

# ПРЕДИКАТНІ КОМПОЗИЦІЙНІ СИСТЕМИ

## Предикати та їх різновиди

Предикат на множині  $D$  – це часткова неоднозначна, взагалі кажучи, функція

$$P : D \rightarrow \{T, F\}$$

Область істинності та область хибності предиката  $P$  на  $D$ :

$$T(P) = P^{-1}(T) = \{d \in D \mid T \in P(d)\}$$

$$F(P) = P^{-1}(F) = \{d \in D \mid F \in P(d)\}$$

Якщо  $P$  однозначний, то  $T(P) \cap F(P) = \emptyset$ .

Якщо  $P$  тотальний, то  $T(P) \cup F(P) = D$ .

Предикат  $P : D \rightarrow \{T, F\}$  назвемо:

- неспростовним, або частково істинним, якщо  $F(P) = \emptyset$
- виконуваним, якщо  $T(P) \neq \emptyset$
- всюди невизначеним, якщо  $T(P) = F(P) = \emptyset$
- тотально істинним, якщо  $T(P) = D$
- тотально хибним, якщо  $F(P) = D$
- тотожно істинним, якщо  $T(P) = D$  і  $F(P) = \emptyset$
- тотожно хибним, якщо  $T(P) = \emptyset$  і  $F(P) = D$
- тотально насиченим, якщо  $T(P) = F(P) = D$

Для однозначних предикатів області істинності й хибності:

$$T(P) = \{d \in D \mid P(d) \downarrow = T\} \quad F(P) = \{d \in D \mid P(d) \downarrow = F\}$$

Нехай на  $D$  можна ввести відношення порядку за включенням даних

Предикат  $P$  *монотонний*:

$$d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \subseteq P(d').$$

Предикат  $P$  *антитонний*:

$$d \subseteq d' \Rightarrow P(d') \supseteq P(d).$$

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

Однозначний предикат  $P$  *еквітонний*:

$$d' \supseteq d \text{ та } P(d) \downarrow \Rightarrow P(d') \downarrow = P(d).$$

Для *однозначного часткового* предиката монотонність означає, що його інформативність не зменшується при збільшенні інформативності вхідних даних. Для *монотонних тотальних* предикатів при розширенні вхідних даних інформативність може тільки зменшуватися, для них поняття монотонності малозмістовне, а змістовним (не зменшення інформативності предиката при збільшенні інформативності вхідних даних) є дуальне поняття антитонності.

Водночас для однозначних предикатів поняття антитонності малозмістовне, адже для них антитонними можуть бути лише майже константні предикати:

$$P(d) \cong T \text{ для всіх } d \in D \text{ або } P(d) \cong F \text{ для всіх } d \in D$$

## Іменні множини

$V$ -ІМ над  $A$  – це довільна часткова однозначна функція  $d : V \rightarrow A$

$V$ -ІМ подаємо як  $[v_1 \sqsubseteq a_1, \dots, v_n \sqsubseteq a_n, \dots]$ , де  $v_i \in V$ ,  $a_i \in A$ ,  $v_i \neq v_j$  при  $i \neq j$ .

Введемо функцію  $asn : {}^V A \rightarrow 2^V$ :  $asn(d) = \{v \in V \mid v \sqsubseteq a \in d \text{ для деякого } a \in A\}$ .

Множину всіх  $V$ -ІМ над  $A$  будемо позначати  ${}^V A$ .

$V$ -ІМ  $\delta$   $V$ -повна (максимальна), якщо  $asn(\delta) = V$ .

$V$ -повна ІМ над  $A$  – це тотальна однозначна функція  $V \rightarrow A$ .

Множину всіх  $V$ -повних ІМ над  $A$  будемо позначати  $A^V$ .

Для  $V$ -ІМ вводимо теоретико-множинні операції  $\cap$  та  $\setminus$ .

Параметрична операція  $\parallel X$  звуження  $V$ -ІМ за множиною  $X \subseteq V$ :

$$d \parallel X = \{v \sqsubseteq a \in d \mid v \in X\}.$$

Операція  $\parallel_{-X}$  видалення компонент з іменами із  $X \subseteq V$ :  $d \parallel_{-X} = d \parallel (V \setminus X)$

Замість  $d \parallel_{-\{x\}}$  пишемо  $d \parallel_{-x}$

Введемо відношення  $\underset{-x}{=}$  рівності з точністю до компоненти з іменем  $x$ :

$$d_1 \underset{-x}{=} d_2, \text{ якщо } d_1 \parallel_{-x} = d_2 \parallel_{-x}$$

Операція  $\nabla$  накладки  $V$ -ІМ  $\delta_2$  на  $V$ -ІМ  $\delta_1$ :  $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \parallel (V \setminus asn(\delta_2)))$

Операцію *реномінації*  $r_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} : V A \rightarrow V A$  задамо так:

Скорочено пишемо  $\bar{y}$  замість  $y_1, \dots, y_n$

Операцію реномінації ІМ продовжимо на множини ІМ

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L) = \{r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \mid d \in L\}, \quad L \subseteq V A$$

