^*}; \qquad j = 1,p; \qquad 8.10$$

при краевых условиях $y(t_0) = y^0, \quad y(t_f) = y^f;$

(По определению производная скалярной функции $f(z)$ векторного аргумента $z = (z_1, z_2, \ldots, z_p)^T$ по z есть вектор строка $f'_z = (f'_{z_1}, f'_{z_2} \ldots, f'_{z_p})$)

Замечание 2 . *О вариационной задаче с ограничениями; уравнения Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi_i(z,\dot{z},t)=0; \quad i=\overline{1,p}; \qquad \varphi_k(z,t)=0; \quad k=\overline{1,l};$$ ограничения,

$$z(t_0)=z^0, \quad z(t_f)=z^f;$$ краевые условия,

$$J(z)=\int_{t_0}^{t_f}\Phi_0(z,\dot{z},t)dt \quad \to extr; \qquad 8.11$$

z - векторная функция времени размерности s;

Φ_i, φ_k - дифференцируемые по всем аргументам функции.

Составим функцию: $$L(z,\dot{z},\psi,\lambda,t)=\sum_{i=1}^{p}\psi_i\Phi_i+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\varphi_k+\psi_0\Phi_0; \qquad 8.12$$

ψ_i - функции времени; $i=\overline{1,p}$; ψ_0 и λ_k - константы; $k=\overline{1,l}$;

$L(z,\dot{z},\psi,\lambda,t)$ - функция Лагранжа, а ψ_i и λ_k - множители Лагранжа.

Рассмотрим задачу отыскания экстремали функционала:

$$\tilde{J}(z)=\int_{t_0}^{t_f}L(z,\dot{z},\psi,\lambda,t)\,dt \quad \to extr; \qquad 8.13$$

при краевых условиях: $z(t_0)=z^0$, $z(t_f)=z^f$;

В преобразованной задаче (8.13) в обозначениях (8.8) подынтегральная функция $f_0(y,\dot{y},t)$

имеет вид: $$L(z,\dot{z},\psi,\lambda,t)=\sum_{i=1}^{p}\psi_i\Phi_i+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\varphi_k+\psi_0\Phi_0;$$

аргументами подынтегральной функции являются:

время t и векторы $y=(z,\psi,\lambda)^T$, $\dot{y}=(\dot{z},0,0)^T$ размерности $s+p+l$

Экстремаль задачи $y^*(t)$ должна быть решением системы $s+p+l$ уравнений Эйлера (8.10):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_i} L(z,\dot z,\psi,\lambda,t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot z_i} L(z,\dot z,\psi,\lambda,t) = 0; & i=1,s; \\ \frac{\partial}{\partial \psi_j} L(z,\dot z,\psi,\lambda,t) = 0; & j=1,p; \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} L(z,\dot z,\psi,\lambda,t) = 0; & k=1,l; \end{cases} \qquad 8.14$$

при краевых условиях $z(t_0)=z^0, \ \ z(t_f)=z^f$;.

В системе (8.14) уравнения:

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial \psi_j} L(z,\dot z,\psi,\lambda,t) = 0; & j=1,p; \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} L(z,\dot z,\psi,\lambda,t) = 0; & k=1,l; \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \Phi_i(z,\dot z,t) = 0; & i=1,p; \\ \varphi_k(z,t) = 0; & k=1,l; \end{matrix}$$

совпадают с равенствами ограничениями в (8.11).

В соответствии с **леммой Лагранжа** экстремаль $z^*(t)$ функционала (8.11) при наличии ограничений совпадает с экстремалью функционала (8.13) задачи безусловной оптимизации типа (8.8, 8.10) и должна быть решением соответствующих уравнений Эйлера (8.10, 8.14) .

Итак, экстремаль $z^*(t)$ функционала (8.11) должна удовлетворять уравнениям Эйлера- Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} L(z,\dot z,\psi,\lambda,t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot z_i} L(z,\dot z,\psi,\lambda,t) = 0; \quad i=1,s; \qquad 8.15$$

и равенствам-ограничениям:

$\Phi_j(z,\dot z,t) = 0; \quad j=1,p;$

$\varphi_k(z,t) = 0; \quad k=1,l;$

при краевых условиях: $z(t_0)=z^0, \ \ z(t_f)=z^f$; z- вектор размерности s .

Вернемся к задаче (8.7) оптимального управления объектом.

1. $f_i(x,u,t) - \dot{x}_i(t) = 0; \quad i = 1,n;$ уравнения состояний объекта,
2. $\varphi_k(x,u,t) = 0; \quad k = 1,l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,
3. $x(t_0) = x^0; \ x(t_f) = x^f;$ краевые условия, x - n-мерный вектор,
4. $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\, dt; \ \to \min;$ задача Лагранжа,

Это задача отыскания экстремали функционала (4) при наличии ограничений (1,2).

Составим функцию Лагранжа: $L = \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k + \psi_0 f_0;$

Роль аргумента z играет вектор $(x,u)^T$ размерности $n+r$.

В соответствии с (8.15) уравнения Эйлера-Лагранжа есть:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i} L - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}_i} L = 0; \quad i = 1,n; \\ \dfrac{\partial}{\partial u_j} L = 0; \quad j = 1,r; \end{cases} \qquad 8.16$$

ограничения:

$f_i(x,u,t) - \dot{x}_i(t) = 0; \quad i = 1,n;$

$\varphi_k(x,u,t) = 0; \qquad k = 1,l;$

краевые условия:

$x(t_0) = x^0; \ x(t_f) = x^f;$

Решение уравнений Эйлера-Лагранжа совместно с ограничениями и краевыми условиями дает экстремаль $(x^*,u^*)^T$.

уравнения Эйлера-Лагранжа (8.16) записывают также, используя функцию:

$$H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k; \quad \text{- гамильтониан,} \qquad 8.17$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k + \psi_0 f_0; \qquad \Rightarrow \qquad L = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i; \qquad 8.18$$

В обозначениях (8.17, 8.18) уравнения Эйлера-Лагранжа (8.16) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1, n; \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0; \qquad j = 1, r; \end{cases} \qquad 8.19$$

Второе из уравнений (8.19) есть условие стационарности (точка, в которой функционал имеет экстремум, называют стационарной). Гамильтониан, при каждом фиксированном t, как функция от управления, на экстремали удовлетворяет необходимому условию экстремума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; \qquad j = 1, r;.$$

Правило множителей Лагранжа.

Если допустимая пара $u^*(t), x^*(t)$ является решением задачи оптимального управления (8.7), то необходимо, чтобы: существовали не равные одновременно нулю множители Лагранжа, ψ_i и λ_k, а пара $u^*(t), x^*(t)$ удовлетворяла:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1, n; \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0; \qquad j = 1, r; \end{cases} \qquad \text{- уравнениям Эйлера-Лагранжа}$$

$\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ - уравнениям объекта,

$\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$ - ограничениям на управление и фазовую траекторию,

$x(t_0) = x^0; \;\; x(t_f) = x^f;$ - краевым условиям.

Итак, чтобы найти оптимальное управление и оптимальную траекторию необходимо совместно решить уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1,n; \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0; \quad j = 1,r; \end{cases}$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x,u,t); \quad i = 1,n;$$

$$\varphi_k(x,u,t) = 0; \quad k = 1,l;$$

при краевых условиях: $x_i(t_0) = x_i^0; \; x_i(t_f) = x_i^f; \quad i = 1,n;$

Замечание 3. уравнения Эйлера-Лагранжа получены в предположении, что $u(t)$ - непрерывная, а $x(t)$ - гладкая на интервале $[t_0, t_f]$ функции.

Правило Лагранжа остается справедливым и в том случае, когда $u(t)$ - кусочно-непрерывная, а $x(t)$ - кусочно-гладкая на интервале $[t_0, t_f]$ функция при этом в точках разрыва должны дополнительно выполняться условия Вейерштрасса-Эрдмана:

$$\psi^- = \psi^+; \quad H^- = H^+;.$$

Множители Лагранжа определяются с точностью до постоянного сомножителя, поэтому один из множителей Лагранжа можно назначать произвольно; принято выбирать $\psi_0 = -1;$

Для определения $2n + r + l$ неизвестных:
$x_i;\ i = 1,n; \quad \psi_i;\ i = 1,n; \quad u_j;\ j = 1,r; \quad \lambda_k;\ k = 1,l;$ имеется столько же уравнений, но среди них $2n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка, при решении которых появляется $2n$ постоянных интегрирования. Эти неизвестные находят из краевых условий.

Решение исходной вариационной задачи свелось к решению краевой задачи Коши. Уравнения Эйлера-Лагранжа дают необходимые условия экстремали; т.е. всякая экстремаль должна удовлетворять уравнениям Эйлера-Лагранжа, но не всякое решение есть экстремаль. Однако, если решение единственно, оно и есть экстремаль.

Пример 1. Задача поворота вала электродвигателя на заданный угол с остановкой при минимальном расходе энергии.

