Занятие № 4

Контур с током в магнитном поле

2-й модуль 2-го семестра

A1. Многовитковый плоский контур содержит $N = 1000$ витков тонкого провода. Контур квадратного сечения со стороной $a = 10$ см. Найти магнитный момент контура p_m , если по нему течет ток $I = 1$ А.

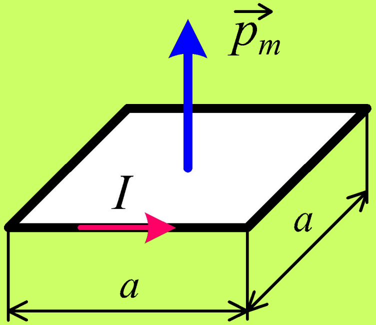
Дано :
$N = 1000$
$a = 10$ см
$I_1 = 1$ А
p_m - ?

Магнитный момент контура с током – это вектор :

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{S} = I \cdot \vec{n} \cdot S = NI_1 \cdot \vec{n} \cdot S$$

Здесь вектор n – это нормаль к плоскости контура, направление которой находят по правилу правого винта; I_1 – ток в одном витке; S –

$$S = a^2$$



Модуль магнитного момента контура с током :

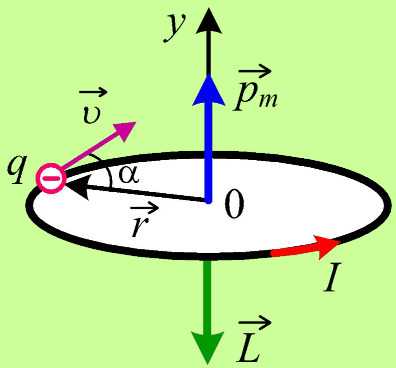
$$p_m = NI_1 \cdot a^2$$

$$p_m = 10^3 \cdot 1 \cdot 0{,}1^2 = 10 \ (A \cdot м^2).$$

Ответ: $p_m = 10$ А·м^2.

А2. (Ч.22.18) Электрон в **атоме водорода** движется вокруг ядра по круговой орбите некоторого радиуса. Найти отношение магнитного момента p_m эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона. Указать направления векторов магнитного момента и момента импульса .

Дано:
$e = q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл*
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*
p_m / L - ?



Магнитный момент контура с током :

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{S} = I \cdot \vec{n} \cdot S$$

Направление вектора нормали n к плоскости контура находится по правилу правого винта; S – площадь ви

Модуль магнитного момента контура с током :

$$p_m = I \cdot S = \pi r^2 I \quad (1)$$

Движение электрона по круговой орбите представим как контурный ток с величиной :

$$I = \frac{q}{T} = q\frac{\omega}{2\pi} = q\frac{\upsilon}{2\pi r} \quad (2)$$

Подставим (1) в (2) и получим окончательную формулу для магнитного момента :

$$p_m = \pi r^2 I = \pi r^2 \cdot q\frac{\omega}{2\pi} = q\frac{\omega r}{2}r = q\frac{\upsilon}{2}r = \frac{1}{2}q\upsilon r \quad (3)$$

$$\omega r = \upsilon$$

Момент импульса электрона, движущегося по окружности относительно центра орбиты (направление вектора находится по правилу правого винта):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}] \quad (4)$$

$$L = -rm\upsilon \cdot \sin\alpha = -rm\upsilon \cdot \sin\frac{\pi}{2} = rm\upsilon \quad (5)$$

Найдем отношение:

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q\upsilon r}{rm\upsilon} = -\frac{q}{2m}$$

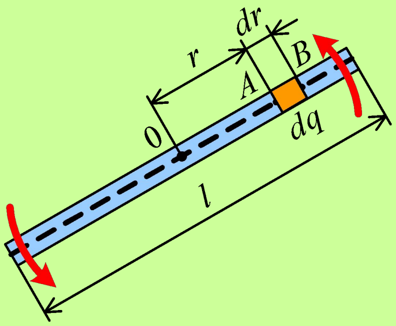
$$\frac{p_m}{L} = -\frac{q}{2m} = -\frac{1{,}6 \cdot 10^{-16}}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}} = -87{,}9 \cdot 10^{9}\ (Кл/кг).$$

Знак минус «–» показывает, что векторы магнитного и механического моментов направлены в противоположные стороны.