Монотонність операції реномінації: якщо  $d_1 \subseteq d_2$ , то  $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d_1) \subseteq r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d_2)$

Елімінація тотожних перейменувань:  $r_{\bar{z}, \bar{x}}^{\bar{z}, \bar{v}}(d) = r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)$

Маємо  $r_{y, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(d) (=)_{-z} r_{u, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(d) \quad \begin{matrix} z, \bar{v} \\ y, \bar{x} \end{matrix} d =_{-z} \begin{matrix} \bar{v} \\ \bar{x} \end{matrix} d$

Послідовне застосування двох операцій реномінації  $r_{\bar{y}}^{\bar{u}}$  (внутрішня) та  $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$  (зовнішня) можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назовемо

*згорткою* цих операцій і позначимо

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}} \dot{\mid} \bar{y}$$

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(r_{\bar{y}}^{\bar{u}}(d)) = r_{\bar{x}}^{\bar{v}} \dot{\mid} \bar{y}(d)$$

Нехай маємо послідовне застосування двох операцій реномінації

$$\mathbf{r}_{a, \substack{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k \\ s_1, \dots, s_n, z_1, \dots, z_k}}^{\substack{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \\ x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}}$$

де  $\{w_1, \dots, w_m\} \cap \{u_1, \dots, u_k\} = \emptyset$ . Тоді для всіх  $d \in {}^V A$

$$\mathbf{r}_{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m} (\mathbf{r}_{s_1, \dots, s_n, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k} (d)) \stackrel{m}{=} \mathbf{r}_{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_k} (d)$$

де кожні  $a_i$  та  $b_j$  задаються так:

$$a_i = \begin{cases} x_i & \text{якщо } x_i \notin \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k\}, \\ s_l & \text{якщо } x_i = v_l \text{ для деякого } v_l \\ z_l & \text{якщо } x_i = u_l \text{ для деякого } u_l \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} y_j & \text{якщо } y_j \notin \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k\}, \\ s_l & \text{якщо } y_j = v_l \text{ для деякого } v_l \\ z_l & \text{якщо } y_j = u_l \text{ для деякого } u_l \end{cases}$$

Згортка операцій реномінації асоціативна та некомутативна

## Квазіарні функції та предикати

Функції (зокрема, предикати), задані на ІМ, називають квазіарними

$V$ -квазіарна функція – функція вигляду  $f: {}^V A \rightarrow R$

$V$ -квазіарна функція на  $A$  – функція вигляду  $f: {}^V A \rightarrow A$

$V$ -квазіарний предикат на  $A$  – функція вигляду  $P: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$

Ім'я  $z \in V$  *строго неістотне* для  $V$ -квазіарної функції (предиката)  $g$ , якщо для всіх  $d_1, d_2 \in {}^V A$  таких, що  $d_1 =_{-z} d_2$ , маємо  $g(d_1) = g(d_2)$ .

Ім'я  $z$  *неістотне* для однозначної  $V$ -квазіарної функції (предиката)  $g$ , якщо для всіх  $d_1, d_2 \in {}^V A$  таких, що  $d_1 =_{-z} d_2$ , маємо  $g(d_1) \cong g(d_2)$ .

Для *однозначних еквітонних* функцій маємо еквівалентне визначення.

Ім'я  $x$  *неістотне* для однозначної еквітонної функції (предиката)  $g$ , якщо для кожних  $d \in {}^V A$  та  $a, b \in A$  маємо  $g(d \nabla x \square a) \cong g(d \nabla x \square b)$ .

Для *однозначних функцій* (зокрема, предикатів) маємо:

1)  $x \in V$  *неістотне* для еквітонної  $g \Leftrightarrow g(d) \cong g(d \nabla x \square a) \quad \forall d \in {}^V A, a \in A$

2)  $x \in V$  *неістотне* для еквітонної повнототальної  $g \Leftrightarrow$

$$g(d) = g(d \nabla x \square a) \quad \forall d \in A^V, a \in A$$

## Композиційні предикатні системи

Семантична основа КНЛ – *композиційні предикатні системи*.

Це трійки вигляду  $(D, PF, C)$ , де

$D$  – множина даних

$PF$  – множина предикатів (та функцій) на  $D$

$C$  – множина композицій над  $PF$ .

Композиційна система  $(D, PF, C)$  задає дві алгебри:

*алгебру* (алгебраїчну систему) *даних*  $(D, PF)$

*композиційну алгебру предикатів* (та функцій)  $(PF, C)$ .

Побудова композиційної алгебри визначає мову логіки відповідного рівня.

Терми такої алгебри будуть формулами мови.

Для логік квазіарних предикатів  $D$  – це множина  $V_A$  всіх  $V$ -ІМ над певною множиною базових даних  $A$  (вважаємо  $A \neq \emptyset$ ).

Для логік реномінативного і кванторних рівнів  $PF$  конкретизуємо як  $Pr^A$   
 $\mathcal{C}$  конкретизується як множина композицій на  $Pr^A$ .