Начало и конец движения; $t_0 = 0$; $t_f = 1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases}$$ уравнения движения электродвигателя;

Здесь для простоты полагаем, что внешней нагрузки на вал нет – $u_C = 0$; , а $b = 1$;

$x_1(0) = x_2(0) = 0$;
$x_1(1) = 1$; $x_2(1) = 0$; краевые условия;

Выбрать управление u так, чтобы $J = \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min$;

Задача Лагранжа с фиксированным временем и закрепленными концами $n = 2$; $r = 1$; $l = 0$; .

Гамильтониан: $H = \sum_{i=0}^{2} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k$; ограничений нет $l = 0$; $\psi_0 = -1$;

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = C_1; \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2; \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0; \quad \Rightarrow \quad -2u + \psi_2 = 0; \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{\psi_2}{2} = \dfrac{-C_1 t + C_2}{2}; \end{cases}$$

Подставляя u в уравнение объекта и интегрируя получим:

$$\dot{x}_2 = \frac{-C_1 t + C_2}{2}; \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_2 t}{2} + C_3; \quad \Rightarrow x_1 = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_2 t^2}{4} + C_3 t + C_4;$$

краевые условия дают:

$x_1(0)=0; \ \Rightarrow \ C_4=0;$

$x_2(0)=0; \ \Rightarrow \ C_3=0;$

$$x_2(1)=0; \ \Rightarrow \ -\frac{C_1}{4}+\frac{C_2}{2}=0; \quad \Rightarrow \ C_2=\frac{C_1}{2};$$

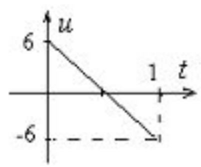
$$x_1(1)=1; \quad \Rightarrow \quad 1=-2\frac{C_2}{12}+\frac{C_2}{4}; \quad \Rightarrow C_2=12; \ C_1=24;$$

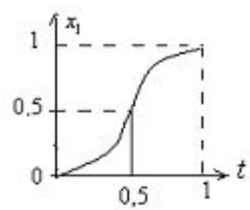
Итак, оптимальные управления и фазовые траектории имеют вид:

$u^*(t)=-12t+6;$

$x_1^*(t)=-2t^3+3t^2;$

$x_2^*(t)=-6t^2+6t \ ;$





8.2.2 Задача построения оптимального программатора с переменным временем управления и подвижными концами.

Замечание. Задача Больца в вариационном исчислении о нахождении экстремума функционала: $J = g_0[y(t_0), y(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(y, \dot{y}, t)\, dt; \to extr;$ 8.20

где g_0, f_0 - непрерывные и дифференцируемые по всем аргументам функции. Если существует экстремаль $y^*(t)$ функционала (8.20), то помимо уравнений Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial y_j} f_0(y, \dot{y}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_j} f_0(y, \dot{y}, t) = 0 \Big|_{y = y^*}; \quad j = 1, p;$$

она должна удовлетворять условиям трансверсальности:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j}\Big|_{t = t_0} = \frac{\partial g_0}{\partial y_j(t_0)}; \qquad \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j}\Big|_{t = t_f} = -\frac{\partial g_0}{\partial y_j(t_f)}; \; j = 1, p; \qquad 8.21$$

Итак, решение $y^*(t)$ вариационной задачи с подвижными концами должно удовлетворять уравнениям Эйлера и условиям трансверсальности (8.21) вместо краевых условий.

Задача с фиксированным временем и подвижными концами.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ уравнения состояний объекта,
2. $\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,
3. $g_j[x(t_0), x(t_f)] = 0; \quad j = 1, q; \quad q \le 2n;$ 8.22
4. $J = g_0[x(t_0), x(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)\, dt; \to \min;$ задача Больца,

Ограничения в (8.22) предполагаются независимыми, функции g_j - непрерывные и дифференцируемые по всем аргументам. Используя прием Лагранжа преобразуем эту задачу в простейшую задачу Больца:

$$\tilde{J} = G[x(t_0), x(t_f), \nu] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, u, \psi, \lambda, t)\, dt; \ \to \min; \qquad 8.23$$

$$G = \sum_{i=0}^{q} \nu_i \, g_i;$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k + \psi_0 f_0 = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i;$$

ψ_0, ν_0 - могут выбираться произвольно; обычно выбирают: $\psi_0 = \nu_0 = -1;$

Экстремаль, если она существует, должна быть решением уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1, n; \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0; \qquad j = 1, r; \end{cases}$$

$\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \quad i = 1, n;$ уравнений состояний обьекта,

$\varphi_k(x, u, t) = 0; \quad k = 1, l;$ ограничений на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,

Постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений находят из условий трансверсальности

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \qquad \psi_i(t_f) = +\frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}; \ i = 1, n; \qquad 8.24$$

Если часть граничных значений фиксирована, условия трансверсальности для этих координат не выписываются, а граничные условия используются для определения констант интегрирования также как в задаче с фиксированными концами.

Пример 2. Перемещение вала электродвигателя из неподвижного исходного положения в заданное, без остановки вала, за заданное время, с минимальным расходом энергии.

Начало $t_0 = 0$; и конец $t_f = 1$ движения;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases}$$ уравнения движения электродвигателя;

$x_1(0) = x_2(0) = 0;\quad x_1(1) = 1;\quad x_2(1)$ - не определено; краевые условия;

Выбрать управление u так, чтобы $J = \int_0^1 u^2 dt \to \min;\quad g_0 = 0;$

Гамильтониан: $H = \sum_{i=0}^{2} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k;$ ограничений нет $l = 0;\quad \psi_0 = -1;$

$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0; & \Rightarrow \quad \psi_1 = C_1; \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; & \Rightarrow \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2; \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0; & \Rightarrow \quad -2u + \psi_2 = 0; \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{\psi_2}{2} = \dfrac{-C_1 t + C_2}{2}; \end{cases}$$

Три из 4–х граничных условий фиксированы, одно свободно.

$G = 0$; т.к. ни в функционале ($g_0 = 0;$), ни в списке ограничений нет ограничений на положение концов траекторий. Одно состояние при $t = 1$ не фиксировано (свободно), отсюда условие трансверсальности

$$\psi_2(1) = \frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = 0; \quad \Rightarrow \quad \psi_2(1) = 0; \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2; \Rightarrow \quad \psi_2 = C_1(1-t); \quad \Rightarrow \quad u = {C_1(1-t)}/{2};$$

Интегрируя уравнения объекта:

$$\dot{x}_2 = C_1(1-t)/2; \qquad x_2 = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_1 t}{2} + C_3; \quad x_2(0) = 0; \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0;$$

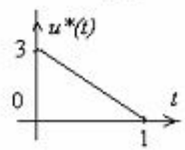
$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_1 t^2}{4} + C_4;$$

$$x_1(0) = 0; \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0; \qquad x_1(1) = 1; \quad \Rightarrow \quad C_1 = 6;$$

$$u^*(t) = 3(1-t);$$

Итак: $x_1^*(t) = -1/2\, t^3 + 3/2\, t^2;$

$$x_2^*(t) = -3/2\, t^2 + 3t \ ;$$



Задача с нефиксированным временем и подвижными концами.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x,u,t); \quad i = 1,n;$ уравнения состояний объекта,
2. $\varphi_k(x,u,t) = 0; \quad k = 1,l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,
3. $g_j[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] = 0; \quad j = 1,q; \quad q \le 2n;$ 8.25
4. $J = g_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\, dt; \ \to \min;$ задача Больца,

Необходимые условия экстремума.

Если допустимая пара $(x^*, u^*)^T$ при $t \in \left[t_0^*, t_f^*\right]$ есть решение задачи (8.25), то пара $(x^*, u^*)^T$ будет и решением задачи (8.22) при фиксированных значениях времени: $t_0 = t_0^*;\ t_f = t_f^*;.$

Поэтому решение задачи (8.25) должно удовлетворять

- уравнениям Эйлера-Лагранжа,
- уравнениям объекта,
- ограничениям на управление и фазовую траекторию,
- условиям трансверсальности и (или) краевым условиям
- и соотношениям, обусловленным вариациями времени начала и конца движения

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1,n; \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0; \qquad j = 1,r; \end{cases}$$ уравнения Эйлера-Лагранжа,

$\dot{x}_i(t) = f_i(x,u,t); \quad i = 1,n;$ уравнения состояний объекта,

$\varphi_k(x,u,t) = 0; \quad k = 1,l;$ ограничения на управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$,

Постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений находят из условий трансверсальности и (или) краевых условий

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \qquad \psi_i(t_f) = +\frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)};$$ условия трансверсальности и (или) краевые условия

$$H\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}; \quad H\Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f};$$ соотношения, обусловленные вариациями времени начала и конца движения 8.26

Правило множителей Лагранжа.

