ПРЕДИКАТНІ КОМПОЗИЦІЙНІ СИСТЕМИ

Предикати та їх різновиди

Предикат на множині D – це часткова неоднозначна, взагалі кажучи, функція
$P : D \to \{T, F\}$

Область істинності та область хибності предиката P на D:

$\boldsymbol{T}(P) = P^{-1}(T) = \{d \in D \mid T \in P(d)\}$
$\boldsymbol{F}(P) = P^{-1}(F)\ \ \{d \in D \mid F \in P(d)\}$

Якщо P однозначний, то $\boldsymbol{T}(P) \cap \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.
Якщо P тотальний, то $\boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{F}(P) = D$.

Предикат $P : D \to \{T, F\}$ назвемо:

– неспростовним, або частково істинним, якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$
– виконуваним, якщо $\boldsymbol{T}(P) \neq \varnothing$
– всюди невизначеним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$
– тотально істинним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$
– тотально хибним, якщо $\boldsymbol{F}(P) = D$
– тотожно істинним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$ і $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$
– тотожно хибним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \varnothing$ і $\boldsymbol{F}(P) = D$
– тотально насиченим, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{F}(P) = D$

Для однозначних предикатів області істинності й хибності:

$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in D \mid P(d)\!\downarrow\, = T\}$ $\quad$ $\boldsymbol{F}(P) = \{d \in D \mid P(d)\!\downarrow\, = F\}$

Нехай на D можна ввести відношення порядку за включенням даних

Предикат P *монотонний:*

$$d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \subseteq P(d').$$

Предикат P *антитонний:*

$$d \subseteq d' \Rightarrow P(d') \supseteq P(d).$$

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

Однозначний предикат P *еквітонний:*

$$d' \supseteq d \text{ та } P(d)\downarrow \;\Rightarrow\; P(d')\downarrow = P(d).$$

Для *однозначного часткового* предиката монотонність означає, що його інформативність не зменшується при збільшенні інформативності вхідних даних. Для *монотонних тотальних* предикатів при розширенні вхідних даних інформативність може тільки зменшуватися, для них поняття монотонності малозмістовне, а змістовним (не зменшення інформативності предиката при збільшенні інформативності вхідних даних) є дуальне поняття антитонності.

Водночас для однозначних предикатів поняття антитонності малозмістовне, адже для них антитонними можуть бути лише майже константні предикати:

$$P(d) \cong T \text{ для всіх } d \in D \quad \text{або} \quad P(d) \cong F \text{ для всіх } d \in D$$

Іменні множини

V-ІМ над A – це довільна часткова однозначна функція $d : V \to A$

V-ІМ подаємо як $[v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_n \mapsto a_n, \ldots]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Введемо функцію $asn : {}^V\!A \to 2^V$: $asn(d) = \{v \in V \,|\, v \mapsto a \in d$ для деякого $a \in A\}$.

Множину всіх V-ІМ над A будемо позначати ${}^V\!A$.

V-ІМ δ V-*повна* (максимальна), якщо $asn(\delta) = V$.

V-повна ІМ над A – це тотальна однозначна функція $V \to A$.

Множину всіх V-повних ІМ над A будемо позначати A^V.

Для V-ІМ вводимо теоретико-множинні операції $\cap$ та $\setminus$.

Параметрична операція $\|X$ звуження V-ІМ за множиною $X \subseteq V$:

$$d\|X = \{v \mapsto a \in d \mid v \in X\}.$$

Операція $\|_{-X}$ видалення компонент з іменами із $X \subseteq V$: $d\|_{-X} = d\|(V \setminus X)$

Замість $d\|_{-\{x\}}$ пишемо $d\|_{-x}$

Введемо відношення $=_{-x}$ рівності з точністю до компоненти з іменем x:

$$d_1 =_{-x} d_2, \text{ якщо } d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x}$$

Операція ∇ *накладки* V-ІМ δ_2 на V-ІМ δ_1: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \| (V \setminus asn(\delta_2)))$

Операцію *реномінації* $r^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n} : {}^V A \to {}^V A$ задамо так:

Скорочено пишемо $\bar{y}$ замість $y_1,\ldots, y_n$

Операцію реномінації ІМ продовжимо на множини ІМ

$$r^{\bar v}_{\bar x}(L) = \{r^{\bar v}_{\bar x}(d) \mid d \in L\}, \qquad L \subseteq {}^V A$$

де

Монотонність операції реномінації: якщо $d_1 \subseteq d_2$, то $r^{\bar v}_{\bar x}(d_1) \subseteq r^{\bar v}_{\bar x}(d_2)$

Елімінація тотожних перейменувань: $r^{z,\bar v}_{z,\bar x}(d) = r^{\bar v}_{\bar x}(d)$

Маємо $r^{z,\bar v}_{y,\bar x}(d) =_{-z} r^{z,\bar v}_{u,\bar x}(d)$ та $r^{z,\bar v}_{y,\bar x}(d) =_{-z} r^{\bar v}_{\bar x}(d)$

Послідовне застосування двох операцій реномінації $r^{\bar u}_{\bar y}$ (внутрішня) та $r^{\bar v}_{\bar x}$ (зовнішня) можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назвемо *згорткою* цих операцій і позначимо $r^{\bar v}_{\bar x} \circ r^{\bar u}_{\bar y}$

$$r^{\bar v}_{\bar x}(r^{\bar u}_{\bar y}(d)) = r^{\bar v}_{\bar x} \circ r^{\bar u}_{\bar y}(d)$$

