# Теория финансового портфеля

# История теории финансового портфеля

- Начало современной теории финансового портфеля было заложено в статье Гарри Марковица «Выбор портфеля» (1952). В этой статье была предложена математическая модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг и были приведены методы построения таких портфелей при определенных условиях.
- Затем в работах Вильяма Шарпа (1964) и Джона Литнера (1965), и было основано на понятиях систематического (рыночного) и несистематического рисков ценной бумаги.

# Основные количественные характеристики отдельной рисковой ценной бумаги

- При формировании оптимального портфеля ценных бумаг необходимы рыночные данные по отдельным ценным бумагам, информация о которых представлена на многочисленных информационных сайтах. Например, многие известные рыночные данные по значениям индексов и котирования многочисленных акций представлены на сайте http://www.finam.ru/analysis/.

# Доходность акции (финансового инструмента)

- Доходность $r_i$-процентное изменение стоимости инвестиции в финансовые активы за определенный период времени

- $$m_{it} = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}} \cdot 100\%$$

- где $C_t$ – цена закрытия акции ( финансового инструмента) за данный месяц, $C_{t-1}$ – цена закрытия акции ( финансового инструмента) за предыдущий месяц .

- $m_{ij}$ – является случайной величиной , i-вид бумаги, t-время.

## *Математическое ожидание - $m_i$ и дисперсия – $\sigma^2_i$ доходности* ценной бумаги

$$\bar{m}_i = E(m_i) = \sum_{i=1}^{k} m_{ik} p_k$$

$$\sigma^2_i = E[(m_{ik} - \bar{m}_i)^2] = \sum_{i=1}^{k} (m_{ik} - \bar{m}_i)^2 p_k$$

- $p_k$- состояние экономики, k –число возможных состояний экономики, $\sigma$ среднее квадратическое отклонение, определяющая риск ценной бумаги

# *Ковариация и корреляция* между доходностями двух ценных бумаг –А и В

- *Ковариация-*

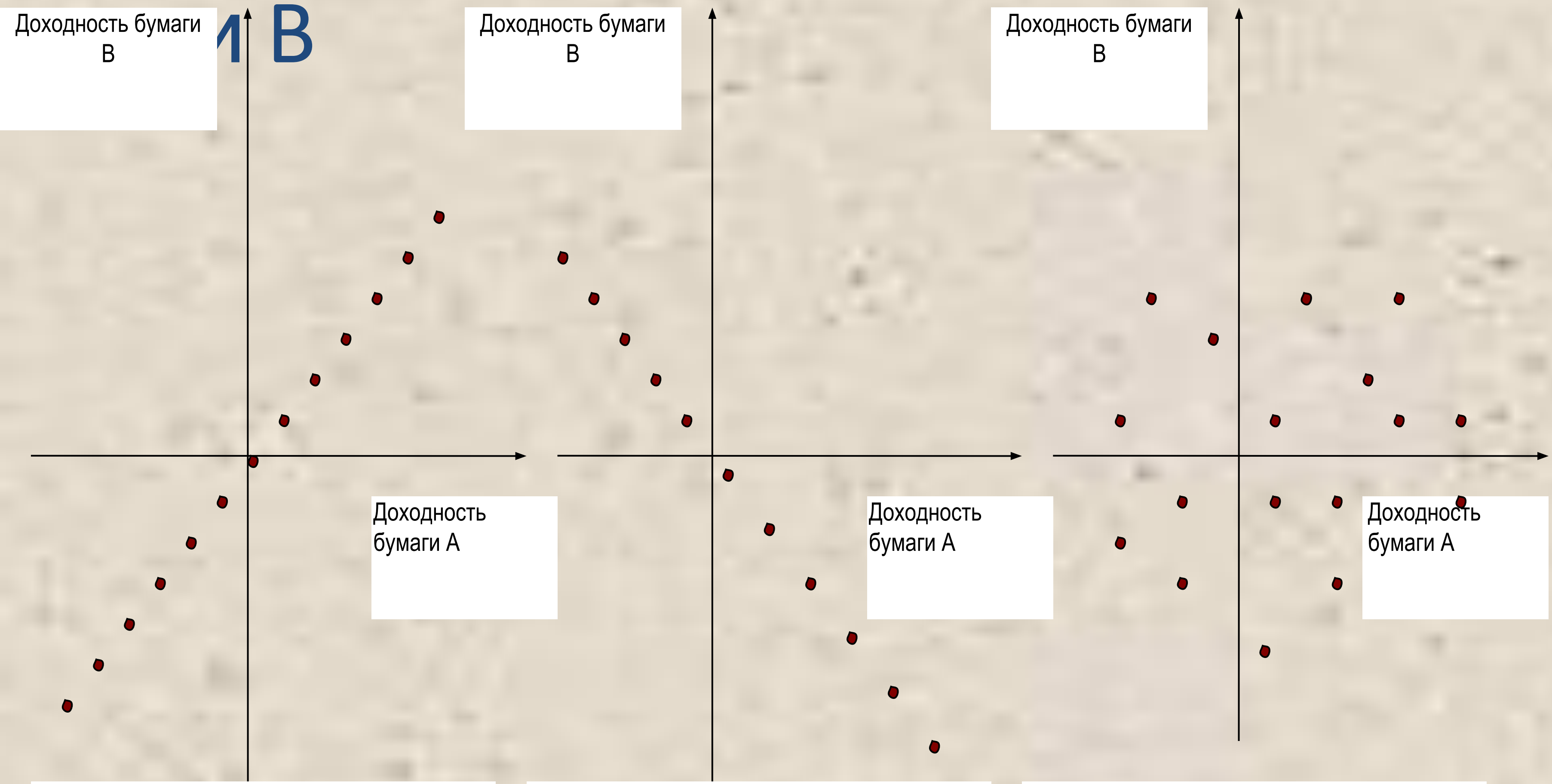
$$COV_{AB} = E[(m_{Aj} - m_A)(m_{Bj} - m_B)] = E(r_A x r_B) - m_A m_B$$