Если допустимая пара $u^*(t), x^*(t)$ является решением задачи оптимального управления (8.25), то необходимо, чтобы:

существовали не равные одновременно нулю множители Лагранжа,
эта пара удовлетворяла уравнениям Эйлера-Лагранжа (8.19),
уравнениям объекта и ограничениям на управление и фазовую траекторию,
условиям трансверсальности и (или) краевым условиям,
дополнительным условиям (8.26).

Итак, чтобы найти оптимальное управление и оптимальную траекторию необходимо совместно решить уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1,n; \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0; \quad j = 1,r; \end{cases}$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x,u,t); \quad i = 1,n;$$

$$\varphi_k(x,u,t) = 0; \quad k = 1,l;$$

при выполнении условий трансверсальности: $\psi_i(t_0) = -\dfrac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}$; $\psi_i(t_f) = +\dfrac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}$; и (или)

краевых условиях: $x_i(t_0) = x_i^0$; $x_i(t_f) = x_i^f$; общее число условий - $2n$.

и дополнительных условий: $H\Big|_{t=t_0} = \dfrac{\partial G}{\partial t_0}$; $H\Big|_{t=t_f} = -\dfrac{\partial G}{\partial t_f}$;

В точках разрыва управлений или производных фазовых траекторий, если такие есть, должны дополнительно выполняться условия Вейерштраса - Эрдмана: $\psi^- = \psi^+$; $H^- = H^+$;

Пример3. Поворот вала электродвигателя из неподвижного исходного положения в заданное, с остановкой вала, за минимальное время и заданным расходом энергии.

Начало $t_0 = 0$; и конец t_f движения;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases} \quad \text{уравнения движения электродвигателя;} \qquad (*)$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$; $x_1(t_f) = d$; $x_2(t_f) = 0$; краевые условия;

$\int_0^{t_f} u^2 dt = b$; изопериметрическое ограничение. (**)

Выбрать управление u так, чтобы $J = t_f - t_0$; $\to$ min;

Введем новую координату x_3 в описание объекта и преобразуем ограничение (**) в еще одну строку $\dot{x}_3 = u^2$; уравнений (*) при граничных условиях $x_3(0) = 0$; $x_3(t_f) = b$;

уравнения объекта $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \\ \dot{x}_3 = u^2 \end{cases}$ (***)

Функция $G = -t_f$; $\nu_0 = -1$; Условие (8.26) есть: $H\big|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f} = 1$; 8.27

Гамильтониан: $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2$;

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = C_1;$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2;$$

$$\dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0; \quad \Rightarrow \quad \psi_3 = C_3;$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0; \quad \Rightarrow \quad 2u\psi_3 + \psi_2 = 0; \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{\psi_2}{2\psi_3} = \frac{C_1 t - C_2}{2C_3};$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

Введем новые постоянные $C_4 = \frac{C_1}{2C_3}$; $C_5 = \frac{C_2}{2C_3}$ и запишем: $u = C_4 t - C_5$;

Интегрируя уравнения объекта (***) :

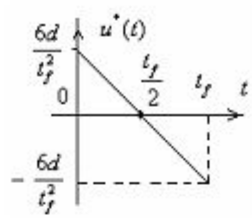
$$\dot{x}_2 = u; \quad x_2(0) = 0; \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{C_4 t^2}{2} - C_5 t; \quad x_2(t_f) = 0; \quad \Rightarrow \quad C_4 = {}^{2C_5}\!/_{t_f};$$

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad x_1(0) = 0; \Rightarrow \quad x_1 = \frac{C_4 t^3}{6} - \frac{C_5 t^2}{2}; \quad x_1(t_f) = d; \quad \Rightarrow \quad C_5 = -\frac{6d}{t_f^2}; \quad C_4 = -\frac{12d}{t_f^3};$$

$$\dot{x}_3 = u^2 = (C_4 t - C_5)^2; \quad x_3(0) = 0; \quad \Rightarrow \quad x_3 = {}^{C_4^2 t^3}\!/_3 - C_4 C_5 t^2 + C_5^2 t;$$

$$x_3(t_f) = b; \quad \Rightarrow \quad t_f = \sqrt[3]{{}^{12d^2}\!/_b};$$

Итак: $u^*(t) = \frac{12d}{t_f^3}\left(\frac{t_f}{2} - t\right)$;



В этой задаче мы не использовали условие (8.27). Оно бы потребовалось при необходимости вычисления функций ψ_i; константы C_1, C_2, C_3 находят из $C_4 = \dfrac{C_1}{2C_3}$; $C_5 = \dfrac{C_2}{2C_3}$; и условия $H\Big|_{t=t_f} = -\dfrac{\partial G}{\partial t_f} = 1$;

8.2.2 Принцип максимума Понтрягина.

Часто на управление накладываются ограничения в виде неравенств; часто оптимальное управление в таких задачах имеет разрывы; классический метод вариационного исчисления при построении оптимального управления не позволяет найти местоположение разрывов в управлении. Опыт показывает, что такие задачи удобно решать, используя принцип максимума Понтрягина (1953г.).

Задача Лагранжа с фиксированным временем и закрепленными концами при отсутствии ограничений на фазовую траекторию.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x,u,t); \quad i = 1,n;$ уравнения состояний объекта,

2. $u \in U^r;$ *ограничения только на управление* $u(t)$,

на траекторию $x(t)$ *- ограничений нет,*

3. $x(t_0) = x^0; \; x(t_f) = x^f;$ краевые условия, x - n - мерный вектор, 8.28

4. $J = \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\,dt; \; \rightarrow \min;$ задача Лагранжа,

Здесь: $f_i(x,u,t) \quad i = 0,n;$ непрерывная, дифференцируемая по x и t функция,

дифференцируемость $f_i(x,u,t)$ *по* u *не требуется.*

$u(t)$ - кусочно-непрерывная на интервале $[t_0, t_f]$ функция (непрерывная за исключением конечного числа разрывов первого рода).

$x(t)$ - кусочно-гладкая на интервале $[t_0, t_f]$ функция (сама непрерывна, а ее производная кусочно-непрерывна).

Составим функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \psi_0 f_0 = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i; \qquad 8.29$$

Гамильтониан вида: $H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i$; называют функцией Понтрягина.

Задача минимизации функционала (8.28) при наличии ограничений сводится к задаче отыскания максимума функционала:

$$\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},u,\psi,t)\,dt; \ \to \max_{u \in U^r}; \qquad 8.30$$

при $x_i(t_0) = x_i^0$; $x_i(t_f) = x_i^f$; $\quad i = 1,n$; краевые условия.

Функционал $\tilde{J} \to \max$, хотя в (8.28) $J \to \min$ это в силу того, что в функции Лагранжа (8.29) назначено: $\psi_0 = -1$;

Пусть далее $u^*(t), x^*(t), \psi^*(t)$ - решение задачи (8.30)., тогда

при известных u^* можно трансформировать ее в задачу

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},u^*,\psi,t)\,dt; \ \to \max_{x,\psi};$$ при любом фиксированном u^*, 8.31

либо при известных x^*, ψ^* в задачу

$$\tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f} L(x^*,\dot{x}^*,u,\psi^*,t)\,dt; \ \to \max_{u \in U^r};$$ при любых фиксированных x^*, ψ^*, 8.32

при тех же (8.30) краевых условиях

или в обозначениях (8.29):

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u^*, \psi, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i] dt; \ \to \max_{x,\psi}; \qquad 8.33$$

$$\tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f} [H(x^*, u \ , \psi^*, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \dot{x}_i^*] dt; \ \to \max_{u \in U^r}; \qquad 8.34$$

Задача (8.33) классическая задача вариационного исчисления без ограничений на фазовую траекторию $x(t)$ и $\psi(t)$. Решение этой задачи x^*, ψ^*, если оно существует, должно удовлетворять уравнениям Эйлера (8.10) : $\dot{\psi}_i^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1, n;$ 8.35

$$\dot{x}_i^* = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}; \quad i = 1, n; \qquad 8.36$$

(8.36) есть уравнение состояний объекта: $\dot{x}_i(t) = f_i(x, u, t); \ i = 1, n;$.

Уравнения *(8.35) называют сопряженной системой.*

Решение задачи (8.34) очевидно: управление $u^*(t)$ доставляет максимум функционалу в том и только том случае, если всюду на $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва, выполнено равенство: $H(x^*, u^*, \psi^*, t) = \max_{u \in U^r} H(x^*, u \ , \psi^*, t);$ 8.37

Необходимое условие (8.35) экстремали задачи (8.33) совместно с условием (8.37) составляют необходимые условия максимума задачи (8.28), называемые *принципом максимума Понтрягина*.

Принцип максимума для задачи Лагранжа с фиксированным временем и закрепленными концами при отсутствии ограничений на фазовую траекторию.

Для того чтобы допустимая для задачи (8.28) пара $u^*(t), x^*(t)$ была ее решением, необходимо существование

не обращающиеся одновременно в нуль константы $\psi_0^* < 0$ и решений ψ_i^*, $i = 1,n;$ сопряженной системы (8.35), таких что

при $x(t) = x^*(t);$ и $u(t) = u^*(t);$ функция $H(x^*, u^*, \psi^*, t)$ достигала максимума

во всех точках интервала $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва функции $u^*(t)$;

при краевых условиях $x_i^*(t_0) = x_i^0;$ $x_i^*(t_f) = x_i^f;$ $i = 1,n;$

Задача с нефиксированным временем и подвижными концами.