Тоді КС набувають вигляду  $({}^V A, Pr^A, \mathcal{C})$ .

Це композиційні системи  $V$ -квазіарних предикатів.

$(Pr^A, \mathcal{C})$  – це композиційні алгебри  $V$ -квазіарних предикатів.

Для логік функціональних рівнів  $PF$  конкретизується як  $Fn^A \cup Pr^A$ ,  
 $\mathcal{C}$  – як множина композицій на  $Fn^A \cup Pr^A$ .

Тоді КС набувають вигляду  $({}^V A, Fn^A \cup Pr^A, \mathcal{C})$

Це композиційні системи  $V$ -квазіарних функцій та предикатів.

$(Fn^A \cup Pr^A, \mathcal{C})$  – композиційні алгебри  $V$ -квазіарних функцій та предикатів

## Композиції квазіарних предикатів

**Пропозиційний рівень:** композиції називають *логічними зв'язками*, вони працюють лише з виробленими предикатами істиннісними значеннями

Визначення логічних зв'язок  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ . через області істинності та хибності відповідних предикатів  $\neg P$ ,  $P \vee Q$ ,  $P \rightarrow Q$ ,  $P \& Q$ ,  $P \leftrightarrow Q$ :

$$T(\neg P) = F(P)$$

$$F(\neg P) = T(P);$$

$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q);$$

$$F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q);$$

$$T(P \& Q) = T(P) \cap T(Q);$$

$$F(P \& Q) = F(P) \cup F(Q);$$

$$T(P \rightarrow Q) = F(P) \cup T(Q);$$

$$F(P \rightarrow Q) = T(P) \cap F(Q);$$

$$T(P \leftrightarrow Q) = (F(P) \cup T(Q)) \cap (F(Q) \cup T(P))$$

$$F(P \leftrightarrow Q) = (T(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap T(Q))$$

Основні властивості пропозиційних композицій:

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \& Q = Q \& P$$

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \& Q) \& R = P \& (Q \& R)$$

$$(P \vee Q) \& R = (P \& R) \vee (Q \& R)$$

$$(P \& Q) \vee R = (P \vee R) \& (Q \vee R)$$

$$\neg\neg P = P$$

$$P = P \vee P \quad \text{та} \quad P = P \& P$$

$$\neg(P \vee Q) = (\neg P) \& (\neg Q)$$

$$\neg(P \& Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$$

Композиції  $\neg$  та  $\vee$  – базові пропозиційні композиції.

Композиції  $\rightarrow$ ,  $\&$ ,  $\leftrightarrow$  є похідними, вони виражаються через  $\neg$  та  $\vee$ :

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q;$$

$$P \& Q = \neg(\neg P \vee \neg Q);$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P).$$

На **реномінативному рівні** до логічних зв'язок додамо параметризовану за множиною пар імен композицію *реномінації*  $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^A \rightarrow Pr^A$

Композиція реномінації задається так. Для кожного  $d \in {}^V A$  маємо

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$$

Композицію реномінації можна визначити через області істинності та хибності відповідного предиката:

$$T(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^V A \mid r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in T(P)\} = (r_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(T(P))$$

$$F(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^V A \mid r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in F(P)\} = (r_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(F(P))$$

Результатом послідовного виконання двох композицій реномінації є їх згортка, яка визначається так. Для кожного  $d \in {}^V A$  маємо

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}^{\bar{v}}(P)(d) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))(d) = P(r_{\bar{y}}^{\bar{w}} \cdot \bar{v}_{\bar{x}}(d))$$

Згортка композицій реномінації асоціативна та некомутативна

Основні властивості композицій реномінації:

$$R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \& Q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \& R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \rightarrow Q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \rightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \quad \text{за умови: } z \in V \text{ строго неістотне для } P.$$

$$R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) \cong R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \quad \text{за умови: } z \in V \text{ неістотне для } P.$$

Композиція реномінації зберігає монотонність (еквітонність) і антитонність квазіарних функцій та предикатів.

На **реномінативному рівні з рівністю** додатково можна ототожнювати й розрізнити значення предметних імен за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності.

Розглядаємо дві різновидності таких предикатів:

- слабкої (з точністю до визначеності) рівності  $=_{xy}$  та
- строгої (точної) рівності  $\equiv_{xy}$ .

Предикати рівності  $=_{xy}$  та  $\equiv_{xy}$  задамо через області істинності й хибності:

$$T(=_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x)\downarrow = d(y)\downarrow\};$$

$$F(=_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x)\downarrow \neq d(y)\downarrow\};$$

$$T(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x)\downarrow = d(y)\downarrow\} \cup \{d \in {}^V A \mid d(x)\uparrow \text{ та } d(y)\uparrow\};$$

$$F(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x)\downarrow \neq d(y)\downarrow\} \cup \{d \in {}^V A \mid d(x)\downarrow, d(y)\uparrow \text{ або } d(x)\uparrow, d(y)\downarrow\}.$$

Множиною строго неістотних для  $=_{xy}$  та  $\equiv_{xy}$  предметних імен  $\in V \setminus \{x, y\}$ .