- Корреляция -, $-1 \le \rho_{AB} \le 1$

$$\rho_{AB} = COV_{AB} / \sigma_A \sigma_B$$

- *Коэффициент вариации доходности* - $C_A = \dfrac{\sigma_A}{m_A}$

# Варианты взаимосвязи доходностей двух ценных бумаг А и В




а) полная положительная корреляция $\rho_{ав}=1$

б) полная отрицательная корреляция - $\rho_{ав}=1$

а) некоррелированные доходности- $\rho_{ав}=0$

## *Правила доминирования* рационального инвестора

- 1. Если m1 = m2 и $\sigma 1<\sigma 2$, то первый вид ценных бумаг предпочтительнее, поскольку с ним связана меньшая степень риска.
- 2. Если $\sigma 1=\sigma 2$, а m1 > m2 , то целесообразно вложить деньги в 1-й вид ценных бумаг.
- 3. Если m1 > m2 и $\sigma 1>\sigma 2$ или m1 < m2 и $\sigma 1<\sigma 2$ , то целесообразно использовать к*оэффициент вариации доходности* - С
- Однако в зависимости от индивидуальной склонности к риску инвестор может предпочесть вариант с большей ожидаемой доходностью, но связанной и с большим риском, либо вариант с меньшей ожидаемой доходностью, но менее рискованный.

Задача 1. Рассматриваются три равновероятных состояния экономики S1,S2,S3 , т.е. каждое состояние может реализоваться с одинаковой вероятностью $p_k = 1/3$, $k = 1,2,3$. Значения доходностей ценных бумаг двух компаний *A* и *B* для каждого состояния *k* приводятся в табл. (в процентах).

| S состояние экономики | Доходность фирмы А | Доходность фирмы В |
|---|---|---|
| S1 | 10 | 25 |
| S2 | 20 | 15 |
| S3 | 30 | 5 |

Определить :1.Ожидаемое значение доходностей ценных бумаг каждой компании ; 2. Риск, связанный с вложением в каждую ценную бумагу; 3.Степень зависимости доходностей ценных бумаг компаний А и В.

# Решение

## 1.Ожидаемые доходности

$$\bar{m}_A = E(m_{Ak}) = \sum_{k=1}^{n} m_{Ak} p_k = 1/3(10+20+30) = 20;$$

$$\bar{m}_B = E(m_{Bk}) = \sum_{k=1}^{n} m_{Bk} p_k = 1/3(25+15+5) = 15;$$

## 2. Дисперсии доходностей ЦБ

$$\sigma^2{}_A = \sum_{i=1}^{k} (m_{Ak} - \bar{m}_A)^2 p_k = 1/3[(10-20)^2 + (20-20)^2 + (30-20)^2] = 66{,}67$$

$$\sigma^2{}_B = \sum_{i=1}^{k} (m_{Bk} - \bar{m}_B)^2 p_k = 1/3[(15-15)^2 + (25-15)^2 + (5-15)^2] = 66{,}67$$