1. $\dot{x}_i(t) = f_i(x,u,t); \quad i = \overline{1,n};$ уравнения состояний объекта,

2. $u \in U^r;$ *ограничения только на управление* $u(t)$,

3. $g_j[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] = 0; \quad j = \overline{1,q}; \quad q \le 2n;$ 8.38

4. $J = g_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\, dt; \ \to \min;$ задача Больца,

Здесь: $f_i(x,u,t) \quad i = \overline{0,n};$ непрерывная, дифференцируемая по x и t функция,
дифференцируемость $f_i(x,u,t)$ *по* u *не требуется.*
$g_j[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f]$ - дифференцируемая по всем аргументам функция, $j = \overline{1,q};$

функция $H(x^*, u^*, \psi^*, t)$ достигала максимума во всех точках интервала $[t_0, t_f]$,
кроме точек разрыва функции $u^*(t)$; при краевых условиях $x_i^*(t_0) = x_i^0; \ x_i^*(t_f) = x_i^f; \ i = \overline{1,n};$

Используя прием Лагранжа сведем задачу (8.38) к вариационной задаче:

$$\tilde{J} = G + \int_{t_0}^{t_f} [H(x,u,\psi,t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i] dt; \ \to \max_{x,u,\psi}; \qquad 8.39$$

где $G = \sum_{i=0}^{q} \nu_i \, g_i; \quad H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i; \quad \psi_0 = \nu_0 = -1;$

Далее также как в задаче Лагранжа с закрепленными концами и фиксированным временем (8.28) задача расщепляется на две и получают необходимые условия в форме принципа максимума.

Принцип максимума. Для того чтобы допустимая для задачи (8.28) пара $u^*(t), x^*(t)$ была ее решением, необходимо:

1. чтобы существовали такие не обращающиеся одновременно в нуль константа $\psi_0^* \le 0$ и решения ψ_i^*; $i = 1, n$; сопряженной системы (8.35), что при $x(t) = x^*(t)$; и $u(t) = u^*(t)$; функция $H(x^*, u^*, \psi^*, t)$ достигала максимума во всех точках интервала $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва функции $u^*(t)$, т.е. $H(x^*, u^*, \psi^*, t) = \max\limits_{u \in U^r} H(x^*, u, \psi^*, t)$;

2. выполнение условий трансверсальности: $\psi_i(t_0) = -\dfrac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}$; $\psi_i(t_f) = +\dfrac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}$; $i = 1, n$;

и равенств: $H\Big|_{t = t_0} = \dfrac{\partial G}{\partial t_0}$; $H\Big|_{t = t_f} = -\dfrac{\partial G}{\partial t_f}$;

Если часть граничных значений фиксирована, условия трансверсальности для этих координат не выписываются, а граничные условия используются для определения констант интегрирования также как в задаче с фиксированными концами.

Метод максимума Понтрягина построения оптимального программатора применим к задачам, в которых:

1. нет ограничений на фазовую траекторию; ограничения накладываются только на управление,
2. не требуется дифференцируемость функций $f_i(x, u, t)$ по управлению $u(t)$.

Пример 4. При ограничении на управление требуется повернуть вал двигателя за заданное время на максимальный угол.

Задача с подвижными концами и фиксированным временем.

Начало $t_0 = 0$; и конец $t_f = T$; движения;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases}$$ уравнения движения электродвигателя;

$$|u| \le a; \qquad \Rightarrow \qquad (u \ge -a; \quad \text{и} \quad u \le a;) \qquad 8.40$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0;$ $x_2(T) = 0;$ краевые условия;

Выбрать управление u так, чтобы $J = -x_1(T); \quad \to \min;$

Сначала попробуем решить задачу классическим способом. Для этого преобразуем ограничения – неравенства (8.40) в ограничения равенства и приведем задачу к стандартному виду. Введем переменные z_1, z_2; и заменим неравенства (8.40) равенствами: $u + a = z_1^2$, $u - a = -z_2^2$; перемножим эти равенства: $u^2 - a^2 = -z_1^2 z_2^2 = -z^2$; здесь обозначено: $z_1 z_2 = z$; введение одной дополнительной компоненты в вектор управления от ограничений (8.40) позволило перейти к ограничениям равенствам:

$$u^2 - a^2 + z^2 = 0; \Rightarrow \varphi(u, z, x) = 0; \qquad 8.41$$

Гамильтониан: $H = \sum_{i=0}^{2} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k;$ $\qquad H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \lambda(u^2 - a^2 + z^2);$

$G = -\nu_0 x_1(T);$ положим $\nu_0 = -1;$ $\Rightarrow$ $G = x_1(T);$

условие трансверсальности: $\psi_1(T) = \dfrac{\partial G}{\partial x_1(T)} = 1; \qquad 8.42$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = C_1; \qquad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \qquad 8.43$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0; \quad \Rightarrow 2\lambda u + \psi_2 = 0; \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 2\lambda z = 0; \qquad 8.44$$

Из (8.42) и $\psi_1 = C_1; \Rightarrow \ \psi_1 = 1;$ из (8.43) $\Rightarrow \ \psi_2 = C_2 - t;$ из $2\lambda u + \psi_2 = 0; \ \Rightarrow \ u = {(t - C_2)}/{2\lambda};$

поскольку u ограничено (8.40), то $\lambda \neq 0;$ из (8.44) $\Rightarrow \ z = 0;$

Итак, из (8.41) *управление должно быть равным:* $u = \pm a;$ 8.45

Однако, проинтегрировав уравнения состояний объекта при $u = \pm a;$ с учетом краевых условий на левом конце $x_2(0) = 0;$ получаем: $x_2(t) = \pm at;$ и убеждаемся, что ни одно из управлений $u = a;$ или $u = -a;$ не обеспечивают выполнения краевых условий на правом конце $x_2(T) = 0;$ $(x_2(T) = \pm aT;)$, а это означает, что в классе непрерывных управлений решения нет.

Поэтому решение надо искать в классе кусочно-постоянных управлений, удовлетворяющих уравнениям Эйлера-Лагранжа всюду на $[0, T]$ кроме точек разрыва, однако положение этих точек разрыва установить не удается.

Воспользуемся методом максимума Понтрягина для решения этой же задачи.

Функция Понтрягина: $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$ $G = x_1(T);$ Сопряженные уравнения имеют вид:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \qquad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1;$$

условие трансверсальности одно: $\psi_1(T) = \dfrac{\partial G}{\partial x_1(T)} = 1;$ все координаты x_i кроме одной фиксированы на концах: $x_1(0) = x_2(0) = 0;$ $x_2(T) = 0;$

$$\psi_1 = 1; \quad \psi_2 = C_2 - t;$$

В соответствии с *принципом максимума* оптимальное управление должно удовлетворять сопряженным уравнениям и условию максимума функции Понтрягина:

$$\max_{|u| \le a} H = \psi_1 x_2 + \max_{|u| \le a}(\psi_2 u); \qquad 8.46$$

Оптимальное управление принимает только крайние значения: $u = \pm a;$ а его знак должен совпадать со знаком функции ψ_2 всюду на интервале $[0, T]$, т.е. $u(t) = a\,Sign(C_2 - t);$ Линейная функция изменяет знак на конечном интервале не более одного раза.

Пусть точка , в которой это происходит есть t_1.

$$u(t) = \begin{cases} a & if \ \ 0 \le t \le t_1; \\ -a & if \ \ t_1 < t \le T; \end{cases} \qquad 8.47$$

На интервале $0 \le t \le t_1$ вал двигателя ускоряется, а при $t_1 < t \le T$ замедляется. По условию задачи вал необходимо повернуть на максимальный угол в положительном направлении.

Определим точку переключений t_1; проинтегрируем уравнения обьекта $\dot{x}_2 = u;$ при выбранном (8.47) управлении и краевом условии $x_2(0) = 0;$:

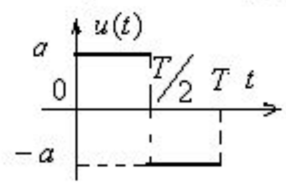
$$x_2 = \begin{cases} at & if \;\; 0 \le t \le t_1; \\ C_3 - at & if \;\; t_1 < t \le T; \end{cases} \qquad 8.48$$

Поскольку $x_2(t)$ непрерывная функция, при t_1: $at_1 = C_3 - at_1; \;\; \Rightarrow \;\; C_3 = 2at_1;$

$$x_2 = \begin{cases} at & if \;\; 0 \le t \le t_1; \\ a(2t_1 - t) & if \;\; t_1 < t \le T; \end{cases}$$

Из краевых условий на правом конце: $x_2(T) = 0; \;\; \Rightarrow \;\; a(2t_1 - T) = 0; \;\; \Rightarrow t_1 = T/2;$

Итак, окончательно: $u^*(t) = \begin{cases} a & if \;\; 0 \le t \le T/2; \\ -a & if \;\; T/2 < t \le T; \end{cases}$



Метод максимума Понтрягина позволил найти положение точки разрыва управления и записать его в явном виде.