Нехай маємо послідовне застосування двох операцій реномінації

$$r^{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_k}_{s_1,\dots,s_n,z_1,\dots,z_k} \text{ та } r^{v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_m}_{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m},$$

де $\{w_1,\dots,w_m\} \cap \{u_1,\dots,u_k\} = \varnothing$. Тоді для всіх $d \in {}^{V}A$

$$r^{v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_m}_{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m}\left(r^{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_k}_{s_1,\dots,s_n,z_1,\dots,z_k}(d)\right) = r^{v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_m,u_1,\dots,u_k}_{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m,z_1,\dots,z_k}(d)$$

де кожні a_i та b_j задаються так:

$$a_i = \begin{cases} x_i, & \text{якщо } x_i \notin \{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_k\},\\ s_l, & \text{якщо } x_i = v_l \text{ для деякого } v_l,\\ z_l, & \text{якщо } x_i = u_l \text{ для деякого } u_l \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} y_j, & \text{якщо } y_j \notin \{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_k\},\\ s_l, & \text{якщо } y_j = v_l \text{ для деякого } v_l,\\ z_l, & \text{якщо } y_j = u_l \text{ для деякого } u_l \end{cases}$$

Згортка операцій реномінації асоціативна та некомутативна

Квазіарні функції та предикати

Функції (зокрема, предикати), задані на ІМ, називають квазіарними

V-квазіарна функція – функція вигляду $f : {}^{V}A \to R$

V-квазіарна функція на A – функція вигляду $f : {}^{V}A \to A$

V-квазіарний предикат на A – функція вигляду $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$

Ім'я $z \in V$ *строго неістотне* для V-квазіарної функції (предиката) g, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^{V}A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо $g(d_1) = g(d_2)$.

Ім'я z *неістотне* для однозначної V-квазіарної функції (предиката) g, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^{V}A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо $g(d_1) \cong g(d_2)$.

Для *однозначних еквітонних* функцій маємо еквівалентне визначення.

Ім'я x *неістотне* для однозначної еквітонної функції (предиката) g, якщо для кожних $d \in {}^{V}A$ та $a, b \in A$ маємо $g(d \nabla x \square a) \cong g(d \nabla x \square b)$.

Для однозначних функцій (зокрема, предикатів) маємо:

1) $x \in V$ *неістотне для еквітонної* $g \Leftrightarrow g(d) \cong g(d \nabla x \square a) \ \forall \ d \in {}^{V}A, a \in A$

2) $x \in V$ *неістотне для еквітонної повнототальної* $g \Leftrightarrow$

$g(d) = g(d \nabla x \square a) \ \forall \ d \in A^{V}, a \in A$

Композиційні предикатні системи

Семантична основа КНЛ – *композиційні предикатні системи*.

Це трійки вигляду (D, PF, $\boldsymbol{C}$), де

D – множина даних

PF – множина предикатів (та функцій) на D

$\boldsymbol{C}$ – множина композицій над PF.

Композиційна система (D, PF, $\boldsymbol{C}$) задає дві алгебри:

алгебру (алгебраїчну систему) *даних* (D, PF)

композиційну алгебру предикатів (та функцій) (PF, $\boldsymbol{C}$).

Побудова композиційної алгебри визначає мову логіки відповідного рівня.

Терми такої алгебри будуть формулами мови.

Для логік квазіарних предикатів D – це множина ${}^{V}\!A$ всіх V-ІМ над певною множиною базових даних A (вважаємо $A \neq \varnothing$).

Для логік реномінативного і кванторних рівнів PF конкретизуємо як Pr^A

$\boldsymbol{C}$ конкретизується як множина композицій на Pr^A.

Тоді КС набувають вигляду $({}^V\!A, Pr^A, \boldsymbol{C})$.

Це *композиційні системи V-квазіарних предикатів.*

$(Pr^A, \boldsymbol{C})$ – це *композиційні алгебри V-квазіарних предикатів*.

Для логік функціональних рівнів PF конкретизується як $Fn^A \cup Pr^A$,

$\boldsymbol{C}$ – як множина композицій на $Fn^A \cup Pr^A$.

Тоді КС набувають вигляду $({}^V\!A, Fn^A \cup Pr^A, \boldsymbol{C})$

Це *композиційні системи V-квазіарних функцій та предикатів.*

$(Fn^A \cup Pr^A, \boldsymbol{C})$ – *композиційні алгебри V-квазіарних функцій та предикатів*

Композиції квазіарних предикатів

Пропозиційний рівень: композиції називають *логічними зв'язками*, вони працюють лише з виробленими предикатами істиннісними значеннями

Визначення логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, **&**, $\to$, $\leftrightarrow$. через області істинності та хибності відповідних предикатів $\neg P$, $P \vee Q$, $P \to Q$, $P \,\&\, Q$, $P \leftrightarrow Q$:

$T(\neg P) = F(P)$

$F(\neg P) = T(P)$;

$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$;

$F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$;

$T(P \,\&\, Q) = T(P) \cap T(Q)$;

$F(P \,\&\, Q) = F(P) \cup F(Q)$;

$T(P \to Q) = F(P) \cup T(Q)$;

$F(P \to Q) = T(P) \cap F(Q)$;