# Задачи формирования портфелей ценных бумаг

- **Портфель – это совокупность различных инвестиционных инструментов, которые собраны воедино для достижения конкретной инвестиционной цели вкладчика.**
- **Основы теории выбора портфеля впервые были разработаны нобелевским лауреатом Гарри Марковицем в статье «Выбор портфеля», опубликованной в 1952 г. Затем в работах Вильяма Шарпа (1964) и Джона Литнера (1965), и было основано на понятиях система-тического (рыночного) и несистема-тического рисков ценной бумаги.**

# Задачи формирования портфелей ценных бумаг



- ***Портфель*** (***инвестиционный портфель***) - **совокупность инвестиционных инструментов.**
- ***Портфельный менеджмент*** **– формирование инвестиционного портфеля ценных бумаг.**
- ***Главная цель*** **в формировании портфеля – достижение оптимального сочетания между риском и доходностью за счет набора инвестиционных инструментов, который должен обеспечить:**
- ***мин*****имум риска потерь при заданном уровне доходности;**
- **или *мак*симальную доходность при заданном уровне риска.**

## Основные характеристики портфеля ЦБ

- ***$m_p$- доходность портфеля*** ценных бумаг. Данный параметр рассчитывается как взвешенная средняя из ожидаемых доходностей по каждой из ЦБ

$$m_p = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{m}_k$$

где **x*i*** - доли инвестиций, помещенных в каждый из видов активов (эти доли называют *портфельными весами*), k – вид актива. $\mathbf{X^T=(x1, x2, \ldots xn)}$; ***$m_k$*** - ожидаемая доходность по каждому виду активов.

# Риск портфеля

1. ***Риск портфеля - $\sigma_p$ - стандартное отклонение ставок дохода по портфелю, рассчитывается как квадратный корень из дисперсии портфельного дохода (вариации Vp),***

$$\sigma_p^2 = V_p = X' \overline{\overline{COV}}\, X = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \times \sigma_i^2 + 2 \times \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} x_i \times x_j \times r_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j$$

$\overline{\overline{COV}}$ - ковариационная матрица порядка *N*.

# Ковариационная матрица порядка-N

- *Ковариация* - это статистическая мера взаимодействия двух случайных переменных, например, доходности трех ценных бумаг.

$$COV_{ij} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(m_1, m_1) & \operatorname{cov}(m_1, m_2) & \operatorname{cov}(m_1, m_3) \\ \operatorname{cov}(m_2, m_1) & \operatorname{cov}(m_2, m_2) & \operatorname{cov}(m_2, m_1) \\ \operatorname{cov}(m_3, m_1) & \operatorname{cov}(m_1, m_2) & \operatorname{cov}(m_3, m_3) \end{pmatrix}$$

- Коэффициент корреляции между двумя переменными *i* и *j* можно рассчитать по выражению

$$\rho_{ij} = COV_{ij} / \sigma_i \sigma_j$$

# ПРИМЕР
## 1. Некоррелированны

Предположим , что ЦБ различных видов ведут себя независимо, т.е. они некоррелированы:

$$V_{ij} = 0 \quad при \quad i \neq j$$

Тогда

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1} x_i{}^2 \cdot \sigma_i{}^2$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_i x_i \cdot \sigma^2{}_i}$$

**Предположим, что деньги вложены равными долями во все виды ЦБ:**

$$x_i = \frac{1}{n} \qquad i = 1,2...n$$

**Тогда средняя ожидаемая доходность портфеля:**

$$m_p = \frac{\sum_i m_i}{n}$$

**Риск портфеля:**

$$\sigma_p = \sqrt{D_p} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\sum_i \sigma_i^{\,2}}{n}}$$

# ПРИМЕР.

***Инвестор может составить портфель из 4 видов ценных бумаг:***

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 3 | 5 | 8 | 10 |
| $\sigma_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 |

Рассмотрим несколько вариантов составления портфеля равными долями.