Предикати  $=_{xy}$  часткові однозначні, вони монотонні й еквітонні.

Водночас предикати  $\equiv_{xy}$  тотальні однозначні, немонотонні й нееквітонні.

**Приклад.**  $\equiv_{xy} ([z \sqsubseteq a] = T, \equiv_{xy} ([z \sqsubseteq a, x \sqsubseteq a]) = F, \equiv_{xy} ([z \sqsubseteq a, x \sqsubseteq a, y \sqsubseteq a,]) = T.$

Тому на рівні РНЛРС логіки еквітонних предикатів розглядати не можна.

Предикати  $\equiv_{xy}$  подаються через  $=_{xy}$  і спеціальні предикати-індикатори  $\varepsilon z$ :

**Теорема.** Маємо  $\equiv_{xy} = (=_{xy} \& \neg \varepsilon x \& \neg \varepsilon y) \vee (\varepsilon x \& \varepsilon y).$

Предикат-індикатор  $\varepsilon z$  наявності значення для  $z \in V$  визначаємо так:

$$T(\varepsilon z) = \{d \mid d(z) \uparrow\} = \{d \in {}^V A \mid z \notin \text{asn}(d)\};$$

$$F(\varepsilon z) = \{d \mid d(z) \downarrow\} = \{d \in {}^V A \mid z \in \text{asn}(d)\}.$$

Предикати  $\varepsilon z$  не є монотонними та не є антитонними.

Маємо співвідношення:

$$T(=_{xy}) \subset F(\varepsilon x) \cap F(\varepsilon y);$$

$$F(=_{xy}) \subset F(\varepsilon x) \cap F(\varepsilon y).$$

Предикати рівності  $=_{xy}$  та  $\equiv_{xy}$  також позначаємо  $x = y$  та  $x \equiv y.$

*Властивості предикатів  $=_{xy}$  та  $\equiv_{xy}$ .*

– кожний предикат  $=_{xx}$  є неспростовним

– кожний предикат  $\equiv_{xx}$  є тотожно істинним

– для предикатів  $=_{xy}$  та  $\equiv_{xy}$  маємо рефлексивність та симетричність:

$$=_{xy}(d) = =_{xy}(d) \text{ та } \equiv_{xy}(d) = \equiv_{xy}(d) \text{ кожного } d \in {}^V A$$

– для предикатів  $=_{xy}$  та  $\equiv_{xy}$  маємо транзитивність: для кожного  $d \in {}^V A$

$$\equiv_{xy}(d) = T \text{ та } \equiv_{yz}(d) = T \Rightarrow \equiv_{xz}(d) = T.$$

Водночас для предикатів  $=_{xy}$  транзитивності по окремих даних немає.

**Приклад 1.** Для  $d = [x \sqcap a, z \sqcap b]$ , де  $a \neq b$ , маємо  $=_{xy}(d) \uparrow$ ,  $=_{yz}(d) \uparrow$ ,  $=_{xz}(d) = F$ .

Це означає:  $=_{xy}$  та  $=_{yz}$  на такому  $d$  неспростовні,  $=_{xz}$  на такому  $d$  хибний.

Для предикатів  $=_{xy}$  маємо властивість заміни рівних:

$$\text{для кожних } P \in Pr^A \text{ та } d \in {}^V A \quad \equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow R_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(P)(d) = R_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(P)(d)$$

Для предикатів  $=_{xy}$  заміни рівних по окремих даних вже немає.

**Приклад 2.** Для  $d = [x \sqcap a, z \sqcap b]$  маємо  $=_{xy}(d) \uparrow$  –  $=_{xy}$  на  $d$  неспростовний.

Задамо  $P([z \sqcap b, v \sqcap a,]) = T$ ,  $P([z \sqcap b]) = F$ , тоді

$$R_x^v(P)(d) = T, R_y^v(P)(d) = F$$



## *Властивості композицій суперпозиції*

$S^{\neg}$ ) Дистрибутивність суперпозиції щодо  $\neg$ :

$$S^{\bar{v}}(\neg P, \bar{f}) = \neg S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

$S^{\vee}$ ) Дистрибутивність суперпозиції щодо  $\vee$ :

$$S^{\bar{v}}(P \vee Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

Аналогічно властивості дистрибутивності суперпозиції щодо  $\rightarrow$ ,  $\&$  та  $\leftrightarrow$ :

$$S^{\&}) S^{\bar{v}}(P \& Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \& S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

$$S^{\rightarrow}) S^{\bar{v}}(P \rightarrow Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \rightarrow S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

$$S^{\leftrightarrow}) S^{\bar{v}}(P \leftrightarrow Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

Згортка суперпозицій (тут  $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$ , введені позначення  $\bar{u}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{r}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{s}$  відповідно для  $u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_k; r_1, \dots, r_k; w_1, \dots, w_k; v_1, \dots, v_m; s_1, \dots, s_m$ ):

$$\begin{aligned} S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) &= \\ &= S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\phi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})) \end{aligned}$$