А3. По тонкому стержню длиной l = 1 м равномерно распределен заряд q = 0,24 мКл. Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω = 100 рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить магнитный момент p_m, обусловленный вращением заряженного стержня.

Дано:
q = 0,24 мКл
l = 1 м
ω = 100 рад/с
P_m - ?

Вращение распределенного по стержню заряда представим совокупностью круговых токов, имеющих радиус траектории r, изменяющийся от нуля до $l/2$.



Элементарный заряд dq, сосредоточенный на отрезке dl :

$$\boxed{dq = \frac{q}{l}dr}$$

Круговой ток, образованный вращающимся с угловой скоростью ω зарядом dq :

$$I(r) = \frac{dq}{T} = \frac{q}{l}dr \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{q\omega}{2\pi l}dr$$

Магнитный момент, созданный вращающимся элементарным током :

$$\boxed{\vec{p}_m(r) = I(r)\vec{S}(r) = \frac{q\omega}{2\pi l}dr \cdot \pi r^2 \vec{n} = \frac{q\omega}{2l} \cdot r^2 d\vec{r}}$$

Модуль магнитного момента вращающегося элементарного тока :

$$\boxed{p_m(r) = I(r)S(r) = \frac{q\omega}{2l} \cdot r^2 dr}$$

Результирующий (суммарный) модуль магнитного момента всего вращающегося стержня :

$$P_m = \int_{-l/2}^{l/2} p_m(r)\ dr = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{q\omega}{2l} \cdot r^2 dr = \frac{q\omega}{6l} \cdot r^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{q\omega}{24} \cdot l^2$$

$$P_m = \frac{0{,}24 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{24} \cdot 1^2 = 10^{-3} \ (A \cdot м^2).$$

Ответ: $p_m = 10^{-3}$ А·м²

А4. Из проволоки длиной l = 20 см сделаны квадратный и круговой контуры. Найти вращающие моменты сил M_1 и M_2, действующие на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,1 Тл. По контурам течет ток I = 2 А. Плоскость каждого контура составляет угол α = 45° с направлением поля.

Дано:
l = 0,2 м
B = 0,1 Тл
I = 2 А
α = 45°
M_1, M_2 - ?

Механический вращающий момент сил M, действующий на рамку стоком I, помещенную в магнитное поле с индукцией B :

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right] \quad (1)$$

(вектор M перпендикулярен векторам B и p_m , т.е. $M \perp B$ и

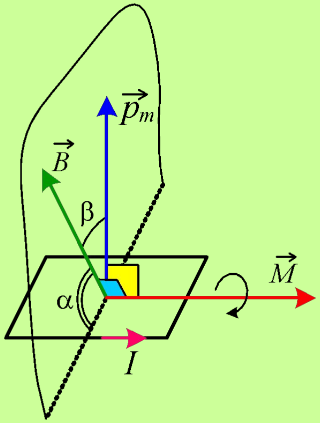
Модуль вращающего момента сил :

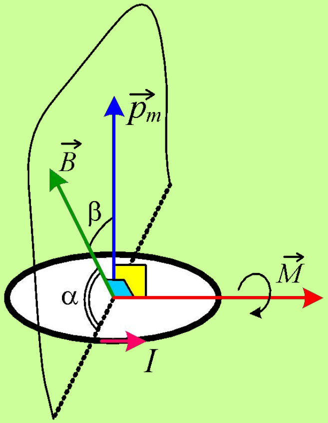
$$M = p_m B \cdot \sin\beta = IS \cdot B \cdot \sin\beta \quad (2)$$