***1. Портфель состоит из бумаг 1 и 2 вида.***

$$m_p = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$\sigma_p = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} \approx 2.23$$

**2. Портфель состоит из бумаг 1, 2 и 3 вида.**

$$m_p = \frac{3+5+8}{2} \approx 5.3$$

$$\sigma_p = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2+6^2} \approx 2.5$$

***3. Портфель состоит из бумаг всех видов.***

$$m_p = \frac{3+5+8+10}{2} \approx 6.5$$

$$\sigma_p = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2+6^2+10^2} \approx 2.73$$

**Эффективность портфеля растет быстрее, чем его риск.**

***При некоррелированных ЦБ, если их число n в портфеле растет, то риск будет ограничен и он будет $n \to \infty$ стремиться к нулю при Уменьшение риска портфеля за счет увеличения в нем числа ЦБ , получил название эффекта диверсификации.***

# Диверсификация

- *Диверсификация* (разнообразие ценных бумаг в портфеле) приводит к снижению общего риска портфеля. Это происходит вследствие сокращения собственного риска портфеля, в то время как рыночный риск портфеля остается приблизительно таким же. Этот же эффект воплощен в народной мудрости − «не клади все яйца в одну корзину». Принцип диверсификации гласит, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции, тогда эффективность окажется усредненной, а риск однозначно уменьшится.

# 2. Влияние коррел
# ЦБ разного вида

**Оценим влияние корреляции ЦБ.**

**Корреляция не влияет на эффективность портфеля, поскольку**

$$m_p = \sum_i x_i \cdot m_i$$

**Но она будет влиять на риск:**

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{ij} x_i \cdot x_j \cdot COV_{ij} = \sum_{ij} x_i \cdot x_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \sigma_j$$

Рассмотрим коэффициент корреляции:

$$\rho_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

$$\sigma_p^{\ 2} = \sum_{ij} (\sigma_i \cdot x_i)(\sigma_j \cdot x_j) \cdot \rho_{ij}$$

Рассмотрим два крайних случая:

## *2.1. Полная прямая корреляция*

$$\rho_{ij} = 1$$

**Это значит, что при изменении *i* –го фактора *j* – ый меняется прямо пропорционально.**

**Тогда**

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{ij} (\sigma_i \cdot x_i)(\sigma_j \cdot x_j) = \sum_i (\sigma_i \cdot x_i)^2$$

**Если деньги вложить равными долями** $x_i = \frac{1}{n}$ **,то**

$$\sigma_p{}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_i (\sigma_i)^2$$

**и риск портфеля составит** $\sigma_p = \frac{1}{n}(\sum_i \sigma_i{}^2)^{1/2}$

**Однако, в этом случае диверсификация портфеля не дает эффекта – риск портфеля не будет стремиться к нулю при**

$$n \to \infty$$

Заметим, что положительная корреляция между эффективностями ЦБ имеет место, когда их курс определяется одним фактором.

Например, цены акций электрических и транспортных компаний пропорциональны цене на нефть.

Диверсификация путем покупки и тех и других акций бесполезна – риск портфеля оказывается приблизительно таким же, как и среднеквадратичное отклонение цены на нефть.

## 2.2. Полная обратная корреляция

$$\rho_{ij} = -1$$

**Пусть *n=2*:**

$$\sigma_p{}^2 = \sigma_1^2 \cdot x_1^2 + \sigma_2^2 \cdot x_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 =$$