SS) Згортка суперпозицій (тут  $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$ ):

$$S^{\bar{u}, \bar{x}} (S^{\bar{x}, \bar{v}} (\phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) =$$

$$S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}} (\phi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}} (r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}} (r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}} (s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}} (s_m, \bar{t}, \bar{w}))$$

ZS) Згортка імен (тут  $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$ ):

$$S^{x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n} (\phi, 'x_1, \dots, 'x_m, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n} (\phi, g_1, \dots, g_n)$$

Зокрема,  $S^{x_1, \dots, x_m} (\phi, 'x_1, \dots, 'x_m) = \phi$

DD) Згортка неістотних імен для  $\phi$ -ій розмінування (тут  $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$ ):

$$S^{v_1, \dots, v_n} ('x, g_1, \dots, g_n) = 'x$$

DS) Спрощення для функцій розмінування:

$$S^{x, v_1, \dots, v_n} ('x, f, g_1, \dots, g_n) = f$$

Зокрема,  $S^x ('x, f) = f$ .

ZN) Згортка за неістотним іменем (тут  $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$ ,  $x$  неістотне для  $\phi$ ):

$$S^{x, v_1, \dots, v_n} (\phi, f, g_1, \dots, g_n) \cong S^{v_1, \dots, v_n} (\phi, g_1, \dots, g_n)$$

Зокрема,  $S^x (\phi, f) \cong \phi$ .

ZS) Згортка імен (тут  $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$ ):

$$S^{x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n}(\phi, 'x_1, \dots, 'x_m, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(\phi, g_1, \dots, g_n)$$

Зокрема, маємо  $S^{x_1, \dots, x_m}(\phi, 'x_1, \dots, 'x_m) = \phi$

DD) Згортка неістотних імен для функцій розіменування:

$$S^{v_1, \dots, v_n}('x, g_1, \dots, g_n) = 'x \quad \text{çà óì î âè } x \notin \{\bar{v}\}$$

DS) Спрощення для функцій розіменування:

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}('x, f, g_1, \dots, g_n) = f$$

Зокрема, маємо  $S^x('x, f) = f$

ZN) Згортка за неістотним іменем (тут  $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$ )

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}(\phi, f, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(\phi, g_1, \dots, g_n) \quad \text{якщо } x \text{ строго неістотне для } \phi$$

Зокрема, маємо  $S^x(\phi, f) = \phi$

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}(\phi, f, g_1, \dots, g_n) \boxtimes S^{v_1, \dots, v_n}(\phi, g_1, \dots, g_n) \quad \text{якщо } x \text{ неістотне для } \phi.$$

Зокрема, маємо  $S^x(\phi, f) \boxtimes \phi$

## *Властивості слабкої рівності*

Тут  $P \in Pr^A$  та  $h, f, f_1, \dots, f_n, g, g_1, \dots, g_n \in Fn^A$ .

Rf) рефлексивність:

кожний предикат вигляду  $f = f$  істинний

Sm) симетричність:

$f = g \Leftrightarrow g = f$ ; більш того,  $T(f = g) = T(g = f)$  та  $F(f = g) = F(g = f)$

Tr) транзитивність:

$f = g \ \& \ g = h \Rightarrow f = h$ ; більш того,  $T(f = g) \cap T(g = h) \subseteq T(f = h)$

EF)  $f_1 = g_1 \ \& \ \dots \ \& \ f_n = g_n \Rightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(h, g_1, \dots, g_n)$

EP)  $f_1 = g_1 \ \& \ \dots \ \& \ f_n = g_n \Rightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(P, f_1, \dots, f_n) \Leftrightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(P, g_1, \dots, g_n)$

SE) дистрибутивність суперпозиції щодо рівності:

$S^{v_1, \dots, v_n}(=(f, h), f_1, \dots, f_n) = (S^{v_1, \dots, v_n}(f, f_1, \dots, f_n), S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n))$

Композиція еквіваленції  $\leftrightarrow$  для предикатів є аналогом відношення слабкої рівності для функцій.

Введемо композицію  $\leftrightarrow_s$  *строгої еквіваленції*, яка є аналогом відношення звичайної (строгої) рівності для функцій. Для кожного  $d \in D$  задамо:

$$(P \leftrightarrow_s Q)(d) = T \Leftrightarrow P(d) = Q(d),$$

$$(P \leftrightarrow_s Q)(d) = F \Leftrightarrow P(d) \neq Q(d).$$

Тут  $P(d) = Q(d)$  означає, що значення  $P(d)$  та  $Q(d)$  збігаються, тобто обидва рівні та визначені або обидва невизначені.

Для логік часткових чи неоднозначних предикатів  $\leftrightarrow_s$  незалежна від  $\neg$  і  $\vee$ .