$T(P \leftrightarrow Q) = (F(P) \cup T(Q)) \cap (F(Q) \cup T(P))$

$F(P \leftrightarrow Q) = (T(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap T(Q))$

Основні властивості пропозиційних композицій:

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \mathbin{\&} Q = Q \mathbin{\&} P$$

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \mathbin{\&} Q) \mathbin{\&} R = P \mathbin{\&} (Q \mathbin{\&} R)$$

$$(P \vee Q) \mathbin{\&} R = (P \mathbin{\&} R) \vee (Q \mathbin{\&} R)$$

$$(P \mathbin{\&} Q) \vee R = (P \vee R) \mathbin{\&} (Q \vee R)$$

$$\neg\neg P = P$$

$P = P \vee P$ та $P = P \mathbin{\&} P$

$$\neg(P \vee Q) = (\neg P) \mathbin{\&} (\neg Q)$$

$$\neg(P \mathbin{\&} Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$$

Композиції $\neg$ та $\vee$ – *базові* пропозиційні композиції.

Композиції $\rightarrow$, **&**, $\leftrightarrow$ є похідними, вони виражаються через $\neg$ та $\vee$:

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q;$$

$$P \mathbin{\&} Q = \neg(\neg P \vee \neg Q);$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \mathbin{\&} (Q \rightarrow P).$$

На **реномінативному рівні** до логічних зв'язок додамо параметризовану за множиною пар імен композицію *реномінації* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^A \to Pr^A$

Композиція реномінації задається так. Для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$$

Композицію реномінації можна визначити через області істинності та хибності відповідного предиката:

$$T(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^V\!A \mid r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in T(P)\} = (r_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(T(P))$$

$$F(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^V\!A \mid r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in F(P)\} = (r_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(F(P))$$

Результатом послідовного виконання двох композицій реномінації є їх згортка, яка визначається так. Для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (P)(d) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))(d) = P(r_{\bar{y}}^{\bar{w}} \bullet_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$$

Згортка композицій реномінації асоціативна та некомутативна

Основні властивості композицій реномінації:

$$\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P)=\neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P\vee Q)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)\vee\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P\,\&\,Q)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)\,\&\,\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P\to Q)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)\to\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$ за умови: $z\in V$ строго неістотне для *P*.

$$\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P)\cong\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$ за умови: $z\in V$ неістотне для *P*.

Композиція реномінації зберігає монотонність (еквітонність) і антитонність квазіарних функцій та предикатів.

На **ренomінативному рівні з рівністю** додатково можна ототожнювати й розрізняти значення предметних імен за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності.

Розглядаємо дві різновидності таких предикатів:

– слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$ та

– строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$.

Предикати рівності $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ задамо через області істинності й хибності:

$T(=_{xy}) = \{d \in {}^{V}A \mid d(x){\downarrow} = d(y){\downarrow}\}$;

$F(=_{xy}) = \{d \in {}^{V}A \mid d(x){\downarrow} \neq d(y){\downarrow}\}$;

$T(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^{V}A \mid d(x){\downarrow} = d(y){\downarrow}\} \cup \{d \in {}^{V}A \mid d(x){\uparrow}$ та $d(y){\uparrow}\}$;

$F(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^{V}A \mid d(x){\downarrow} \neq d(y){\downarrow}\} \cup \{d \in {}^{V}A \mid d(x){\downarrow}, d(y){\uparrow}$ або $d(x){\uparrow}, d(y){\downarrow}\}$.

Множиною строго неістотних для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ предметних імен є $V \setminus \{x, y\}$.

Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні, вони монотонні й еквітонні.

Водночас предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, немонотонні й нееквітонні.

Приклад. $\equiv_{xy}([z\square a]) = T,\ \equiv_{xy}([z\square a, x\square a]) = F,\ \equiv_{xy}([z\square a, x\square a, y\square a,]) = T.$

Тому на рівні РНЛРС логіки еквітонних предикатів розглядати не можна.

Предикати $\equiv_{xy}$ подаються через $=_{xy}$ і спеціальні предикати-індикатори εz:

Теорема. Маємо $\equiv_{xy} = (=_{xy} \& \neg\varepsilon x \& \neg\varepsilon y) \vee (\varepsilon x \& \varepsilon y)$.

Предикат-індикатор εz наявності значення для $z \in V$ визначаємо так:

$$\boldsymbol{T}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^{V}\!A \mid z \notin asn(d)\};$$

$$\boldsymbol{F}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^{V}\!A \mid z \in asn(d)\}.$$

Предикати εz не є монотонними та не є антитонними.

Маємо співвідношення:

$$\boldsymbol{T}(=_{xy}) \subset \boldsymbol{F}(\varepsilon x) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y);$$

$$\boldsymbol{F}(=_{xy}) \subset \boldsymbol{F}(\varepsilon x) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y).$$

Предикати рівності $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ також позначаємо $x = y$ та $x \equiv y$.

Властивості предикатів $=_{xy}$ *та* $\equiv_{xy}$.

– кожний предикат $=_{xx}$ є неспростовним

– кожний предикат $\equiv_{xx}$ є тотожно істинним

– для предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо рефлексивність та симетричність:

$=_{xy}(d) = =_{xy}(d)$ та $\equiv_{xy}(d) = \equiv_{xy}(d)$ кожного $d \in {}^{V}A$

– для предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо транзитивність: для кожного $d \in {}^{V}A$

$\equiv_{xy}(d) = T$ т а $\equiv_{yz}(d) = T \Rightarrow \equiv_{xz}(d) = T$.