(β - угол между векторами p_m и

Углы α и β дополняют друг друга до прямого угла ($\alpha + \beta = 90^\circ$), поэтому модуль момента сил (2) перепишется в виде :

$$M = IS \cdot B \cdot \sin(\pi/2 - \alpha) = IS \cdot B \cdot \cos\alpha \quad (3)$$





Площади квадратного контура и круглого контуров равной длины:

$$S_{кв} = (l/4)^2 \qquad S_{кр} = \pi r^2 = \pi(l/2\pi)^2 = l^2/4\pi \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) :

$$M_1 = M_{кв} = IS_{кв}B \cdot \cos\alpha = I\frac{l^2}{16}B \cdot \cos\frac{\pi}{4} \qquad M_1 = 2 \cdot \frac{0{,}2^2}{16} 0{,}1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}5 \cdot 10^{-4}\ (H \cdot м).$$

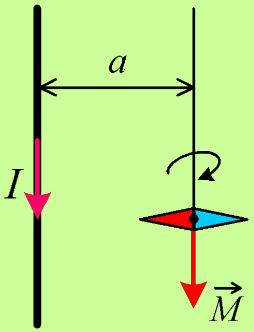
$$M_2 = M_{кр} = IS_{кр}B \cdot \cos\alpha = I\frac{l^2}{4\pi}B \cdot \cos\frac{\pi}{4} \qquad M_2 = 2 \cdot \frac{0{,}2^2}{4\pi} 0{,}1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\ (H \cdot м).$$

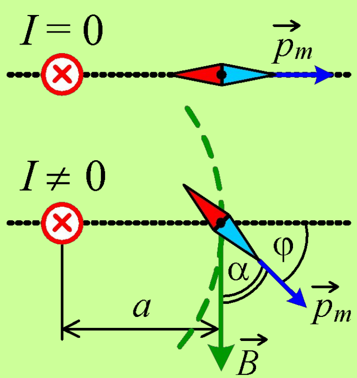
А5. (В.11.61) На расстоянии a = 20 см от длинного прямолинейного вертикального проводника на длинной упругой нити висит короткая магнитная стрелка, магнитный момент которой p_m = 0,01 А·м^2. Стрелка находится в плоскости, проходящей через проводник и нить. На какой угол φ повернется стрелка, если по проводнику пустить ток I = 30 А? Постоянная кручения нити C = 2,5 ·10^{-9} Н·м/град. Система экранирована от магнитного поля Земли.

Дано:
a = 0,2 м
P_m = 0,01 А·м^2
I = 30 А
C = 2,5·10^{-9} Н·м/град
φ - ?

До включения тока: провод, нить и стрелка находятся в одной плоскости. Вектор магнитного момента стрелки направлен по перпендикуляру к проводу, идущему через точку подвеса стрелки.

После включения тока: стрелка начнет вращаться под действием вращательного момента сил и закручивать нить до тех пор, пока этот момент сил не уравновесится моментом силы упругости кручения нити. При малых деформациях нити (малых углах закручивания φ) момент сил M, угол φ и постоянная кручения нити C связаны линейной зависимостью :





$$\vec{M} = C \cdot \vec{\varphi} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right] \qquad \alpha + \varphi = \pi/2$$

$$M = C \cdot \varphi = p_m B \cdot \sin\alpha = p_m B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = p_m B \cdot \cos\varphi$$

Получили трансцендентное уравнение для угла φ :

$$C \cdot \varphi = p_m B \cdot \cos\varphi \qquad \boxed{\frac{\cos\varphi}{\varphi} = \frac{C}{p_m B}}$$

Угол φ дан в *градусах*, это следует из *размерности* модуля упругости C.