### *Властивості строгої рівності*

Rfs) кожний предикат вигляду  $f \equiv f$  тотожно істинний;

Sms)  $f \equiv g \Leftrightarrow g \equiv f$ ;

Trs)  $f \equiv g$  та  $g \equiv h \Rightarrow f \equiv h$  тотожно істинний;

EsF)  $f_1 \equiv g_1, \dots, f_n \equiv g_n$  тотожно істинні  $\Rightarrow$

$S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n) \equiv S^{v_1, \dots, v_n}(h, g_1, \dots, g_n)$  тотожно істинний;

EsP)  $f_1 \equiv g_1, \dots, f_n \equiv g_n$  тотожно істинні  $\Rightarrow$

$S^{v_1, \dots, v_n}(P, f_1, \dots, f_n) \leftrightarrow_s S^{v_1, \dots, v_n}(P, g_1, \dots, g_n)$

SsE)  $S^{v_1, \dots, v_n}(\equiv(g, h), f_1, \dots, f_n) \equiv (S^{v_1, \dots, v_n}(g, f_1, \dots, f_n), S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n))$

**Композиції квантифікації.** *Визначальні* для першопорядкових логік

Дамо визначення 1-арних композицій  $\exists x$  та  $\forall x$  для однозначних предикатів. Предикати  $\exists x(P)$  та  $\forall x(P)$  позначаємо  $\exists xP$  та  $\forall xP$ .

Для кожного  $d \in {}^V A$  задамо:

$$\begin{aligned} \exists xP(d) & \begin{cases} T, & \text{якщо існує } b \in A \text{ (} P(d \nabla x \square) b \text{) } = T \\ F, & \text{якщо } P(d \nabla x \square) b \text{ для всіх } b \in A \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases} \\ \forall xP(d) & \begin{cases} F, & \text{якщо існує } b \in A \text{ (} P(d \nabla x \square) b \text{) } = F \\ T, & \text{якщо } P(d \nabla x \square) b \text{ для всіх } b \in A \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{aligned}$$

Визначення предикатів  $\exists xP$  та  $\forall xP$  через їх області істинності й хибності

$$T(\exists xP) = \{d \in {}^V A \mid T \in P(d \nabla x \square a) \text{ для деякого } a \in A\}.$$

$$F(\exists xP) = \{d \in {}^V A \mid F \in P(d \nabla x \square a) \text{ для всіх } a \in A\}.$$

$$T(\forall xP) = \{d \in {}^V A \mid T \in P(d \nabla x \square a) \text{ для всіх } a \in A\}.$$

$$F(\forall xP) = \{d \in {}^V A \mid F \in P(d \nabla x \square a) \text{ для деякого } a \in A\}.$$

Композиція  $\forall x$  є похідною, вона подається так:  $\forall xP = \neg \exists x \neg P$ .

Наведемо основні властивості композицій  $\exists x$  та  $\forall x$ .

1) Комутативність однотипних кванторів:

$$\exists x \exists y P = \exists y \exists x P;$$

$$\forall x \forall y P = \forall y \forall x P.$$

2) Закони де Моргана для кванторів:

$$\neg \exists x P = \forall x \neg P;$$

$$\neg \forall x P = \exists x \neg P.$$

3) Неістотність квантифікованих імен:

$$\exists x \exists x P = \exists x P;$$

$$\exists x \forall x P = \forall x P;$$

$$\forall x \exists x P = \exists x P;$$

$$\forall x \forall x P = \forall x P.$$

4) Закони дистрибутивності кванторів щодо  $\vee$  та  $\&$ :

$$\exists x P \vee \exists x Q = \exists x (P \vee Q);$$

$$\forall x P \& \forall x Q = \forall x (P \& Q).$$



$S \exists b$ ) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо  $\exists x$ :

$$S^{\bar{v}}(\exists x P, \bar{f}) \cong \exists x S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

$S \forall b$ ) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо  $\forall x$ :

$$S^{\bar{v}}(\forall x P, \bar{f}) \cong \forall x S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

Для  $S \exists b$  та  $S \forall b$  умови:  $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$  та  $x$  неістотне для  $f_1, \dots, f_n$ .

$S \exists$ ) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо  $\exists x$  ( $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$ ):

$$S^{v_1, \dots, v_n}(\exists x P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n)) = \exists x S^{v_1, \dots, v_n}(P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n))$$

$S \forall$ ) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо  $\forall x$  ( $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$ ):

$$S^{v_1, \dots, v_n}(\forall x P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n)) = \forall x S^{v_1, \dots, v_n}(P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n))$$

**Rm1.** Обмежувальні умови дистрибутивності та спеціальної дистрибутивності суперпозиції щодо кванторів є істотними.

**Rm2.** Рівність з точністю до визначеності  $\cong$  для  $S \exists b$  та  $S \forall b$ .

Задамо еквітонні  $f$  та  $P$ :  $P(d) \uparrow$  при  $v \notin asn(d)$  та  $P([x \square 0, y \square 0, v \square 0]) = T$ ;  
 $f(d) \uparrow$  при  $x \notin asn(d)$  та  $f(d) = 0$  при  $x \in asn(d)$ .

Тоді  $x$  неістотне для  $f$ ,  $\exists x S^v(P, f)([y \square 0]) = T$  та  $S^v(\exists x P, f)([y \square 0]) \uparrow$ .

