Теория
матричных игр

Основные понятия теории матричных игр

Теория игр – математическая теория конфликтных ситуаций, целью которой является выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.

Конфликтная ситуация – это столкновение интересов двух или более сторон.

Игра – это математическая модель конфликтных ситуаций, а также система предварительно оговоренных правил и условий.

Партией называется частичная реализация правил и условий игры. Результатом игры всегда является число v, которое называется выигрышем, проигрышем или ничьей.

- если $v > 0$ – выигрыш
- если $v < 0$ – проигрыш
- если $v = 0$ – ничья

Партии состоят из ходов. ***Ходом*** называется выбор игроком одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление.

Ходы бывают:

личными – когда игрок сознательно выбирает и осуществляет тот или другой вариант действия (пример — любой ход в шахматах);

случайными – когда выбор осуществляется не волей игрока, а каким-то механизмом случайного выбора (бросание монеты, игральной кости).

Игры бывают:

парные – игра между двумя игроками;

множественные – в них участники могут образовывать коалиции (постоянные или временные);

кооперативные – играют более двух человек, которые образуют кооперации до конца игры;

коалиционные – объединение, но не до конца игры;

не коалиционные – с начала и до конца каждый играет сам за себя.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. В зависимости от стратегий игры делятся на ***конечные*** и ***бесконечные***.

Игра называется ***конечной***, если у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий (в противном случае игра называется ***бесконечной***).

Игра с нулевой суммой (один выиграл (v), ***другой проиграл*** ($-v$)) – это игра, в которой сумма выигрышей игроков равна нулю ($v+(-v)=0$ (т.е. каждый игрок выигрывает только за счет других).

Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – ***антагонистическая игра,*** здесь два игрока четко играют друг против друга.

Игры бывают с ***полной информацией***, в этом случае игроки четко знают все правила игры и четко знают все шаги противника, и с ***неполной информацией***.

Результат игры записывается в ***платежную матрицу***.

Игра «орел - решка»

	B_1 «орел»	B_2 « решка»
A_1 «орел»	**1**	**-1**
A_2 « решка»	**-1**	**1**

Нижней чистой ценой игры называется $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$

Верхней чистой ценой игры называется $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$

Игра, для которой $\alpha = \beta$, называется ***игрой с седловой точкой***,

где $\alpha = \beta = v$ называется ***ценой игры***.

Элемент, стоящий на пересечении α и β, называется ***седловым элементом*** матрицы.

Задача теории игр – поиск оптимальных стратегий (решений).

Решением игры называется пара оптимальных стратегий для игроков *A* и *B*, значение цены игры.

Наличие седловой точки означает наличие равновесия в игре.

Чистые и смешанные стратегии

Чистой стратегией называют ход, выбранный с вероятностью 1.

Смешанной стратегией игрока *A* называется вектор

$$\vec{p} = (p_1, \ldots\ldots p_m) \;\; p_i \geq 0 \, (i = \overline{1, m}), \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Смешанной стратегией игрока *B* называется вектор

$$\vec{q} = (q_1, \ldots\ldots q_n) \;\; q_j \geq q \, (j = \overline{1, n}), \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j -$$ *платежная функция*.

$\overrightarrow{P_i} \, (0,0,0,\ldots,1,0\ldots) -$ *чистая стратегия*

Пара стратегий $\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}$ называется ***оптимальной***, если

$$f(\vec{p}, \overrightarrow{q^*}) \leq f(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}) \leq f(\overrightarrow{p^*}, \vec{q}).$$

Теорема1 $\alpha \le \beta$

Средний выигрыш или проигрыш лежит между α и β.

Теорема 2 (основная теорема теории игр). В терминах смешанных стратегий любая конечная игра имеет решение.

Теорема 3 Для того, чтобы смешанные стратегии $\overrightarrow{p^*} = (p_1, \ldots\ldots p_m)$ $\overrightarrow{q^*} = (q_1, \ldots\ldots q_n)$ были оптимальными в матричной игре $(a_{ij})_{m \times n}$, необходимо и достаточно :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge \upsilon \quad (j = \overline{1,n}), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \upsilon \quad (i = \overline{1,m}). \end{cases}$$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

p_i – вероятность применения игроком i – ой стратегии

$$
\begin{cases}
a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \geq v \\
\vdots \\
a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \leq v
\end{cases}
$$

Активной стратегией называется стратегия, входящая в оптимальную смешанную стратегию с ненулевой вероятностью.

Теорема 4 Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равен цене игры, не зависимо от того, какую стратегию принимает второй игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Пример:

$$\begin{array}{c c}
\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & -6 \\ 2 & 7 & -9 & -10 \\ 2 & -5 & 3 & -7 \\ -10 & 12 & -15 & 25 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \\
\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} &
\end{array}$$

невыгодна

Стратегия A_k игрока *А* называется ***доминирующей*** над стратегией A_l, если $a_{k,j} > a_{l,j} \ (j = \overline{1,n})$,

а ***стратегия*** A_l - ***доминируемой***.

B_k - доминирующая над B_l, если $b_{i,k} \le b_{i,l} \ (i = \overline{1,n})$

Доминируемые стратегии можно убирать из матрицы игры, от этого решение не изменится.

$$(a_{i,j})_{m\times n} \quad (1)$$

$$(ba_{i,j}+c)_{m\times n} \quad (2)$$

$$b, c \geq 0$$

Теорема 5 Оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* в матричной игре (1) с ценой игры v будут оптимальными и в матричной игре (2) с ценой $v = bv + c$.

Пример исследования матричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение матричной игры 2×2

$$\begin{array}{c|c} & \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \\ p_2 = 1 - p_1 \end{array}$$

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = v$$
$$a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1) = v$$
$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = v$$
$$p_1(a_{12} - a_{22}) + a_{22} = v$$
$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = p_1(a_{12} - a_{22}) + a_{22}$$
$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = v$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}$$ – аналитический метод решения

Для q_i: $a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = v$