Магнитная индукция поля, созданного током в прямом бесконечном проводе на расстоянии a :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \rightarrow \boxed{\frac{\cos\varphi}{\varphi} = \frac{2\pi a C}{p_m \mu_0 I}}$$

$$\frac{\cos\varphi}{\varphi} = \frac{2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-9}}{0{,}01 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 30} = \frac{5}{6} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{120^\circ}$$

Подстановкой легко проверить, что

$$\varphi = 60^\circ$$

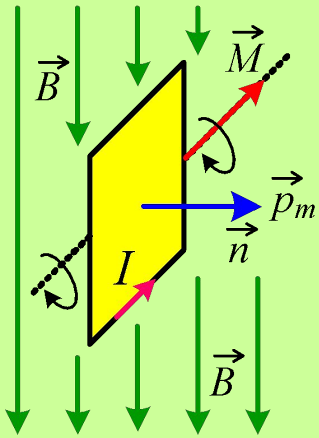
6. Квадратная рамка с площадью $S = 10^{-4}$ м^2 содержит $N = 400$ витков тонкого провода. Рамка подвешена в магнитном поле на упругих нитях, проходящих через середины ее противоположных сторон. Плоскость рамки параллельна линиям индукции величиной $B = 30$ мТл. Постоянная кручения нитей $C = 10$ мкН·м/град. Определить, на какой угол повернется рамка вокруг нити, если через нее пропустить ток $I = 1$ А?

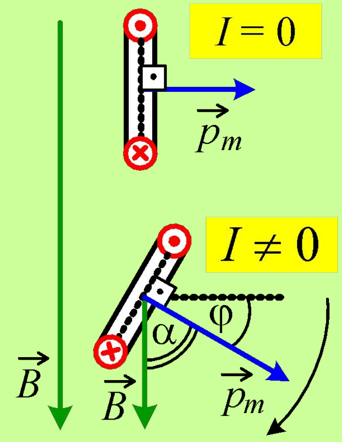
Дано:
$S = 10^{-4}$ м^2
$N = 400$
$B = 0{,}03$ Тл
$I = 1$ А
$C = 10\cdot 10^{-6}$ Н·м/град
φ - ?

До включения тока: плоскость рамки параллельна вектору магнитной индукции. Вектор магнитного момента рамки перпендикулярен плоскости рамки согласно правилу правого винта.

После включения тока: рамка начнет вращаться под действием вращательного момента сил, действующих со стороны магнитного поля, и будет закручивать нить до тех пор, пока этот момент сил не уравновесится моментом силы упругости кручения нити. При малых деформациях нити (малых углах закручивания φ) момент сил M, угол φ и постоянная кручения нити C связаны линейной зависимостью :

$$\boxed{\vec{M} = C\cdot\vec{\varphi} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]} \qquad \alpha + \varphi = \pi/2 \qquad p_m = INS$$





$$M = C\cdot\varphi = p_m B\cdot\sin\alpha = p_m B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = p_m B\cdot\cos\varphi$$

Получаем трансцендентное уравнение для угла φ :

$$C\cdot\varphi = p_m B\cdot\cos\varphi$$

Угол φ дан в *градусах*, это следует из *размерности* модуля упругости C.

$$\boxed{\frac{\cos\varphi}{\varphi} = \frac{C}{p_m B} = \frac{C}{INS\cdot B}} \qquad \frac{\cos\varphi}{\varphi} = \frac{10^{-5}}{1\cdot 400\cdot 10^{-4}\cdot 30\cdot 10^{-3}} = \frac{1}{120^\circ}$$