$$= (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$$

**Если**

$$x_2 = \frac{x_1\sigma_1}{\sigma_2}$$

**То**

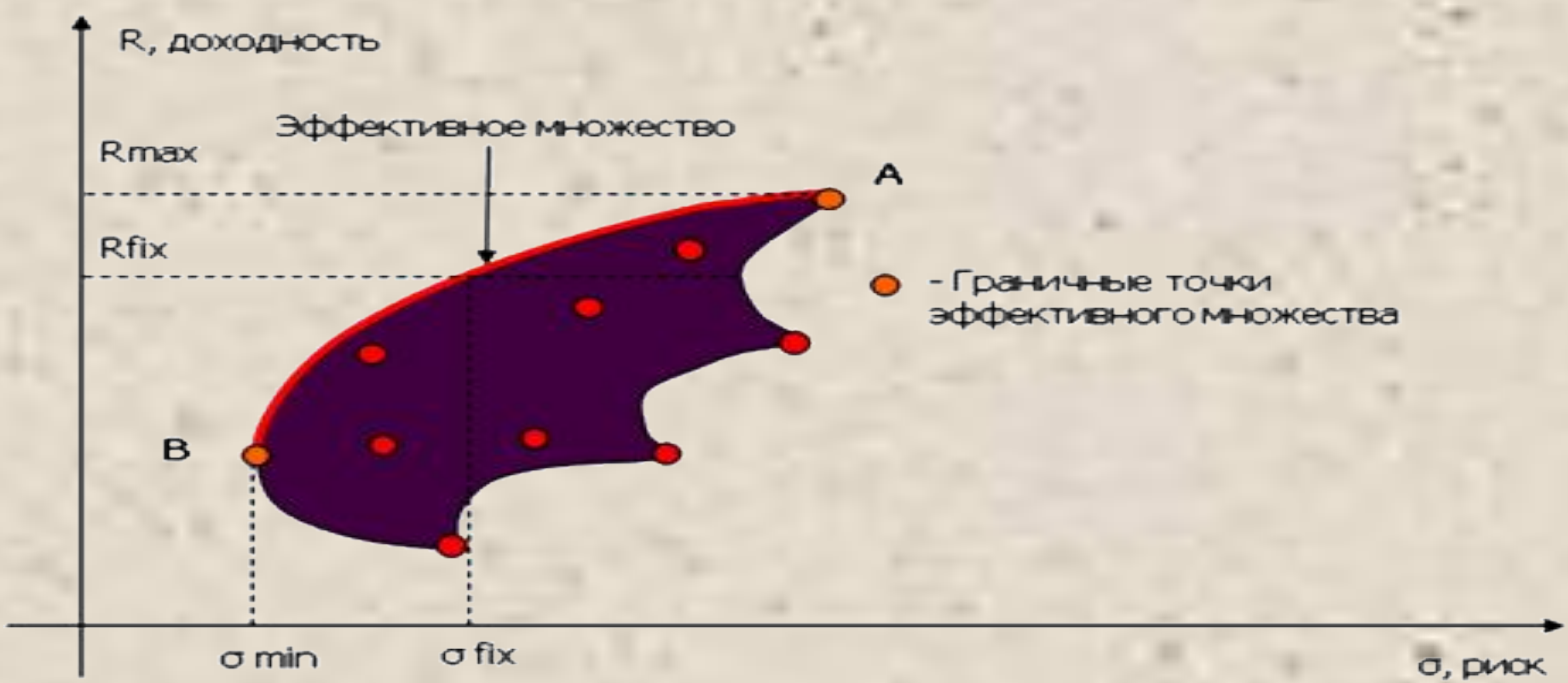
$$\sigma_p{}^2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2 = \left(\sigma_1 x_1 - \sigma_2 \frac{x_1\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 = 0$$

**Таким образом, при обратной корреляции возможно такое распределение вложений, при которой риск полностью отсутствует.**

# Эффективный инвестиционный портфель

- *Эффективный портфель* – это портфель подверженных риску ценных бумаг (активов), дающий максимальный средний доход из всех портфелей с одинаковой дисперсией.

- *Эффективное множество для произвольного количества ЦБ*
- Наилучшими являются портфели, лежащие на эффективном множестве. Это портфели, удовлетворяющие максимальной доходности при заданном уровне риска и минимальному риску при заданной доходности. Ключевыми точками эффективного множества являются портфели с максимальной доходностью (А) и минимальным риском (В).



# Модели оптимального портфеля

- Задача оптимизации сводится к определению такой структуры состава портфеля(т.е. x1,x2,… инвестиций, чтобы величина ожидаемого дохода – mp и - уровень риска $\sigma_p$ соответствовали целям инвесторов.
- При этом целевой функцией может быть минимизация риска при заданной доходности, либо максимизация дохода при риске не выше заданного, а на компоненты вектора X, представляющего состав портфеля могут накладываться различные ограничения, зависящие от вида сделки, типа участвующих активов, величины открываемых позиций и т. д.

# Модель Блэка

- В **модели Блэка** допустимыми являются любые портфели, т.е. вектор *X* удовлетворяет лишь основному ограничению:
- . $$\sum^{n} x_i = 1$$
- Наличие коротких позиций (отсутствие условия неотрицательности) позволяет реализовать любую, сколь угодно большую доходность, естественно за счет большого риска.

# 2. Модель Марковица

- **Модель Марковица** рассматривает в качестве допустимых только **стандартные** портфели (без коротких позиций). Это значит, что на вектор *X* накладываются два ограничения: основное

$$\sum_{i} x_i = 1$$

- и неотрицательности ***xi ≥ 0*** для всех *i*.

# Модели портфеля ценных бумаг

- **Портфель называют стандартным, если инвестор по каждому активу находится в длинной (*long*) позиции. Длинная позиция – это обычно покупка актива с намерением его последующей продажи (закрытие позиций).**
- **Особенностью модели Марковица является то, что доходность любого стандартного портфеля не превышает наибольшей доходности активов, из которых он построен.**

# Модели портфеля ценных бумаг

Оптимальное решение этой задачи обозначим значком *. Если $x_i^* \geq 0$, то это означает рекомендацию вложить долю наличного капитала в ценные бумаги *i*-го вида. Если же $x_i^* < 0$, то содержательно это означает провести операцию «short sale» («короткая продажа»).