**Rm3.** Для аналогічних властивостей  $R \exists$  та  $R \forall$  рівність строга!

## Властивості квазіарних предикатів

**Теорема 1.** Композиції  $\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x$  зберігають:

- монотонність та антитонність квазіарних предикатів
- еквітонність однозначних квазіарних предикатів
- повнототальність і фінарність квазіарних предикатів

**Наслідок 1.** Класи монотонних та антитонних квазіарних предикатів замкнені відносно композицій  $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, R_{\bar{x}}, \exists x, \forall x$ .

Класи еквітонних і повнототальних однозначних квазіарних предикатів замкнені відносно композицій  $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, R_{\bar{x}}, \exists x, \forall x$ .

**Теорема 2.** Композиції  $S^{\bar{v}}, =, \equiv$  зберігають:

- еквітонність однозначних квазіарних функцій та предикатів
- повнототальність і фінарність квазіарних функцій та предикатів

**Наслідок 2.** Класи еквітонних і повнототальних однозначних квазіарних функцій та предикатів замкнені відносно композицій  $S^{\bar{v}}, =, \equiv$

**Приклад 1.** Розглянемо наступні предикати.

$$P_1(d) = \begin{cases} \{F\} & x \in \{a, s, n, d\} \\ \{T\} & x \notin \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_2(d) = \begin{cases} \{T\} & x \in \{a, s, n, d\} \\ \{F\} & x \notin \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_3(d) = \begin{cases} \{F\} & x \in \{a, s, n, d\} \\ \emptyset & x \notin \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_4(d) = \begin{cases} \{F, \emptyset\}, & (x) \notin \{a, s, n, d\} \\ \{T\} & x \in \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_5(d) = \begin{cases} \{T\} & x \in \{a, s, n, d\} \\ \emptyset & x \notin \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_6(d) = \begin{cases} \{T, \emptyset\}, & (x) \notin \{a, s, n, d\} \\ \{F\} & x \in \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_7(d) = \begin{cases} F & x \notin \{a, s, n, d\} \\ \emptyset & x \in \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_8(d) = \begin{cases} \{T, \emptyset\}, & (x) \notin \{a, s, n, d\} \\ \{F\} & x \in \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_9(d) = \begin{cases} \{T\} & x \notin \{a, s, n, d\} \\ \emptyset & x \in \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$$P_{10}(d) = \begin{cases} \{T, \emptyset\}, & (x) \notin \{a, s, n, d\} \\ \{F\} & x \in \{a, s, n, d\} \end{cases}$$

$P_1$  та  $P_2$  тотальні однозначні немонотонні (нееквітонні) й неантитонні,  
 $P_3$  та  $P_5$  монотонні (еквітонні) однозначні,  
 $P_4$  та  $P_6$  монотонні тотальні неоднозначні,  
 $P_7$  та  $P_9$  антитонні часткові однозначні,  
 $P_8$  та  $P_{10}$  антитонні тотальні неоднозначні.

Неспростовними чи невиконуваними можуть бути лише однозначні предикати. При цьому властивості неспростовності й виконуваності природно пов'язані:

**Твердження.** Предикат  $P$  неспростовний  $\Leftrightarrow \neg P$  невиконуваний.

$P$  неспростовний  $\Leftrightarrow F(P) = \emptyset \Leftrightarrow T(\neg P) = \emptyset \Leftrightarrow \neg P$  невиконуваний.

Для часткових предикатів невірні деякі важливі закони класичної логіки.

**Приклад 2.** modus ponens невірне для загального випадку квазіарних предикатів.

Задамо  $P$  як  $\perp$ ,  $Q$  – як тотожно хибний предикат. Тоді  $P \rightarrow Q$  теж  $\perp$ .

Отже,  $P$  та  $P \rightarrow Q$  частково істинні, водночас  $Q$  – тотожно хибний.

**Приклад 3.** Задамо предикат  $P$  як тотожно істинний,  $Q$  – як  $\perp$ ,  $S$  – як тотожно хибний. Тоді  $P \leftrightarrow Q$  та  $Q \leftrightarrow S$  частково істинні, водночас  $P \leftrightarrow S$  тотожно хибний.

**Приклад 4.** Нехай для предикатів  $p, q, s$  маємо  $p(d) = T$ ,  $q(d) \uparrow$ ,  $s(d) = F$ ;

тоді  $p(d) \cong q(d)$  та  $q(d) \cong s(d)$ , але невірне, що  $p(d) \cong s(d)$ .

Приклади 3, 4 заперечують транзитивність еквіваленції та слабкої рівності. Саме ця нетранзитивність є причиною невиконання деяких законів класичної логіки для класів часткових предикатів, які використовують слабо рівні клінієві зв'язки.

Необхідною й достатньою умовою коректності modus ponens у таких класах часткових предикатів є *еквітранзитивність* – транзитивність відношення  $\square$  слабкої рівності предикатів, тобто транзитивність еквіваленції

Отже, відмінність логіки часткових предикатів і логіки класичної виявляється вже на пропозиційному рівні. Більш того, предикати прикладів 3 та 2 еквітонні.