8.2.2.1 Принцип максимума Понтрягина в задаче максимального быстродействия.

Найти допустимое управление, переводящее объект из начальной точки (точка в пространстве состояний) в конечную за минимальное время.

Это частный случай задачи Майера.

Если положить $t_0 = 0$, то критерий оптимальности имеет вид: $J = t_f \to \min$;

В данном случае $g_0 = t_f$; $f_0 = 0$; и функция Понтрягина: $H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i$,

поскольку концы траектории закреплены, то: $G = -g_0 = -t_f$;

единственное ограничение на H имеет вид: $H\Big|_{t=t_f} = -\dfrac{\partial G}{\partial t_f} = 1$;

Рассмотрим случай управления линейным объектом: $\dot{x} = Ax + Bu$;

при ограничениях на управление: $\alpha \le u \le \beta$; α, u, β - векторы одинаковой размерности $r \times 1$.

Краевые условия $x(t_0) = x^0$; $x(t_f) = 0$; - предполагается, что уравнения записаны в отклонениях, цель управления привести объект в состояние $x(t_f) = 0$; за минимальное время $J = t_f \to \min$;

функция Понтрягина в этом случае: $H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i = \psi^T (Ax + Bu)$, где $\psi^T = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$.

Решение задачи оптимального управления ψ^*, x^* должно удовлетворять сопряженному уравнению:

$$\dot{\psi}^T = -\frac{\partial H}{\partial x}; \qquad 8.49$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление находят из условия:

$$\max_{u \in U^r} H = \max_{u \in U^r} \psi^{*T} (Ax^* + Bu) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k^* + \max_{u \in U^r} \sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \sum_{j=1}^{r} b_{i,j} u_j;$$

$$\max_{u \in U^r} \sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \sum_{j=1}^{r} b_{i,j} u_j = \max_{u \in U^r} \sum_{j=1}^{r} u_j \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \psi_i^* = \sum_{j=1}^{r} \max_{u \in U^r} u_j \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \psi_i^*; \qquad 8.50$$

Если выполняется "условие нормальности" , то сумма $\sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\psi_i^*$ обращается в нуль только в конечном числе изолированных точек; в этом случае компоненты оптимального управления u^* кусочно-постоянны и принимают крайние значения α_j или β_j $j=\overline{1,r}$;

$$u_j^* = \begin{cases} \alpha_j & if \quad \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\psi_i^* \le 0; \\ \beta_j & if \quad \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\psi_i^* > 0; \end{cases}$$

Если ограничения симметричны $|u_j| \le \alpha_j; \quad \Rightarrow \quad u_j^* = \boldsymbol{\alpha}_j \, Sign \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\boldsymbol{\psi}_i^*;$

"Условие нормальности" объекта:

Рассматривается семейство r матриц размера $n \times n$

$$M[j] = [B_j, (AB)_j, \dots, (A^{n-1}B)_j] \qquad j=\overline{1,r};$$

составленных из j- столбцов $B_j, (AB)_j, \dots, (A^{n-1}B)_j$ матриц $B, AB, \dots, A^{n-1}B$.

Для объекта $\dot{x} = Ax + Bu;$ выполнено условие нормальности, если матрицы $M[j]$ не вырождены для всех $j=\overline{1,r}$.

Объект, для которого выполнено условие нормальности называют нормальным.

Для объекта n -го порядка с одним входом, одним выходом типа:

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = bu; \qquad a_0 \ne 0; \ b \ne 0;$ всегда выполнено условие нормальности.

Теорема об n- интервалах (Фельдбаум) Необходимое и достаточное условие оптималь – ности программного управления по быстродействию линейным объектом n -го порядка.

1) Принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности линейной задачи максимального быстродействия при выполнении условий нормальности объекта.
2) При оптимальном по быстродействию управлении линейным объектом функции $u_j^*(t)$, $j=\overline{1,r}$ принимают только граничные значения при любых собственных числах матрицы A , если выполнено условие нормальности,
3) Если собственные числа матрицы A действительные, то компоненты оптимального управления кусочно-постоянны, принимают только крайние значения и имеют не более n интервалов постоянства, т.е. не более $(n-1)$ переключений.

8. 3. Метод динамического программирования.

Метод динамического программирования предложен Беллманом в начале 50-х годов прошлого века для оптимизации многошаговых процессов различной природы.

Основу метода составляют:

1. принцип оптимальности,
2. принцип инвариантного погружения; т.е. включение исходной задачи в семейство аналогичных ей задач,
3. функциональное уравнение, получаемое на основе принципа оптимальности и инвариантного погружения.

Идея метода инвариантного погружения в следующем. Вместо того, чтобы решать исходную задачу ее включают в некоторое семейство задач оптимизации. При этом может оказаться, что между отдельными задачами существуют простые соотношения и среди задач семейства найдется задача, которая просто решается. Тогда, используя решения простой задачи и связи между задачами, находят решение и поставленной задачи.

Пример. Рассмотрим задачу, с которой и начинался метод динамического программирования. Пусть требуется найти **min** функции $f(x)$ вида:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \min_{x \in G^n}, \qquad (8.51)$$

где $G^n = G_1 \times G_2 \times \cdots \times Gn \qquad x_i \in G_i \qquad i = \overline{1,n}$

G^n - область определения функции $f(x)$.

Рассмотрим семейство задач:

$$f^{(m)}(x^{(m)}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \to \min_{x^{(m)} \in G^m}; \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad (8.52)$$

В этом соотношении $x^{(m)} = (x_1, \ldots, x_m)^T$. Исходная задача (8.51) *погружена* в семейство задач (8.52) в том смысле, что она входит в это семейство как частный случай (при $m = n$).

В задаче (8.52) параметр m можно трактовать как дискретное время.

Введем функцию:

$B_m = \min\limits_{x^{(m)} \in G^{(m)}} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)$; называемую функцией Беллмана.

Очевидно:

$$B_{m+1} = \min\limits_{x^{(m+1)} \in G^{(m+1)}} \left[f_{m+1}(x_{m+1}) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \right] =$$
$$= \min\limits_{x_{m+1} \in G_{m+1}} \left[f_{m+1}(x_{m+1}) \right] + \min\limits_{x^{(m)} \in G^{(m)}} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i); \qquad (8.53)$$

Второе слагаемое в (8.53) есть B_m , поэтому функция Беллмана удовлетворяет уравнению: $B_{m+1} = \min\limits_{x_{m+1} \in G_{m+1}} \left[f_{m+1}(x_{m+1}) \right] + B_m;$ (8.54)

причем: $B_1 = \min\limits_{x_1 \in G_1} f_1(x_1);$ (8.55)

Вычисляя (8.54) с учетом (85.5) последовательно получим:

$B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n$ и $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$

Здесь задача (8.51) минимизации скалярной функции от n переменных сведена к n задачам минимизации скалярных функций одной переменной. По сравнению с методом нахождения **min** функции $f(x)$ перебором на множестве G^n достигается существенный выигрыш в объеме вычислений. Если каждое множество G_i $i = 1, n$ содержит по l элементов, то при решении перебором требуется просмотр l^n вариантов. Метод динамического программирования предлагает просмотр $l \cdot n$ вариантов.

При использовании (8.54, 8.55) , вычисление B_m производится в направлении возрастания аргумента, т.е. в прямом времени (если трактовать m как дискретное время). Уравнения (8.54) называют прямыми уравнениями Беллмана, в отличие от обратных, где используется вычисление B_m при убывающих m .

Для получения обратного уравнения произведем инвариантное погружение задачи (8.51) в другое семейство:

$$\tilde{f}^{(m)}(\tilde{x}^{(m)}) = \sum_{i=m}^{n} f_i(x_i) \rightarrow \min_{\tilde{x}^{(m)} \in \tilde{G}^{(m)}} \quad ; \qquad m = n, n-1, \ldots, 1;$$

где $\tilde{G}^{(m)} = G_m \times G_{m+1} \times \cdots \times Gn \qquad x_i \in G_i \qquad i = 1,n;$

$\tilde{x}^{(m)} = (x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)^T;$

при $m = 1 \quad f(x) = \tilde{f}^{(1)}(\tilde{x}^{(1)})$.