# Операция «short sale»

- **Инвестор, формирующий портфель, обязуется через какое-то время поставить ценные бумаги *i*-го вида (вместе с доходом, какой они принесли бы их владельцу за это время). За это сейчас он получает их денежный эквивалент. Эти деньги он присоединяет к своему капиталу и покупает рекомендуемые оптимальным решением ценные бумаги. Так как ценные бумаги других видов (т.е. не *i*-го вида) более эффективны, то инвестор оказывается в выигрыше. Можно обойтись и без операции «short sale», если инвестору доступны займы денежных средств по безрисковой ставке.**

В модели Марковица обычно рассматриваются два типа задач оптимизации портфелей: 1.Минимального риска при заданном уровне доходности;

2. Максимальной доходности при уровне риска не превышающем заданного значения.

## 1.Портфель Марковица минимального риска.

- Найти вектор *X** распределения исходного капитала, минимизирующий риск (вариацию) портфеля

$$\sigma_P = \sqrt{X^T \cdot \overline{\overline{COV}} \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{N} x_i \times x_j \times r_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j} => \min$$

- при заданной эффективности портфеля

$$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i \geq m_e$$

- и условии, что сумма долей активов в портфеле должна составлять единицу

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad x_i \geq 0$$

***Пример***

Сформировать портфель минимального риска из двух видов ценных бумаг - А с доходностью 10% и риском 20% и В с доходностью 5% и риском 10% при условии, что обеспечивается доходность портфеля не менее 8%. Коэффициент корреляции равен 0.2.

***Решение.***

Модель Марковица может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо найти вектор X= (X1, X2), минимизирующий риск портфеля ***σ****p.*

$X_1$ - доля в портфеле ценных бумаг А;

$X_2$ - доля в портфеле ценных бумаг В,

$$\sigma_p = \sqrt{X^T \times COV \times X} = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + 2x_1x_2\ \sigma_1\sigma_2 r_{1,2} + \sigma_2^2 x_2^2} =$$

$$= \sqrt{20^2 x_1^2 + 2x_1x_2 20 \times 10 \times 0.2 + 10^2 x_2^2} \rightarrow min$$

При ограничениях:

$X_1 + X_2 = 1$

$10 \times X_1 + 5 \times X_2 \geq 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

# Решение: строим модель

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | акция А | акция В | | коэф. корреляции | | |
| 2 | доходность (%) | 10 | 5 | | 0,2 | | |
| 3 | риск (%) | 20 | 10 | | риск портфеля | | |
| 4 | доли в портфеле | 50,00% | 50,00% | | 12,04 | | |
| 5 | ограничения: | | | | | | |
| 6 | доходность портфеля | 7,50 | >= | 8 | | | |
| 7 | доли бумаг | 100,00% | = | 1 | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | |

=КОРЕНЬ(B4^2*B3^2+2*B3*C3*B4*C4*E2+C3^2*C4^2)

=СУММПРОИЗВ(B2:C2;B4:C4)