Для класу еквітонних предикатів умова еквітранзитивності не виконується. Водночас вона справджується для класу повнототальних еквітонних предикатів.

**Приклад 5.** Для загального випадку квазіарних предикатів

традиційні закони  $T(P) \subseteq T(\exists xP)$  та  $T(\forall xP) \subseteq T(P)$  невірні

Задамо предикат  $P$  так:

$$P(d) = T \text{ при } x \notin \text{asn}(d) \text{ та } P(d) = F \text{ при } x \in \text{asn}(d).$$

Тоді для таких  $d$ , що  $x \notin \text{asn}(d)$ , маємо  $P(d) = T$  та  $\exists xP(d) = F$ .

Задамо тепер предикат  $P$  так:

$$P(d) = F \text{ при } x \notin \text{asn}(d) \text{ та } P(d) = T \text{ при } x \in \text{asn}(d).$$

Тоді для таких  $d$ , що  $x \notin \text{asn}(d)$ , маємо  $\forall xP(d) = T$  та  $P(d) = F$ .

Для еквітонних предикатів закони  $T(P) \subseteq T(\exists xP)$  та  $T(\forall xP) \subseteq T(P)$  вірні

**Приклад 6.** Існують квазіарні предикати:  $P \sqsubseteq \forall xP$  і невірно  $P \sqsubseteq \exists xP$ .

Нехай  $A = \{a, b\}$ . Задамо предикат  $P$  так:

$$P(d) = F \text{ при } x \notin \text{asn}(d), P(d \nabla x \sqsubseteq a) = T \text{ та } P(d \nabla x \sqsubseteq b) \uparrow.$$

Тоді для всіх  $d \in {}^V A$  маємо  $\forall xP(d) \uparrow$ , тому  $P \sqsubseteq \forall xP$ .

Водночас  $P(d) = F$  при  $x \notin \text{asn}(d)$ , але  $\exists xP(d) = T$  для всіх  $d \in {}^V A$ ,  
тому невірно  $P \sqsubseteq \exists xP$ .

**Приклад 7.** Існують квазіарні предикати:  $P \sqsubseteq \exists xP$  і невірно  $P \sqsubseteq \forall xP$ .

Нехай  $A = \{a, b\}$ . Задамо предикат  $P$  так:

$$P(d) = T \text{ при } x \notin \text{asn}(d), P(d \nabla x \sqsubseteq a) = F \text{ та } P(d \nabla x \sqsubseteq b) \uparrow.$$

Тоді для всіх  $d \in {}^V A$  маємо  $\exists xP(d) \uparrow$ , тому  $P \sqsubseteq \exists xP$ .

Водночас  $P(d) = T$  при  $x \notin \text{asn}(d)$ , але  $\forall xP(d) = F$  для всіх  $d \in {}^V A$ ,  
тому невірно  $P \sqsubseteq \forall xP$ .

Наведені співвідношення здаються цілком очевидними, хоча це не так.

$$\begin{aligned}
 T(R_y^x(P)) &\stackrel{(TR \exists)}{\subseteq} T(\exists x(P)) \\
 F(\exists x(P)) &\stackrel{(FR \exists)}{\subseteq} F(R_y^x(P)) \\
 T(\forall x(P)) &\stackrel{(TR \forall)}{\subseteq} T(R_y^x(P)) \\
 F(R_y^x(P)) &\stackrel{(FR \forall)}{\subseteq} F(\forall x(P))
 \end{aligned}$$

**Теорема.** 1) Для загального випадку квазіарних предикатів невірне кожне із співвідношень  $TR \exists$ ,  $FR \exists$ ,  $TR \forall$ ,  $FR \forall$ ;

2) для монотонних предикатів:

- вірні  $TR \exists$  та  $FR \forall$ ,
- невірні  $FR \exists$  та  $TR \forall$ ;

3) для антитонних предикатів:

- вірні  $FR \exists$  та  $TR \forall$ ,
- невірні  $TR \exists$  та  $FR \forall$ .

Окремий випадок співвідношень  $TR \exists$ ,  $FR \exists$ ,  $TR \forall$ ,  $FR \forall$ :

$$T(P) \subseteq T(\exists x(P)) \quad (T \exists)$$

$$F(\exists x(P)) \subseteq F(P) \quad (F \exists)$$

$$T(\forall x(P)) \subseteq T(P) \quad (T \forall)$$

$$F(P) \subseteq F(\forall x(P)) \quad (F \forall)$$

**Наслідок.** 1) Для загального випадку квазіарних предикатів невірне кожне із співвідношень  $T \exists$ ,  $F \exists$ ,  $T \forall$ ,  $F \forall$  невірні;

2) для монотонних предикатів:

– вірні  $T \exists$  та  $F \forall$ ,

– невірні  $F \exists$  та  $T \forall$ ;

3) для антитонних предикатів:

– вірні  $F \exists$  та  $T \forall$ ,

– невірні  $T \exists$  та  $F \forall$ .