Водночас для предикатів $=_{xy}$ транзитивності по окремих даних немає.

Приклад 1. Для $d = [x□a, z□b]$, де $a \neq b$, маємо $=_{xy}(d)\uparrow$, $=_{yz}(d)\uparrow$, $=_{xz}(d) = F$.

Це означає: $=_{xy}$ та $=_{yz}$ на такому d неспростовні, $=_{xz}$ на такому d хибний.

Для предикатів $=_{xy}$ маємо властивість заміни рівних:

для кожних $P \in Pr^{A}$ та $d \in {}^{V}A$ $\equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow R_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(P)(d) = R_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(P)(d)$

Для предикатів $=_{xy}$ заміни рівних по окремих даних вже немає.

Приклад 2. Для $d = [x□a, z□b]$ маємо $=_{xy}(d)\uparrow$ – $=_{xy}$ на d неспростовний.

Задамо $P([z□b, v□a,]) = T$, $P([z□b]) = F$, тоді $R_{x}^{v}(P)(d) = T$, $R_{y}^{v}(P)(d) = F$

На **безкванторно-функціональних рівнях з рівністю** додатково можна ототожнювати й розрізняти предметні значення, що дає змогу ввести спеціальну композицію рівності вигляду $Fn^A \times Fn^A \rightarrow Pr^A$.

Розглядаємо дві її різновидності:

– слабкої (з точністю до визначеності) рівності =

– строгої (точної) рівності $\equiv$.

Композиції = та $\equiv$ задаються так:

$$=(f,g)(d)=\begin{cases} T, \ \text{����} \ f(d)\downarrow \ \text{��} \ g(d)\downarrow \ \text{��} \ f(d)=g(d), \\ F, \ \text{����} \ f(d)\downarrow \ \text{��} \ g(d)\downarrow \ \text{��} \ f(d)\neq g(d), \\ \text{�������������}, \ \text{����} \ f(d)\uparrow \ \text{���} \ g(d)\uparrow . \end{cases}$$

$$\equiv(f,g)(d)=\begin{cases} T, \ \text{ÿêù î} \ (f(d)\downarrow, \ g(d)\downarrow \ \text{òà} \ f(d)=g(d)) \ \text{àáî} \ (f(d)\uparrow \ \text{òà} \ g(d)\uparrow), \\ F, \ \text{ÿêù î} \ (f(d)\downarrow, \ g(d)\downarrow, f(d)\neq g(d)) \ \text{àáî} \ (f(d)\downarrow, \ g(d)\uparrow) \ \text{àáî} \ (f(d)\uparrow, \ g(d)\downarrow) \end{cases}$$

Композиції суперпозиції та = *зберігають еквітонність* квазіарних функцій та предикатів.

Композиція $\equiv$ еквітонність не зберігає.

Тому на рівні БКНЛРС логіки еквітонних предикатів розглядати не можна

Властивості композицій суперпозиції

S¬) Дистрибутивність суперпозиції щодо ¬:

$$\mathrm{S}^{\bar{v}}(\neg P,\bar{f})=\neg\mathrm{S}^{\bar{v}}(P,\bar{f})$$

S$\vee$) Дистрибутивність суперпозиції щодо $\vee$:

$$\mathrm{S}^{\bar{v}}(P\vee Q,\bar{f})=\mathrm{S}^{\bar{v}}(P,\bar{f})\vee\mathrm{S}^{\bar{v}}(Q,\bar{f})$$

Аналогічно властивості дистрибутивності суперпозиції щодо →, & та ↔:

S&) $\mathrm{S}^{\bar{v}}(P\,\&\,Q,\bar{f})=\mathrm{S}^{\bar{v}}(P,\bar{f})\,\&\,\mathrm{S}^{\bar{v}}(Q,\bar{f})$

S→) $\mathrm{S}^{\bar{v}}(P\rightarrow Q,\bar{f})=\mathrm{S}^{\bar{v}}(P,\bar{f})\rightarrow\mathrm{S}^{\bar{v}}(Q,\bar{f})$

S↔) $\mathrm{S}^{\bar{v}}(P\leftrightarrow Q,\bar{f})=\mathrm{S}^{\bar{v}}(P,\bar{f})\leftrightarrow\mathrm{S}^{\bar{v}}(Q,\bar{f})$

Згортка суперпозицій (тут $\phi\in Fn^A\cup Pr^A$, введені позначення $\bar{u},\bar{t},\bar{x},\bar{r},\bar{w},\bar{v},\bar{s}$ відповідно для $u_1,...,u_n$; $t_1,...,t_n$; $x_1,...,x_k$; $r_1,...,r_k$; $w_1,...,w_k$; $v_1,...,v_m$; $s_1,...,s_m$):

$$\mathrm{S}^{\bar{u},\bar{x}}(\mathrm{S}^{\bar{x},\bar{v}}(\varphi,\bar{r},\bar{s}),\bar{t},\bar{w})=$$

$$=\mathrm{S}^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\varphi,\bar{t},\mathrm{S}^{\bar{u},\bar{x}}(r_1,\bar{t},\bar{w}),...,\mathrm{S}^{\bar{u},\bar{x}}(r_k,\bar{t},\bar{w}),\mathrm{S}^{\bar{u},\bar{x}}(s_1,\bar{t},\bar{w}),...,\mathrm{S}^{\bar{u},\bar{x}}(s_m,\bar{t},\bar{w}))$$