=B4+C4

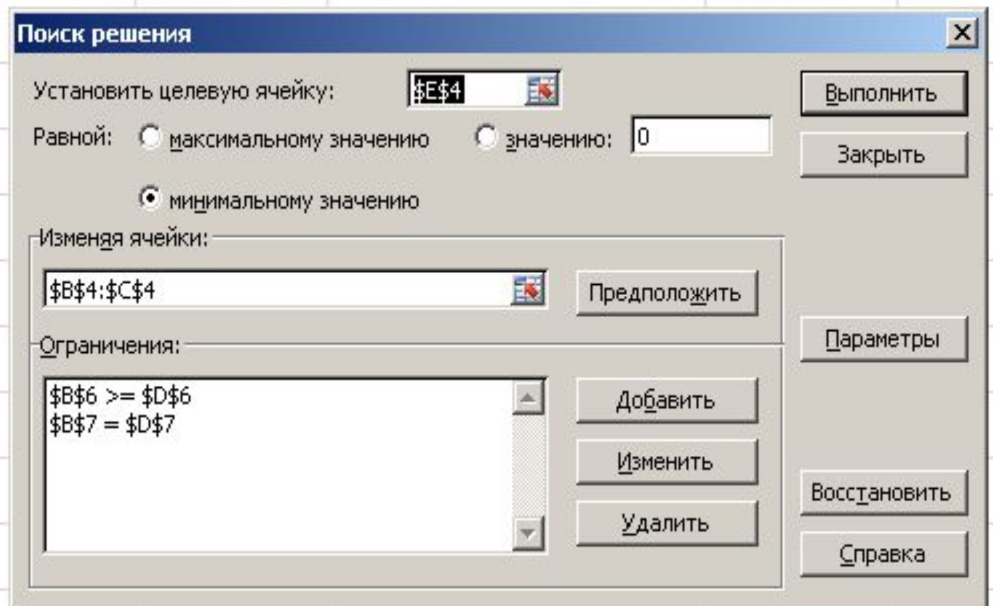
# Решение: поиск оптимального решения

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | акция А | акция В | | коэф. корреляции |
| 2 | доходность (%) | 10 | 5 | | 0,2 |
| 3 | риск (%) | 20 | 10 | | риск портфеля |
| 4 | доли в портфеле | 60,00% | 40,00% | | 13,39 |
| 5 | | | | | |
| 6 | доходность портфеля | 8,00 | >= | 8 | |
| 7 | доли бумаг | 100,00% | = | 1 | |

=СУММПРОИЗВ(B2:C2;B4:C4)

=КОРЕНЬ(B4^2*B3^2+2*B3*C3*B4*C4*E2+C3^2*C4^2)

=B4+C4



# 2.Портфель Марковица максимальной эффективности.

- Найти вектор *X**, максимизирующий ожидаемую эффективность портфеля

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \Longrightarrow \max$$

- при уровне риска не превышающем заданного значения

$$\sqrt{X^{\grave{O}} \cdot \overline{\overline{COV}} \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{N} X_i \times X_j \times r_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j} \le \sigma_e$$

- и условии, что сумма долей активов в портфеле должна составлять единицу

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0$$

## Пример.

Найти оптимальный портфель максимальной эффективности для трех ценных бумаг А, В и С со следующими доходностью и риском:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| $m_i$ (%) | 20 | 11 | 12 |
| $\sigma_i$ | 30 | 15 | 20 |

Матрица коэффициентов корреляции

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 0.5 | 0.3 |
| B | 0.5 | 1 | 0.7 |
| C | 0.3 | 0.7 | 1 |

Верхняя граница риска задана равной 0,2.

***Решение.***

Необходимо найти вектор $\mathbf{X=(X_1,X_2,X_3)}$, максимизирующий доходность портфеля $\mathbf{m_p}$.

$\mathbf{X_1}$ – доля в портфеле ценных бумаг А,
$\mathbf{X_2}$ – доля в портфеле ценных бумаг В,
$\mathbf{X_3}$ – доля в портфеле ценных бумаг С.

$$\mathbf{m_p=20\times X_1+11\times X_2+12\times X_3\rightarrow max}$$

при ограничениях

$$\mathbf{X_1 + X_2 + X_3 = 1}$$

$$\boldsymbol{\sigma_p} = \sqrt{X^T \times COV \times X} \leq \mathbf{20}$$

$$\mathbf{X_1, X_2, X_3 \geq 0}$$

# Решение: строим модель

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | B | C | |
| 2 | **доходность (%)** | 20 | 11 | 12 | |
| 3 | **риск (%)** | 30 | 15 | 20 | |
| 4 | **доли в портфеле** | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | **корреляции** | **A** | **B** | **C** | |
| 7 | A | 1 | 0,5 | 0,3 | |
| 8 | B | 0,5 | 1 | 0,7 | |
| 9 | C | 0,3 | 0,7 | 1 | |
| 10 | | | | | |
| 11 | **ковариации** | **A** | **B** | **C** | |
| 12 | A | 900 | 225 | 180 | |
| 13 | B | 225 | 225 | 210 | |
| 14 | C | 180 | 210 | 400 | |
| 15 | | | | | |