Подстановкой легко проверить, что

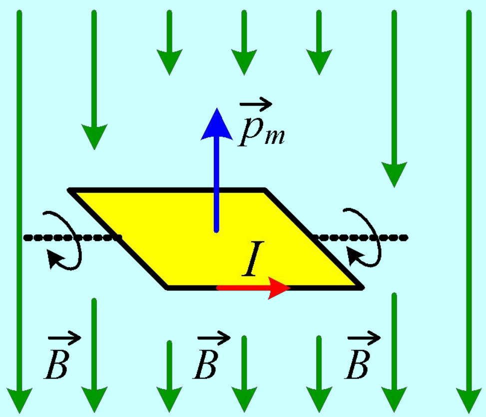
$$\varphi = 60^\circ$$

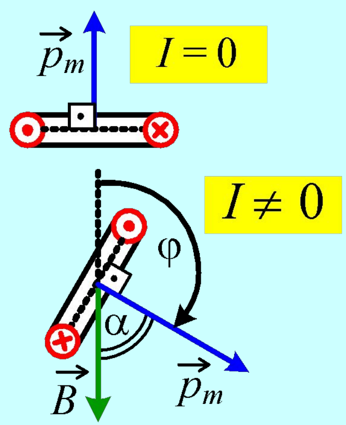
А7. Квадратная рамка со стороной длиной *a* = 1 см, содержащая *N* = 200 витков тонкого провода, подвешена в магнитном поле с индукцией *B* = 30 мТл на упругих нитях, проходящих через середины ее противоположных сторон. Постоянная кручения нитей *C* = 10 мкН·м/град. Ось вращения рамки совпадает с нитью. Найти угол поворота рамки, если через нее пропустить ток *I* = 1 А? Магнитный момент, возникающий у рамки после включения тока, направлен против индукции внешнего магнитного поля.

Дано:
a = 1 см
N = 200
B = 0,03 Тл
I = 1 А
C = $10 \cdot 10^{-6}$ Н·м/град
φ -?

До включения тока: плоскость рамки перпендикулярна вектору магнитной индукции, а также - вектору магнитного момента рамки по правилу правого винта. Вектор магнитного момента рамки с током направлен навстречу вектору магнитной индукции (неустойчивое равновесие рамки).

После включения тока: рамка начнет вращаться под действием вращательного момента сил, действующих со стороны магнитного поля, и будет закручивать нить до тех пор, пока этот момент сил не уравновесится моментом силы упругости кручения нити. При малых деформациях нити (малых углах закручивания φ) момент сил *M*, угол φ и постоянная кручения нити *C* связаны линейной зависимостью :





$$\boxed{\vec{M} = C \cdot \vec{\varphi} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]} \qquad \alpha + \varphi = \pi/2 \qquad p_m = INS = INa^2$$

$$M = C \cdot \varphi = p_m B \sin\alpha = p_m B \sin(\pi - \varphi) = p_m B \sin\varphi$$

Получаем трансцендентное уравнение для угла φ :

$$C \cdot \varphi = p_m B \cdot \sin\varphi = INa^2 B \cdot \sin\varphi$$

Угол φ дан в *градусах*, это следует из *размерности* модуля упругости *C*.

$$\boxed{\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{C}{INa^2 B}} \qquad \frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{10^{-5}}{1 \cdot 200 \cdot 0{,}01^2 \cdot 30 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{60^\circ}$$

Подстановкой легко проверить, что $\varphi = 30^\circ$

А8. (В.11.60) Катушка гальванометра, состоящая из N = 400 витков тонкой проволоки, намотанной на прямоугольный каркас длиной a = 3 см и шириной b = 2 см, подвешена на нити в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл. По катушке течет ток I = 0,1 мкА. Найти вращающийся момент M, действующий на катушку гальванометра, если плоскость катушки: а) параллельна направлению магнитного поля; б) составляет угол φ = 60° с направлением магнитного поля.

Дано:
$N = 400$
$a = 3$ см
$b = 2$ см
$B = 0{,}1$ Тл
$I = 0{,}1$ А
$\varphi_1 = 0$
$\varphi_2 = 60°$
M_1, M_2 - ?

Вращающийся момент сил M, действующий на катушку:

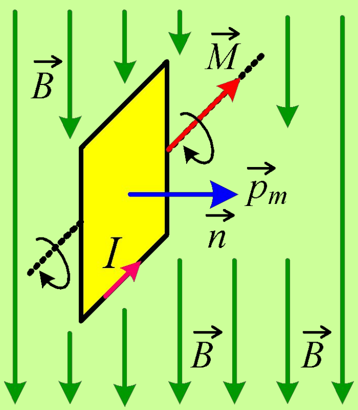
$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]$$