SS) Згортка суперпозицій (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$):

$$S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\varphi,\bar{r},\bar{s}),\bar{t},\bar{w}) =$$

$$S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\varphi,\bar{t},S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1,\bar{t},\bar{w}),...,S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k,\bar{t},\bar{w}),S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1,\bar{t},\bar{w}),...,S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m,\bar{t},\bar{w}))$$

ZS) Згортка імен (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$):

$$S^{x_1,...,x_m,v_1,...v_n}(\varphi,'x_1,...,'x_m,g_1,...,g_n) = S^{v_1,...v_n}(\varphi,g_1,...,g_n)$$

Зокрема, $S^{x_1,...,x_m}(\varphi,'x_1,...,'x_m) = \varphi$

DD) Згортка неістотних імен для ф-ій розіменування (тут $x \notin \{v_1,..., v_n\}$):

$$S^{v_1,...v_n}('x,g_1,...,g_n) = 'x$$

DS) Спрощення для функцій розіменування:

$$S^{x,v_1,...v_n}('x,f,g_1,...,g_n) = f$$

Зокрема, $S^x('x, f) = f$.

ZN) Згортка за неістотним іменем (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$, x неістотне для ϕ):

$$S^{x,v_1,...v_n}(\varphi,f,g_1,...,g_n) \cong S^{v_1,...v_n}(\varphi,g_1,...,g_n)$$

Зокрема, $S^x(\phi, f) \cong \phi$.

ZS) Згортка імен (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$):

$$S^{x_1,...,x_m,v_1,...,v_n}(\varphi, 'x_1,...,'x_m, g_1,..., g_n) = S^{v_1,...,v_n}(\varphi, g_1,..., g_n)$$

Зокрема, маємо $S^{x_1,...,x_m}(\varphi, 'x_1,...,'x_m) = \varphi$

DD) Згортка неістотних імен для функцій розіменування:

$S^{v_1,...,v_n}('x, g_1,..., g_n) = 'x$ çà óì î âè $x \notin \{\overline{v}\}$

DS) Спрощення для функцій розіменування:

$$S^{x,v_1,...,v_n}('x, f, g_1,..., g_n) = f$$

Зокрема, маємо $S^{x}('x, f) = f$

ZN) Згортка за неістотним іменем (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$)

$S^{x,v_1,...,v_n}(\varphi, f, g_1,..., g_n) = S^{v_1,...,v_n}(\varphi, g_1,..., g_n)$ якщо x строго неістотне для ϕ

Зокрема, маємо $S^{x}(\varphi, f) = \varphi$

$S^{x,v_1,...,v_n}(\varphi, f, g_1,..., g_n) \square S^{v_1,...,v_n}(\varphi, g_1,..., g_n)$ якщо x неістотне для ϕ.

Зокрема, маємо $S^{x}(\varphi, f) \square \varphi$

Властивості слабкої рівності

Тут $P \in Pr^A$ та $h, f, f_1,..., f_n, g, g_1,..., g_n \in Fn^A$.

Rf) рефлексивність:

кожний предикат вигляду $f = f$ істинний

Sm) симетричність:

$f = g \Leftrightarrow g = f$; більш того, $\boldsymbol{T}(f = g) = \boldsymbol{T}(g = f)$ та $\boldsymbol{F}(f = g) = \boldsymbol{F}(g = f)$

Tr) транзитивність:

$f = g$ **&** $g = h \Rightarrow f = h$; більш того, $\boldsymbol{T}(f = g) \cap \boldsymbol{T}(g = h) \subseteq \boldsymbol{T}(f = h)$

EF) $f_1 = g_1 \,\&\ldots\&\, f_n = g_n \Rightarrow S^{v_1,\ldots v_n}(h, f_1,..., f_n) = S^{v_1,\ldots v_n}(h, g_1,..., g_n)$

EP) $f_1 = g_1 \,\&\ldots\&\, f_n = g_n \Rightarrow S^{v_1,\ldots v_n}(P, f_1,..., f_n) \leftrightarrow S^{v_1,\ldots v_n}(P, g_1,..., g_n)$

SE) дистрибутивність суперпозиції щодо рівності:

$$S^{v_1,\ldots v_n}(=(f, h), f_1,..., f_n) \;=\; =(S^{v_1,\ldots v_n}(f, f_1,..., f_n), S^{v_1,\ldots v_n}(h, f_1,..., f_n))$$

Композиція еквіваленції $\leftrightarrow$ для предикатів є аналогом відношення слабкої рівності для функцій.

Введемо композицію $\leftrightarrow_{\mathbf{s}}$ *строгої еквіваленції*, яка є аналогом відношення звичайної (строгої) рівності для функцій. Для кожного $d \in D$ задамо:

$$(P \leftrightarrow_{\mathbf{s}} Q)(d) = T \Leftrightarrow P(d) = Q(d),$$

$$(P \leftrightarrow_{\mathbf{s}} Q)(d) = F \Leftrightarrow P(d) \neq Q(d).$$

Тут $P(d) = Q(d)$ означає, що значення $P(d)$ та $Q(d)$ збігаються, тобто обидва рівні та визначені або обидва невизначені.