Введем функцию Беллмана: $S_m = \min_{\tilde{x}^{(m)} \in \tilde{G}^{(m)}} \sum_{i=m}^{n} f_i(x_i)$;

Очевидно:

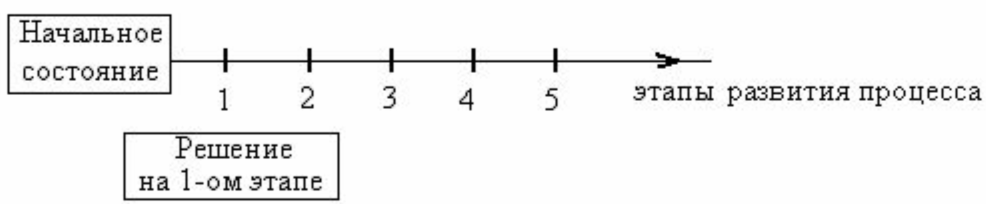
$$S_{m-1} = \min_{\tilde{x}^{(m-1)} \in G_{(m-1)}} \left[f_{m-1}(x_{m-1}) \right] + \min_{\tilde{x}^{(m)} \in \tilde{G}^{(m)}} \sum_{i=m}^{n} f_i(x_i);$$

$$S_{m-1} = \min_{\tilde{x}^{(m-1)} \in G_{(m-1)}} \left[f_{m-1}(x_{m-1}) \right] + S_m;$$

В приведенном примере вывод уравнений Беллмана основан на очевидных соотношениях; в более сложных случаях используется принцип оптимальности Беллмана.

8.3.1. Принцип оптимальности Беллмана

Беллманом рассматривалась задача оптимизации результатов многошагового процесса принятия решений.



По Беллману оптимальная стратегия поведения в **процессе многошагового принятия решений** *такова, что каковы бы ни были состояния и решения на начальных этапах* <u>*решение на очередном этапе*</u> *должно быть оптимальным по отношению к состоянию, которое имеет место к данному моменту*.

Замечание.

Min (max) суммы достигается на сумме минимумов (максимумов) слагаемых:

$$\min_{u \in U}(f_1(u) + f_2(u)) = \min_{u \in U}(f_1(u)) \quad + \quad \min_{u \in U}(f_2(u))$$

В задачах теории управления оптимальность управления определяется функционалом: $J(u, x, t, t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$, где

$x(t)$ - состояние системы,

$u(t)$ - управление на интервале $[t_0, t_f]$,

$x(t_0), x(t_f)$ - начальное и конечное значения траектории движения.

Принцип оптимальности Беллмана в задачах теории управления справедлив для систем, в которых после выбора управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ на интервале $[t_0, t']$ влияние управления и траектории на оставшемся интервале $[t', t_f]$ на величину функционала J зависит только от состояния в конце начального интервала $x(t')$ и выбора управления в последующие моменты времени.

Этим требованиям удовлетворяют системы, которые можно описать уравнениями состояний.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$x' = f(x, u, t);$$

$$u(t) \in U_t; \quad x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) \in X^f \tag{8.56}$$

время управления не фиксировано, конец траектории подвижен;

$$J = g_0(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(u, x, t)dt \quad \to \min.$$

Обозначим функцию $u(t)$ на интервале $[a, b]$ $u[a, b]$.

В соответствии с принципом Беллмана для оптимальности допустимой пары решений $x^*(t), u^*(t)$ задачи (8.56) на любом интервале $[t_0, t_f]$ необходимо, чтобы при любом $t' \in [t_0, t_f]$ управление $u^*[t', t_f]$ было оптимальным относительно состояния $x^*(t')$, в котором окажется объект в момент t' при использовании на начальном отрезке времени $t_0 \le t < t'$ управления $u^*[t_0, t']$.

Это утверждение легко доказывается от противного. Допустим оно не верно и существует управление $u^+\left[t',t_f\right]$ переводящее объект из точки $x^*(t')$ в точку $x^+(t_f^+)\in X_f$ в момент t_f^+, при котором функционал

$$J_2(u^+[t',t_f^+]) = g_0(t_f^+, x(t_f^+)) + \int_{t'}^{t_f^+} f_0(u^+,x,t)dt$$

принимает меньшее значение, чем при управлении $u^*[t',t_f^*]$ т.е. :

$$J_2(u^+[t',t_f^+]) \ < \ J_2(u^*[t',t_f^*]) \ ; \qquad J_2\ (\cdots) \ - \ \text{функционал на интервале} \left[t',t_f\right] \qquad (8.57)$$

Тогда критерий оптимальности в задаче (8.56) при управлении:

$$u^+[t_0,t_f^+] = \begin{cases} u^*(t) & t_0 \le t < t' \\ u^+(t) & t' \le t < t_f^+ \end{cases}$$

принимает меньшее значение, чем при управлении $u^*[t_0,t_f^*]$, т.е.

$$J(u^+[t_0,t_f^+]) = g_0(t_f^+, x(t_f^+)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(u^*,x^*,t)dt \ + \int_{t'}^{t_f^+} f_0(u^+,x,t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t'} f_0(u^*,x^*,t)dt \ + J_2(u^+[t',t_f^+])$$

$$J(u^*[t_0,t_f^*]) = \int_{t_0}^{t'} f_0(u^*,x^*,t)dt \ + J_2(u^*[t',t_f^*])$$

и если выполняется (8.57), то это **противоречит** тому, что $u^*[t_0,t_f^*]$ оптимальное решение, поскольку $J(u^*[t_0,t_f^*]) \ > \ J(u^+[t_0,t_f^+])$.

Справедливо **также** более общее утверждение:

если допустимая пара $x(t), u(t)$ оптимальна $x^*(t), u^*(t)$, то каков бы ни был подинтервал $[t_1,t_2]\subset[t_0,t_f]$ управление $u^*(t)$ на этом подинтервале является оптимальным относительно граничных точек $x^*(t_1), x^*(t_2)$.

Частным случаем этого утверждения является **обратный принцип оптимальности**: для оптимальной допустимой пары $x^*(t), u^*(t)$ необходимо, чтобы при любом $t_1 \in [t_0, t_f]$ управление $u^*[t_0, t_1]$ было оптимально относительно конечного для интервала $[t_0, t_1]$ состояния $x(t_1) = x^*(t_1)$.

8.3.2. Функция и уравнение Беллмана.

Рассмотрим задачу (8.56) построения оптимального управления

$$x' = f(x, u, t);$$

$$u(t) \in U_t; \quad x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) \in X^f$$

время управления не фиксировано, конец траектории подвижен;

$$J = g_0(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(u, x, t)dt \quad \rightarrow \min.$$

Произведем инвариантное погружение задачи (8.56) в семейство задач, которое получается из задачи (8.56) заменой начального условия $x(t_0) = x^0$ параметрическим условием $x(t') = x'$, $t' \in [t_0, t_f]$.

В новой задаче t' и x' рассматриваются как параметры.

При $t' = t_0$ из этого семейства задач выделяется задача (8.56).

Минимальное значение критерия оптимальности при параметрическом начальном условии зависит в соответствии с принципом оптимальности от значений t' и $x(t')$.

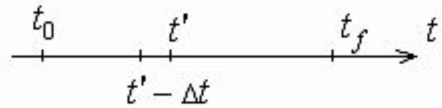
Составим функцию (это так называемая функция Беллмана):

$$S(x(t'), t') = \min_{\substack{u(t) \in U_t \\ t' \le t \le t_f}} \{g_0(x(t_f), t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(x, u, t)dt\}, \tag{8.58}$$

причем: $S(x(t_f), t_f) = g_0(x(t_f), t_f)$; (8.59)

это граничное условие для будущего уравнения Беллмана.

Составим уравнение Беллмана:



$$S(x(t'-\Delta t),t'-\Delta t) = \min_{\substack{u(t)\in U_t \\ t'-\Delta t\le t\le t_f}} \{g_0(x(t_f),t_f) + \int_{t'-\Delta t}^{t'} f_0(x,u.t)dt\} + \int_{t'}^{t_f} f_0(x,u,t)dt\}$$

$$S(x(t'-\Delta t),t'-\Delta t) = \min_{\substack{u(t)\in U_t \\ t'-\Delta t\le t\le t'}} \{ \int_{t'-\Delta t}^{t'} f_0(x,u,t)dt\} + \min_{\substack{u(t)\in U_t \\ t'\le t\le t_f}} \{g_0(x(t_f),t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(x,u,t)dt\}$$

$$S(x(t'-\Delta t),t'-\Delta t) = \min_{\substack{u(t)\in U_t \\ t'-\Delta t\le t\le t'}} \{ \int_{t'-\Delta t}^{t'} f_0(x,u,t)dt + S(x(t'),t')\} \qquad (8.60)$$

Фазовый вектор $x(t'-\Delta t)$ и соответственно функция Беллмана в левой части соотношения (8.60) не зависит от управления на интервале $[t'-\Delta t, t']$ поэтому в (8.60) можно $S(x(t'-\Delta t),t'-\Delta t)$ внести под знак $\min\limits_{\substack{u(t)\in U_t \\ t'-\Delta t\le t\le t'}} \{\cdot\}$ в правой части:

$$0 = \min_{\substack{u(t)\in U_t \\ t'-\Delta t\le t\le t'}} \{ \int_{t'-\Delta t}^{t'} f_0(x,u,t)dt + S(x(t'),t') - S(x(t'-\Delta t),t'-\Delta t)\}; \qquad (8.61)$$

При малых Δt

$$\int_{t'-\Delta t}^{t'} f_0(x,u,t)dt = f_0(x(t'),u(t'),t')\Delta t + 0(\Delta t) \qquad (8.62)$$

Подставим (8.62) в (8.61), разделим (8.61) на Δt и в пределе $\Delta t \to 0$, приняв $t' = t$ получим:

$$0 = \min_{u(t)\in U_t} \{f_0(x,u,t) + \frac{S(x(t),t)}{dt}\}$$

или

$$0 = \min_{u(t)\in U_t} \{ f_0(x,u,t) \ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial t} \} \qquad (8.63)$$

Это так называемое уравнение Беллмана.