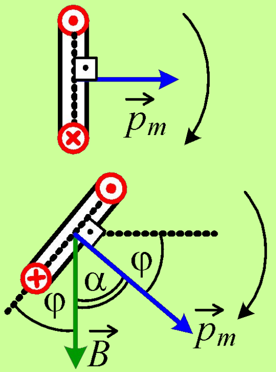
Углы φ и α дополняют друг друга до прямого угла :

$$\alpha + \varphi = \pi/2$$

Магнитный момент рамки с током и ее площадь :

$$p_m = IN \cdot S = IN \cdot ab \qquad S = ab$$





Перейдем к модулю вращательного момента сил, действующих на рамку с током со стороны магнитного поля :

$$\boxed{M = p_m B \sin\alpha = p_m B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = p_m B \cos\varphi}$$

Получаем окончательное выражение для модуля вращательного момента сил, действующих на рамку со стороны магнитного поля :

$$\boxed{M = p_m B \cdot \cos\varphi = IN \cdot abB \cdot \cos\varphi}$$

$$M_1 = IN \cdot abB \cdot \cos 0 = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}1 \cdot 1 = 2{,}4 \cdot 10^{-9} \ (Н \cdot м).$$

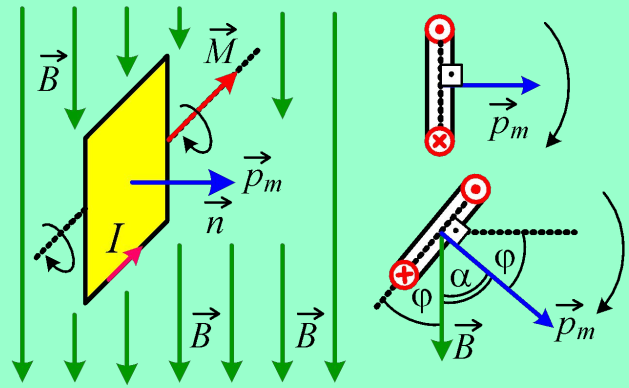
$$M_2 = IN \cdot abB \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 1{,}2 \cdot 10^{-9} \ (Н \cdot м).$$

А9. Катушка гальванометра, состоящая из N = 1000 витков проволоки, подвешена на упругой длинной нити в магнитном поле напряженностью H = 100 А/м так, что ее плоскость параллельна направлению магнитного поля. Длина рамки катушки a = 2 см и ширина b = 1 см. Какой ток I течет по обмотке катушки, если катушка повернулась на угол φ = 0,5°? Постоянная кручения материала нити $C = 10^{-8}$ Н·м/град.

Дано:
a = 2 см
b = 1 см
N = 1000
H = 100 А/м
$C = 10^{-8}$ Н·м/град
φ = 0,5°
μ = 1
I - ?

До включения тока: плоскость рамки параллельна вектору магнитной индукции. Вектор магнитного момента рамки перпендикулярен плоскости рамки (правило правого винта).

После включения тока: рамка вращается под действием момента сил со стороны магнитного поля до тех пор, пока этот момент сил не уравновесит момент силы упругости кручения нити.
При малых деформациях нити (малые углы закручивания φ) момент сил M, угол φ и постоянная кручения нити C связаны линейной зависимостью :



$$\boxed{\vec{M} = C\cdot\vec{\varphi} = [\vec{p}_m, \vec{B}]}$$

Углы φ и α дополняют друг друга до прямого угла. Магнитный момент рамки с током p_m и ее площадь S:

$$\alpha + \varphi = \pi/2 \qquad p_m = IN\cdot S = IN\cdot ab \qquad S = ab$$

Модуль вращательного момента сил, действующих на рамку с током со стороны магнитного поля :

$$\boxed{M = p_m B\sin\alpha = p_m B\sin(\pi/2 - \varphi) = p_m B\cos\varphi}$$

Связь индукции и напряженности магнитного поля :

$$\boxed{B = \mu_0\mu H}$$

Окончательная формула для модуля вращательного момента сил, действующих на рамку со стороны магнитного поля :

$$\boxed{M = IN\cdot ab\cdot\mu_0\mu H\cdot\cos\varphi = C\cdot\varphi}$$

Учтем малость угла φ (cos 0,5° ≅ 1) и найдем ток :

$$\boxed{IN\cdot ab\cdot\mu_0\mu H \cong C\cdot\varphi} \rightarrow I \cong \frac{C\cdot\varphi}{N\cdot ab\cdot\mu_0\mu H}$$