Для логік часткових чи неоднозначних предикатів $\leftrightarrow_{\mathbf{s}}$ незалежна від $\neg$ і $\vee$.

Властивості строгої рівності

Rfs) кожний предикат вигляду $f \equiv f$ тотожно істинний;

Sms) $f \equiv g \Leftrightarrow g \equiv f$;

Trs) $f \equiv g$ та $g \equiv h \Rightarrow f \equiv h$ тотожно істинний;

EsF) $f_1 \equiv g_1, \ldots, f_n \equiv g_n$ тотожно істинні $\Rightarrow$

$$S^{v_1, \ldots, v_n}(h, f_1, \ldots, f_n) \equiv S^{v_1, \ldots, v_n}(h, g_1, \ldots, g_n)$$ тотожно істинний;

EsP) $f_1 \equiv g_1, \ldots, f_n \equiv g_n$ тотожно істинні $\Rightarrow$

$$S^{v_1, \ldots, v_n}(P, f_1, \ldots, f_n) \leftrightarrow_s S^{v_1, \ldots, v_n}(P, g_1, \ldots, g_n)$$

SsE) $S^{v_1, \ldots, v_n}(\equiv(g, h), f_1, \ldots, f_n) = \equiv (S^{v_1, \ldots, v_n}(g, f_1, \ldots, f_n), S^{v_1, \ldots, v_n}(h, f_1, \ldots, f_n))$

Композиції квантифікації. *Визначальні* для першопорядкових логік

Дамо визначення 1-арних композицій $\exists \boldsymbol{x}$ та $\forall \boldsymbol{x}$ для однозначних предикатів. Предикати $\exists \boldsymbol{x}(P)$ та $\forall \boldsymbol{x}(P)$ позначаємо $\exists \boldsymbol{x}P$ та $\forall \boldsymbol{x}P$.

Для кожного $d \in {}^{V}A$ задамо:

$$\exists xP(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо існує } b \in A: P(d \nabla x \mapsto b) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$\forall xP(d) = \begin{cases} F, & \text{якщо існує } b \in A: P(d \nabla x \mapsto b) = F, \\ T, & \text{якщо } P(d \nabla x \mapsto a) = T \text{ для всіх } a \in A, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Визначення предикатів $\exists \boldsymbol{x}P$ та $\forall \boldsymbol{x}P$ через їх області істинності й хибності

$\boldsymbol{T}(\exists \boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для деякого $a \in A\}$.

$\boldsymbol{F}(\exists \boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для всіх $a \in A\}$.

$\boldsymbol{T}(\forall \boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для всіх $a \in A\}$.

$\boldsymbol{F}(\forall \boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для деякого $a \in A\}$.

Композиція $\forall \boldsymbol{x}$ є похідною, вона подається так: $\forall \boldsymbol{x}P = \neg \exists \boldsymbol{x} \neg P$.

Наведемо основні властивості композицій $\exists \boldsymbol{x}$ та $\forall \boldsymbol{x}$.

1) Комутативність однотипних кванторів:

$\exists \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} P = \exists \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x} P$;

$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} P = \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{x} P$.

2) Закони де Моргана для кванторів:

$\neg \exists \boldsymbol{x} P = \forall \boldsymbol{x} \neg P$;

$\neg \forall \boldsymbol{x} P = \exists \boldsymbol{x} \neg P$.

3) Неістотність квантифікованих імен:

$\exists \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{x} P = \exists \boldsymbol{x} P$;

$\exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{x} P = \forall \boldsymbol{x} P$;

$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{x} P = \exists \boldsymbol{x} P$;

$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{x} P = \forall \boldsymbol{x} P$.

4) Закони дистрибутивності кванторів щодо $\vee$ та **&**:

$\exists \boldsymbol{x} P \vee \exists \boldsymbol{x} Q = \exists \boldsymbol{x} (P \vee Q)$;

$\forall \boldsymbol{x} P \,\&\, \forall \boldsymbol{x} Q = \forall \boldsymbol{x} (P \,\&\, Q)$.

Властивості кванторів, пов'язані з неістотністю імен:

– ім’я $x \in V$ строго неістотне для предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$;

– ім’я $x \in V$ строго неістотне для $P \Leftrightarrow P = \forall xP \Leftrightarrow P = \exists xP$;

– ім’я $x \in V$ неістотне для $P \Leftrightarrow P \cong \forall xP \Leftrightarrow P \cong \exists xP$.

Залучаючи до розгляду *реномінації та суперпозиції*, маємо:

Ren) $\exists yP = \exists z\mathrm{R}_{z}^{y}(P)$, якщо z строго неістотне для P

R∃) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, якщо $y \notin \{\bar{v}\} \cup \{\bar{x}\}$

R∃∃) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\mathrm{R}_{z}^{y}(P)$, якщо z строго неістотне для P та $z \notin \{\bar{v}\} \cup \{\bar{x}\}$

R∃R) $\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xP) = \mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)$

зокрема, $\mathrm{R}_{y}^{x}(\exists xP) = \exists xP$

Ці властивості можна переформулювати для $\forall x$.