$\frac{\partial S}{\partial x} = string\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n} \right)$ и т.к. $\frac{\partial S}{\partial t}$ не зависит от $u(t)$

то величину $\frac{\partial S}{\partial t}$ можно вывести из под знака $\min\{.\}$:

$$\min_{u(t)\in U_t} \{ f_0(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x,u,t) \} = -\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (8.64)$$

Итак , если функция Беллмана дифференцируема, то для того, чтобы допустимая пара $u(t)$, $x(t)$ для задачи (8.56) была ее решением необходимо

чтобы она удовлетворяла уравнению Беллмана (8.64)

при граничном условии: $S(x(t_f), t_f) = g_0(x(t_f), t_f)$.

Если терминальных ограничений нет и $g_0(x(t_f), t_f) = 0$, то $S(x(t_f), t_f) = 0$.

Если минимум в левой части (8.64) достигается во внутренней точке множества U_t , то уравнение Беллмана (8.64) можно записать:

$$f_0(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x,u,t) \} = -\frac{\partial S}{\partial t} ; \qquad (8.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \{ f_0(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x,u,t) \} = 0 \ ; \quad j = 1, r \qquad (8.66)$$

Уравнение (8.66) выражает необходимое условие минимума левой части (8.64) и заменяют операцию минимизации по управлению.

Замечание.

Если

– минимум в левой части (8.64) достигается во внутренней точке множества U_t

– система стационарна (все функции f_i и подынтегральное

– выражение f_0 в функционале не зависят явно от времени) и

конечный момент t_f **не** фиксирован,

то функция Беллмана не зависит явно от времени и $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$.

Оптимальное управление методом динамического программирования находят в следующем порядке:

1. из уравнений (8.66) определяют *управление* как функцию $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ т.е. находят $u^* = u^*\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)$;
2. подставляют $u^*\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)$ в (8.65) и решают его при краевом условии (8.59) и находят функцию Беллмана;
3. подставляют найденную функцию Беллмана в $u^*(s)$ и получают оптимальное управление как функцию фазовых координат.

Пример. Найти **opt** управление с обратной связью в задаче:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_1^0; \quad x_2(0) = x_2^0 \\ \dot{x}_2 = u & x_1(t_f) = 0; \quad x_2(t_f) = 0 \end{cases} \qquad J = \int_0^{t_f} (x_1^2 + u^2)dt \quad \to \quad min$$

Уравнения состояний записаны в отклонениях; переходный процесс, вызванный отклонениями в начальных условиях, должен закончиться за время t_f; ограничений на t_f нет; t_f - любое. Функционал ограничивает как отклонения выходной переменной, так и управление.

В рассматриваемом случае правые части уравнений состояний, подынтегральное выражение в функционале явно от времени не зависят, отсюда функция Беллмана $S(x(t))$ функция только состояний и $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$.

Выпишем уравнения (8.65, 8.66) для данной задачи:

$$\begin{cases} x_1^2 + u^2 + \dfrac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial S}{\partial x_2} u = 0; \\ 2u + \dfrac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \end{cases}$$

Из второго уравнения $u^* = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial x_2}$; подставив его в первое:

$$x_1^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 = 0; \qquad \Rightarrow$$

$$x_1^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 = 0; \qquad (8.67)$$

Решим это уравнение при граничном условии $S(x(t_f)) = 0$;

(в функционале $g_0(x(t_f), t_f) = 0$;)

Будем искать решение в виде квадратичной формы: $S = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

и граничном условии $S(x(t_f)) = 0$; подставим возможное решение в (8.67).

$$x_1^2 - \frac{1}{4}\left(2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2\right)^2 + (2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)x_2 = 0$$

$$(1 - a_{12}^2)x_1^2 + (2a_{11} - 2a_{12}a_{22})x_1x_2 + \left(2a_{12} - a_{22}^2\right)x_2^2 = 0$$

Последнее равенство выполняется тождественно, если:

$$\begin{cases} (1 - a_{12}^2) = 0 \\ a_{11} - a_{12}a_{22} = 0 \\ 2a_{12} - a_{22}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{эта система имеет решение} \quad \begin{cases} a_{12} = \pm 1 \\ a_{22} = \pm\sqrt{2} \\ a_{11} = \pm\sqrt{2} \end{cases} \qquad (8.68)$$

По определению функция Беллмана $S(x(t')) = \min\limits_{u(t)\in U_t} \int\limits_{t'}^{t_f} (x_1^2 + u^2)dt$; $\Rightarrow$

$S(x(t')) > 0$ при всех $t' < t_f$.

Отсюда квадратичная форма с коэффициентами (8.68) может быть функцией Беллмана, если она положительно определена. Этому условию удовлетворяют:

$a_{12} = 1$; $a_{22} = \sqrt{2}$; $a_{11} = \sqrt{2}$;

$S = \sqrt{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_2^2$;

Оптимальное управление имеет вид: $$u^*(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_2} = -(x_1 + \sqrt{2}x_2).$$

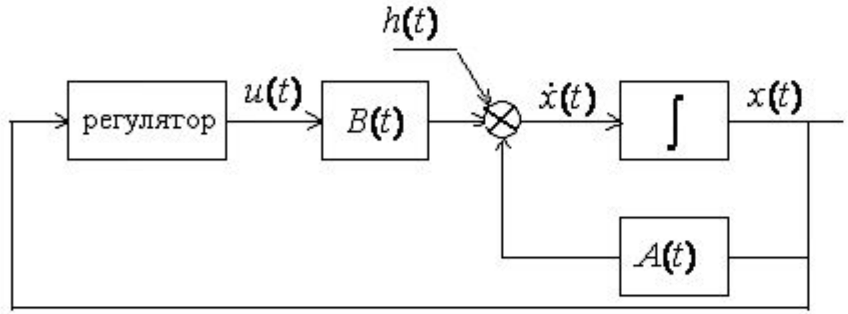
Замечание. Вариационные методы позволяют находить ***opt*** управление как функцию времени (синтезировать программатор). Метод динамического программирования дает возможность находить управление как функцию фазовых координат системы, т.е. решать задачу синтеза ***opt*** регулятора с обратной связью.

Недостаток метода динамического программирования в том, что задача оптимального управления сводится к решению трудноразрешимого нелинейного уравнения в частных производных.

Уравнения (8.65, 8.66) получены при условии гладкости (непрерывной дифференцируемости) функции Беллмана, которое часто не выполняется.

8.3.3. Синтез оптимальных линейных систем по интегральному квадратичному критерию.

Объект: $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + h(t)$ (8.69)



$$J = x^T(t_f)\cdot F\cdot x\ (t_f) + \int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)\cdot Q(t)\cdot x(t) + u^T(t)\cdot R(t)\cdot u(t)]dt \qquad (8.70)$$

$h(t)$ - известная вектор-функция (внешнее воздействие),

F и $Q(t)$ - неотрицательно определенные матрицы

т.е.

$$x^T(t_f)\cdot F\cdot x\ (t_f) \geq 0;$$

$$x^T(t)\cdot Q(t)\cdot x(t) \geq 0; \quad \text{для всех } x(t) \text{ на интервале } [t_0, t_f]$$

$R(t)$ - положительно определенная матрица

$u^T(t)\cdot R(t)\cdot u(t) > 0;$ *для всех* $u(t)$ *на интервале* $[t_0, t_f]$,

функции $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ - непрерывны,

требуется найти управление с обратной связью, такое, что при произвольном начальном условии $x(t_0) = x^0$, J принимает min значение.

Первое слагаемое в J (8.70) есть квадратичная терминальная ошибка; ее включают в функционал, когда необходимо обеспечить минимальное отклонение состояния системы в момент t_f от желаемого (задания),

$\int_{t_0}^{t_f} x^T(t)\cdot Q(t)\cdot x(t)dt$ - есть интегральная квадратичная ошибка, характеризующая качество регулирования на интервале $\left[t_0, t_f\right]$,

$\int_{t_0}^{t_f} u^T(t) \cdot R(t) \cdot u(t) dt$ - взвешенная "энергия" управления ; эта компонента включается в J, чтобы ограничить управление и соответствующие расходы на управление; $R(t)$ определяет веса потерь на управление.