=B7*B3*B

=C7*B3*C

=D7*B3*D

# Решение: поиск оптимального решения

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | B | C | | | | |
| 2 | доходность (%) | 20 | 11 | 12 | | | | |
| 3 | риск (%) | 30 | 15 | 20 | | риск портфеля | | |
| 4 | доли в портфеле | 50,60% | 16,69% | 32,72% | | **20,00** | <= | 20,00 |
| 5 | | | | | | =КОРЕНЬ(МУМНОЖ(F12:H12;F7:F9)) | | |
| 6 | **корреляции** | **A** | **B** | **C** | | доли в портфеле | | |
| 7 | A | 1 | 0,5 | 0,3 | | 0,51 | | |
| 8 | B | 0,5 | 1 | 0,7 | | 0,17 | | |
| 9 | C | 0,3 | 0,7 | 1 | | 0,33 | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | **ковариации** | **A** | **B** | **C** | | =МУМНОЖ(B4:D4;B12:D14) | | |
| 12 | A | 900 | 225 | 180 | | 551,81 | 220,09 | 256,98 |
| 13 | B | 225 | 225 | 210 | | | | |
| 14 | C | 180 | 210 | 400 | | | | |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | |
| 17 | доходность портфеля | **15,88** | =СУММПРОИЗВ(B2:D2;B4:D4) | | | | | |
| 18 | доли бумаг | **1,00** | = | 1 | | | | |

# Модель Тобина-Шарпа-Литнера

(D. Tobin – также впоследствии лауреат Нобелевской премии)

В этой модели предполагается наличие так назывемых безрисковых активов, доходность которых не зависит от состояния рынка и имеет постоянное значение.

Пусть $m_0$ – эффективность безрисковых бумаг, а $x_0$ – доля капитала, в них вложенного, тогда в рисковую часть портфеля вложена $(1- x_0)$ часть всего капитала. Пусть $m_r$ – эффективность и $V_r$ – вариация (дисперсия) рисковой части портфеля, и $r_r = \sqrt{V_r}$ – риск этой рисковой части.

# Модель Тобина-Шарпа-Литнера

- **Эффективность всего портфеля равна**

$$m_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) m_r$$

- **Вариация портфеля равна:**

$$V_p = (1 - x_0)^2 V_r$$

- **Риск портфеля:**

$$r_p = \left|1 - x_0\right| r_r$$

- **После преобразований получим**

$$x_0 = 1 - \frac{r_p}{r_r} = \frac{r_r - r_p}{r_r}$$

# Модель Тобина-Шарпа-Литнера

- **Считается, что безрисковые бумаги не коррелированны с остальными.**
- **Эффективность портфеля линейно зависит от его риска:**

$$m_p = m_0 + \frac{(m_r - m_0) r_p}{r_r}$$

# 3.Модель с N рисковыми бумагами Тобина

- Модель Тобина –комбинированный портфель включающий , как рисковые , так и безрисковые ценные бумаги с гарантированной доходностью – $m_f$ и долей $x_o$.
- Найти вектор $X^*$ распределения исходного капитала, минимизирующий риск (вариацию) портфеля

$$\sigma_P = \sqrt{X^T \cdot \overline{\overline{COV}} \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} x_i \times x_j \times \rho_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j} \Rightarrow \min$$

- при заданной эффективности портфеля и условии, что сумма долей активов в портфеле должна составлять единицу

- $$m_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \geq m_f$$ и $$x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

# Выводы

- Современная портфельная теория основывается на допущении, что инвесторы имеют возможность распределять богатство среди множества доступных направлений инвестирования, - то есть формировать инвестиционный портфель. Причем критериями оценки эффективности инвестиционных решений являются только два параметра - ожидаемая доходность и стандартное отклонение доходности.
- Эффект диверсификации состоит в возможности снижения риска инвестирования (без ущерба для доходности) путем распределения инвестиций среди доступных направлений. Чем больше степень диверсификации и чем меньше корреляция между доходностью выбранных финансовых активов - тем большими являются возможности по снижению риска.

- Предоставляемые рынком возможности по выбору желаемой комбинации ожидаемой доходности и риска инвестиций ограничены. Эффективным портфелем называется портфель с максимальной для данной величины риска ожидаемой доходностью, либо, что то же самое - с минимальным для данной величины доходности риском. Совокупность всех возможных эффективных портфелей образует границу эффективности. Рациональные инвесторы всегда стремятся к формированию эффективного портфеля. Какой именно эффективный портфель выберет инвестор - зависит от его индивидуальных отношений предпочтения между риском и ожидаемым доходом. Если на рынке существует безрисковая ставка доходности, задача инвестора сводится к выбору комбинации рискованных и безрисковых инвестиций.
- Модель Марковица представляет собой задачу выбора эффективного портфеля - то есть формирования портфеля, обеспечивающего минимальный риск при заданном уровне ожидаемой доходности. В общем случае, модель Марковица представляет собой задачу квадратичного программирования и может быть решена стандартными методами. Наиболее сложная проблема, связанная с практическим использованием модели Марковица - подготовка исходной информации об ожидаемой доходности, стандартном отклонении и коэффициентах ковариации финансовых активов.