За умови неістотності імені z в Ren та R∃∃ маємо *слабку* рівність

Неістотність верхніх імен в реномінаціях:

Ra) $\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\exists yP)$ при $y \notin \{\bar{v}\} \cup \{\bar{x}\}$

S$\exists$b) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$:

$$S^{\overline{v}}(\exists xP, \overline{f}) \cong \exists x S^{\overline{v}}(P, \overline{f})$$

S$\forall$b) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо $\forall x$:

$$S^{\overline{v}}(\forall xP, \overline{f}) \cong \forall x S^{\overline{v}}(P, \overline{f})$$

Для S$\exists$b та S$\forall$b умови: $x \notin \{v_1,..., v_n\}$ та x неістотне для f_1, ..., f_n.

S$\exists$) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$ ($x \notin \{v_1,..., v_n\}$):

$$S^{v_1,...v_n}(\exists xP, S^x(f_1, v_1),..., S^x(f_n, v_n)) = \exists x S^{v_1,...v_n}(P, S^x(f_1, v_1),..., S^x(f_n, v_n))$$

S$\forall$) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\forall x$ ($x \notin \{v_1,..., v_n\}$):

$$S^{v_1,...v_n}(\forall xP, S^x(f_1, v_1),..., S^x(f_n, v_n)) = \forall x S^{v_1,...v_n}(P, S^x(f_1, v_1),..., S^x(f_n, v_n))$$

Rm1. Обмежувальні умови дистрибутивності та спеціальної дистрибутивності суперпозиції щодо кванторів є істотними.

Rm2. Рівність з точністю до визначеності $\cong$ для S$\exists$b та S$\forall$b.

Задамо еквітонні f та P: $P(d)\uparrow$ при $v \notin asn(d)$ та $P([x \square 0, y \square 0, v \square 0]) = T$;
$f(d)\uparrow$ при $x \notin asn(d)$ та $f(d) = 0$ при $x \in asn(d)$.

Тоді x неістотне для f, $\exists x S^v(P, f)([y \square 0]) = T$ та $S^v(\exists xP, f)([y \square 0])\uparrow$.

Rm3. Для аналогічних властивостей R$\exists$ та R$\forall$ рівність строга!

Властивості квазіарних предикатів

Теорема 1. *Композиції* $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ *зберігають*:

– *монотонність та антитонність квазіарних предикатів*

– *еквітонність однозначних квазіарних предикатів*

– *повнототальність і фінарність квазіарних предикатів*

Наслідок 1. *Класи монотонних та антитонних квазіарних предикатів замкнені відносно композицій* $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$.

Класи еквітонних і повнототальних однозначних квазіарних предикатів замкнені відносно композицій $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$.

Теорема 2. *Композиції* $S^{\bar{v}}, =, \equiv$ *зберігають*:

– *еквітонність однозначних квазіарних фукцій та предикатів*

– *повнототальність і фінарність квазіарних фукцій та предикатів*

Наслідок 2. *Класи еквітонних і повнототальних однозначних квазіарних фукцій та предикатів замкнені відносно композицій* $S^{\bar{v}}, =, \equiv$

Приклад 1. Розглянемо наступні предикати.

$$P_1(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \{T\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\end{cases} \qquad P_2(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_3(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \varnothing, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases} \qquad P_4(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \{T\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_5(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \varnothing, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases} \qquad P_6(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_7(d)=\begin{cases}F, \text{ якщо } x\notin asn(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\in asn(d).\end{cases} \qquad P_8(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\\ \{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\end{cases}$$

$$P_9(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\\ \varnothing, \text{ якщо } x\in asn(d).\end{cases} \qquad P_{10}(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\\ \{F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\end{cases}$$

P_1 та P_2 тотальні однозначні немонотонні (нееквітонні) й неантитонні,

P_3 та P_5 монотонні (еквітонні) однозначні,

P_4 та P_6 монотонні тотальні неоднозначні,

P_7 та P_9 антитонні часткові однозначні,

P_8 та P_{10} антитонні тотальні неоднозначні.

Неспростовними чи невиконуваними можуть бути лише однозначні предикати. При цьому властивості неспростовності й виконуваності природно пов'язані:

Твердження. Предикат P неспростовний $\Leftrightarrow \neg P$ невиконуваний.

P неспростовний $\Leftrightarrow \boldsymbol{F}(P) = \varnothing \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\neg P) = \varnothing \Leftrightarrow \neg P$ невиконуваний.

Для часткових предикатів невірні деякі важливі закони класичної логіки.

Приклад 2. modus ponens невірне для загального випадку квазіарних предикатів.

Задамо P як $\perp$, Q – як тотожно хибний предикат. Тоді $P \to Q$ теж $\perp$.

Отже, P та $P \to Q$ частково істинні, водночас Q – тотожно хибний.

Приклад 3. Задамо предикат P як тотожно істинний, Q – як $\perp$, S – як тотожно хибний. Тоді $P \leftrightarrow Q$ та $Q \leftrightarrow S$ частково істинні, водночас $P \leftrightarrow S$ тотожно хибний.

Приклад 4. Нехай для предикатів p, q, s маємо $p(d) = T$, $q(d)\uparrow$, $s(d) = F$;

тоді $p(d) \cong q(d)$ та $q(d) \cong s(d)$, але невірно, що $p(d) \cong s(d)$.

Приклади 3, 4 заперечують транзитивність еквіваленції та слабкої рівності. Саме ця нетранзитивність є причиною невиконання деяких законів класичної логіки для класів часткових предикатів, які використовують слабко рівні клінієві зв'язки.