Брайсон рекомендует выбирать матрицы F, Q, R диагональными; при этом элементы матриц можно связать с максимально допустимыми величинами:

$\dfrac{1}{f_{ii}}$ - равны максимально допустимым $x_i^2(t_f)$,

$\dfrac{1}{q_{ii}(t)}$ - равны произведению $(t_f - t_0)$ на максимально допустимые $x_i^2(t)$,

$\dfrac{1}{r_{ii}(t)}$ - равны произведению $(t_f - t_0)$ на максимально допустимые $u_i^2(t)$,

Использование уравнений Беллмана (8.65, 8.66) позволило получить решение задачи (8.69, 8.70) в виде:

$$u^* = -\left(R^{-1} B^T K x + \frac{1}{2} R^{-1} B^T p\right) \qquad (8.71)$$

Где K - симметричная $(n \times n)$ матрица, p – $(n \times 1)$ - вектор, K и p находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1} B^T K - Q & (8.72) \\ \dot{p} = KBR^{-1} B^T p - A^T p - 2Kh & (8.73) \\ \dot{q} = \dfrac{1}{4} p^T BR^{-1} B^T p - p^T h & (8.74) \end{cases}$$

при граничных условиях $K(t_f) = F$; $p(t_f) = 0$; $q(t_f) = 0$;

Уравнение (8.72) называют матричным уравнением Риккати; оно является нелинейным и его <u>не удается</u> *аналитически* решить даже в случае, когда матрицы A, B, R, Q - постоянны.

Решение (8.71) задачи (8.69, 8.70) синтеза оптимального, линейного, нестационарного регулятора состояния ***существует и единственно***. Управляемость объекта не является обязательным условием оптимального управления. Решение существует и единственно даже в том случае, если объект не вполне управляем. Это связано с тем, что процесс управления рассматривается на конечном интервале и вклад неуправляемых координат в значение критерия оптимальности конечен.

Для получения соотношений (8.72, 8.73, 8.74) воспользуемся методом динамического программирования; запишем функцию

$$S(x(t'),t') = \min_{\substack{u(t)\in U_t \\ t'\le t\le t_f}} \{g_0(x(t_f),t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(x,u,t)dt\}, \quad \text{причем:} \quad S(x(t_f),t_f) = g_0(x(t_f),t_f);$$

здесь $x(t')$ – начальное состояние, из которого начинается движение; и соответствующее (8.64) уравнение Беллмана:

$$\min_u \{f_0(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x,u,t)\} = -\frac{\partial S}{\partial t}; \qquad \Rightarrow$$

по условиям задачи (8.69, 8.70) ограничений на управление u нет;

$$\min_u \{x^T Qx + u^T Ru + \frac{\partial S}{\partial x}(Ax + Bu + h)\} = -\frac{\partial S}{\partial t}; \tag{8.75}$$

граничные условия $\quad S(x(t_f),t_f) = x^T(t_f)\cdot F\cdot x(t_f)$ (8.76)

Поскольку ограничений на управление u нет, то квадратный трехчлен достигает минимума в стационарной точке, т.е. там, где: $\dfrac{\partial\{.\}}{\partial u} = 0$.

Это позволяет записать (8.75) следующим образом:

$$\begin{cases} \{x^T Qx + u^T Ru + \dfrac{\partial S}{\partial x}(Ax + Bu + h)\} = -\dfrac{\partial S}{\partial t} & (8.77) \\ 2u^T R + \dfrac{\partial S}{\partial x} B = 0 & (8.78) \end{cases}$$

Из (8.78) находим: $$u = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \qquad (8.79)$$

Подставив (8.79) в (8.77):

$$x^T Q x - \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial x} B R^{-1} B^T \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T + \frac{\partial S}{\partial x}(Ax + h) = -\frac{\partial S}{\partial t} \; ; \qquad (8.80)$$

Решение уравнения (8.80) будем искать в виде квадратного трехчлена:

$$S(x(t),t) = x^T(t) K(t) x(t) + p^T(t) x(t) + q(t)\,; \qquad (8.81)$$

$x(t)$ - стартовое состояние, которое задается условиями задачи ,

$K(t)$ - неотрицательно определена и симметрична при всех $t \in \left[t_0, t_f \right]$.

Подставляя $$\frac{\partial S(x)}{\partial x} = 2 x^T K(t) + p^T(t) \qquad (8.82)$$

из (8.81) $\rightarrow$ (8.80):

$$x^T (Q - KBR^{-1} B^T K + KA + A^T K) x -$$

$$- x^T (KBR^{-1} B^T p - A^T p - 2Kh) - \frac{1}{4} p^T BR^{-1} B^T p + p^T h =$$

$$= -(x^T \dot{K} x + x^T \dot{p} + \dot{q});$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях x в правой и левой частях:

$$\begin{cases} Q - KBR^{-1} B^T K + KA + A^T K = -\dot{K} \\ KBR^{-1} B^T p - A^T p - 2Kh = \dot{p} \\ \frac{1}{4} p^T BR^{-1} B^T p - p^T h = \dot{q} \end{cases} \qquad (8.83)$$

из подстановки (8.82) $\rightarrow$ (8.79):

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \left(2x^T K + p^T \right)^T = -(R^{-1} B^T K x + \frac{1}{2} R^{-1} B^T p) \qquad (8.84)$$

Граничные условия для уравнений (8.83);
из подстановки (8.81) $\rightarrow$ (8.76):

$$x_f^T K(t_f) x_f + p^T(t_f) x_f + q(t_f) = x_f^T F x_f; \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} K(t_f) = F; \\ p^T(t_f) = 0; \\ q(t_f) = 0; \end{array}$$

Уравнения (8.83) решают в порядке их записи. Первое из уравнений (8.83)- нелинейное матричное дифференциальное уравнение аналитически не решается;

его решают численно в обратном времени от t_f к t_0 заменой $\tau = t_f - t$, либо моделированием в прямом или обратном времени;

первое из уравнений (8.83) равносильно системе $\dfrac{n(n+1)}{2}$ скалярных, нелинейных, дифференциальных уравнений;

переход к обратному времени $\tau = t_f - t$ приводит к замене всех матриц, входящих в (8.83) на матрицы, зависящие от $(t_f - t)$:

решив первое из уравнений (8.83) , решают второе – векторное линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка и, наконец, последнее – скалярное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

8.3.3.1. Оптимальные стационарные линейные системы.

Рассмотрим частный случай задачи (8.69, 8.70), в которой:
матрицы A, B, Q, R - постоянны;
внешнее возмущение равно нулю $h(t) = 0$;
время не фиксировано $t_f = \infty$;
финальные координаты фиксированы $x(t_f) = 0$;
система : $\dot{x} = Ax + Bu$; (8.85)
критерий : $J = \int\limits_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)dt \rightarrow \min$;

требуется найти *управление с обратной связью*, при котором замкнутая система *устойчива* и критерий оптимальности принимает минимальное значение.

Это задача синтеза оптимального стационарного линейного регулятора состояния.

Решение этой задачи – решение уравнения Беллмана

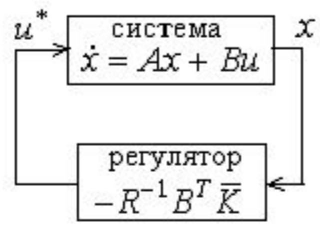
при выборе функции Беллмана равной $S(x) = x^T \bar{K} x$, (8.86)

где $\bar{K}$ - постоянная положительно определенная матрица;

уравнение Риккати (8.72) принимает вид:

$$-\bar{K}A - A^T \bar{K} + \bar{K}BR^{-1}B^T \bar{K} - Q = 0\,, \qquad (8.87)$$

а оптимальное управление в соответствии с (8.71) есть: $u^* = -R^{-1}B^T \bar{K}x$. (8.88)



Покажем, используя *Вторую методу Ляпунова*, что выбор управления (8.88) обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Подставив (8.88) в (8.85) получим:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T\bar{K})x \qquad (8.89)$$

Функция Беллмана (8.86) $S(x) = x^T\bar{K}x$ положительно определена и может быть функцией Ляпунова для замкнутой системы (8.89).

Вычислим производную Функции Ляпунова по времени:

$$\frac{dS}{dt} = \dot{x}^T\bar{K}x + x^T\bar{K}\dot{x} = x^T(A^T\bar{K} + \bar{K}A - 2\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K})x;$$

с учетом (8.87):

$$\frac{dS}{dt} = -x^T(\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K} + Q)x$$

Матрица $\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K}$ неотрицательно определена, т.к. R и соответственно R^{-1} положительно определены, то $z^TR^{-1}z \geq 0$ при произвольных z.

Если положить $z = B^T\bar{K}x$, то $x^T\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K}x \geq 0$.

Матрица Q положительно определена по условию,

следовательно $\frac{dS}{dt} = -x^T(\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K} + Q)x$ отрицательно определена и

достаточные условия асимптотической устойчивости замкнутой системы доказаны.