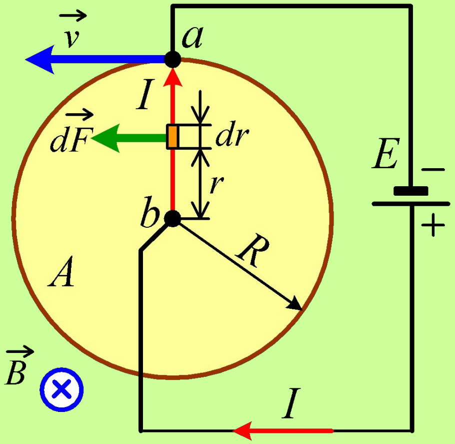
$$I \cong \frac{10^{-8}\cdot 0{,}5}{1000\cdot 2\cdot 1\cdot\cdot 10^{-4} 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 100} = 2{,}0\cdot 10^{-4}\ (A).$$

А10. Однородный медный диск *A* радиусом *R* = 5 см помещен в магнитное поле с индукцией *B* = 0,2 Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля. Ток *I* = 5 А проходит по радиусу диска *ab*
(*a*, *b* – скользящие контакты). Найти вращающий момент, действующий на диск, и мощность такого
.

Дано:
R = 5 см
B = 0,2 Тл
I = 5 А
M - ? *P* - ?

Ток между контактами (*a*, *b*) примем линейным, поскольку ток течет по пути наименьшего сопротивления. Точка *b* диска закреплена, точка *a* диска вращается в направлении вектора линейной скорости **v**. Сила *dF* со стороны магнитного поля, действующая на элемент *dr* токопроводящего участка *ab* диска ($\alpha = \pi/2$ - угол между векторами *dr* и *B*):

$$\boxed{d\vec{F} = I\left[d\vec{r}, \vec{B}\right]} \qquad dF = IB\,dr \cdot \sin\alpha = IB\,dr \qquad \alpha = \pi/2$$



Вращающий момент, действующий на элемент *dr* участка *ab*, находящийся на расстоянии *r* от оси вращения ($\beta = \pi/2$ - угол между векторами *r* и *dF*):

$$\boxed{d\vec{M} = \left[\vec{r}, d\vec{F}\right]} \qquad dM = r\,dF \cdot \sin\beta = IBrdr \cdot \sin\beta = IBrdr$$

Вращающий момент, действующий на весь токопроводящий участок *ab* диска:

$$\boxed{M = \int_0^R dM = \int_0^R IBrdr = \frac{1}{2} IBR^2} \qquad M = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}05^2 = 12{,}5 \cdot 10^{-4}\ (Н \cdot м).$$

Приращение потока магнитного поля через поверхность, описываемую радиусом диска *ab* за один оборот :

$$\Delta\Phi_1 = BS = B \cdot \pi R^2$$

Частота *f* и угловая скорость ω вращения диска :

$$\omega = 2\pi f$$

Число оборотов диска за время *t* :

$$N = f \cdot t = \omega t / 2\pi$$

Общее изменение потока за время *t* :

$$\Delta\Phi = N\Delta\Phi_1 = NB \cdot \pi R^2 = 0{,}5BR^2\omega t$$

Работа, совершаемая за время *t* :

$$A = I \cdot \Delta\Phi = 0{,}5IBR^2\omega t$$

Мощность двигателя :

$$\boxed{P = \frac{A}{t} = \frac{1}{2} IBR^2\omega}$$

- Не дана угловая скорость ω вращения.

Домашнее задание :

Не решать 10 А, 2Б, 8Б – 10 Б.