Необхідною й достатньою умовою коректності modus ponens у таких класах часткових предикатів є *еквітранзитивність* – транзитивність відношення □ слабкої рівності предикатів, тобто транзитивність еквіваленції

Отже, відмінність логіки часткових предикатів і логіки класичної виявляється вже на пропозиційному рівні. Більш того, предикати прикладів 3 та 2 еквітонні.

Для класу еквітонних предикатів умова еквітранзитивності не виконується. Водночас вона справджується для класу повнототальних еквітонних предикатів.

Приклад 5. Для загального випадку квазіарних предикатів

традиційні закони $\boldsymbol{T}(P) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$ та $\boldsymbol{T}(\forall xP) \subseteq \boldsymbol{T}(P)$ невірні

Задамо предикат P так:

$P(d) = T$ при $x \notin asn(d)$ та $P(d) = F$ при $x \in asn(d)$.

Тоді для таких d, що $x \notin asn(d)$, маємо $P(d) = T$ та $\exists xP(d) = F$.

Задамо тепер предикат P так:

$P(d) = F$ при $x \notin asn(d)$ та $P(d) = T$ при $x \in asn(d)$.

Тоді для таких d, що $x \notin asn(d)$, маємо $\forall xP(d) = T$ та $P(d) = F$.

Для еквітонних предикатів закони $\boldsymbol{T}(P) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$ та $\boldsymbol{T}(\forall xP) \subseteq \boldsymbol{T}(P)$ вірні

Приклад 6. Існують квазіарні предикати: $P \square\ \forall xP$ і невірно $P \square\ \exists xP$.

Нехай $A = \{a, b\}$. Задамо предикат P так:

$P(d) = F$ при $x \notin asn(d)$, $P(d \nabla x \square a) = T$ та $P(d \nabla x \square b)\uparrow$.

Тоді для всіх $d \in {}^{V}\!A$ маємо $\forall xP(d)\uparrow$, тому $P \square\ \forall xP$.

Водночас $P(d) = F$ при $x \notin asn(d)$, але $\exists \boldsymbol{x}P(d) = T$ для всіх $d \in {}^{V}\!A$,

тому невірно $P \square\ \exists xP$.

Приклад 7. Існують квазіарні предикати: $P \square\ \exists xP$ і невірно $P \square\ \forall xP$.

Нехай $A = \{a, b\}$. Задамо предикат P так:

$P(d) = T$ при $x \notin asn(d)$, $P(d \nabla x \square a) = F$ та $P(d \nabla x \square b)\uparrow$.

Тоді для всіх $d \in {}^{V}\!A$ маємо $\exists xP(d)\uparrow$, тому $P \square\ \exists xP$.

Водночас $P(d) = T$ при $x \notin asn(d)$, але $\forall xP(d) = F$ для всіх $d \in {}^{V}\!A$,

тому невірно $P \square\ \forall xP$

Наведені співвідношення здаються цілком очевидними, хоча це не так.

$$T(\mathrm{R}_y^x(P)) \subseteq T(\exists x(P)) \quad (\mathrm{TR}\exists)$$

$$F(\exists x(P)) \subseteq F(\mathrm{R}_y^x(P)) \quad (\mathrm{FR}\exists)$$

$$T(\forall x(P)) \subseteq T(\mathrm{R}_y^x(P)) \quad (\mathrm{TR}\forall)$$

$$F(\mathrm{R}_y^x(P)) \subseteq F(\forall x(P)) \quad (\mathrm{FR}\forall)$$

Теорема. 1) *Для загального випадку квазіарних предикатів невірне кожне із співвідношень* $\mathrm{TR}\exists$, $\mathrm{FR}\exists$, $\mathrm{TR}\forall$, $\mathrm{FR}\forall$;

2) *для монотонних предикатів*:

– *вірні* $\mathrm{TR}\exists$ *та* $\mathrm{FR}\forall$,

– *невірні* $\mathrm{FR}\exists$ *та* $\mathrm{TR}\forall$;

3) *для антитонних предикатів*:

– *вірні* $\mathrm{FR}\exists$ *та* $\mathrm{TR}\forall$,

– *невірні* $\mathrm{TR}\exists$ *та* $\mathrm{FR}\forall$.

Окремий випадок співвідношень TR$\exists$, FR$\exists$, TR$\forall$, FR$\forall$:

$$\boldsymbol{T}(P) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists x(P)) \qquad (\mathrm{T}\exists)$$

$$\boldsymbol{F}(\exists x(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(P) \qquad (\mathrm{F}\exists)$$

$$\boldsymbol{T}(\forall x(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(P) \qquad (\mathrm{T}\forall)$$

$$\boldsymbol{F}(P) \subseteq \boldsymbol{F}(\forall x(P)) \qquad (\mathrm{F}\forall)$$

Наслідок. 1) *Для загального випадку квазіарних предикатів невірне кожне із співвідношень* T$\exists$, F$\exists$, T$\forall$, F$\forall$ *невірні*;

2) *для монотонних предикатів*:

– *вірні* T$\exists$ *та* F$\forall$,

– *невірні* F$\exists$ *та* T$\forall$;

3) *для антитонних предикатів*:

– *вірні* F$\exists$ *та* T$\forall$,

– *невірні* T$\exists$ *та* F$\forall$.