РЕНОМІНАТИВНА ЛОГІКА

Семантичні моделі РНЛ – композиційні системи квазіарних предикатів реномінативного рівня $({}^{V}A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$, де $\boldsymbol{C}$ визначається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\}$.

Відповідна алгебра $(Pr^{A}, \boldsymbol{C})$ – *композиційна алгебра квазіарних предикатів реномінативного рівня.*

Побудова такої алгебри визначає мову РНЛ.

Алфавіт мови РНЛ

– V – множина предметних імен

– Ps – множина *предикатних символів* (ПС) – імен базових предикатів

– символи базових композицій $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Множину Ps назвемо *сигнатурою* мови РНЛ.

Індуктивно вводимо поняття *формули* мови РНЛ.

1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо *атомарними*.
2. Нехай Φ – формула. Тоді $\neg\Phi$ та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ – формули.
3. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\vee\Phi\Psi$ – формула.

При запису використовуємо традиційні *скорочення* формул.

$nm(\Phi)$ – множина всіх предметних імен, які фігурують в символах реномінації формули Ф.

Таку $nm(\Phi)$ назвемо *множиною імен* формули Ф.

Розширимо nm на множини формул

Для логік ЕП КС набувають вигляду $({}^{V}A,\ EPr^{A}, \boldsymbol{C})$.

Такі об'єкти – КС еквітонних предикатів реномінативного рівня.

Інтерпретуємо мову РНЛ на КС реномінативного рівня $({}^{V}A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$

Задамо тотальне однозначне $I : Ps \to Pr^{A}$, яке визначає значення ПС як базові предикати відповідної АС даних (A, Pr^{A})

Для інтерпретації формул продовжимо I до відображення $Fr \to Pr^{A}$:

1. $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$.
2. $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$.
3. $J(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(J(\Phi))$

Відображення I прив'язує АС даних (A, Pr^A) до мови.

Отримуємо об'єкти вигляду ((A, Pr^A), I) – *АС з доданою сигнатурою.*

Така АС фактично визначає КС (${}^VA$, Pr^A, C)

АС з доданою сигнатурою ((A, Pr^A), I) скорочено позначаємо (A, I).

АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову КНЛ із АС даних. Називаємо їх *моделями мови.*

Предикат I(Ф) – значення формули Ф при інтерпретації на $\boldsymbol{A}$=(A, I) – позначаємо $Ф_A$

Формула Ф *істинна при інтерпретації* на $\boldsymbol{A}$, або $\boldsymbol{A}$-*істинна,* якщо $Ф_A$ – істинний предикат.

Цей факт позначимо $\boldsymbol{A} \models Ф$.

Формула Ф *виконувана при інтерпретації* $\boldsymbol{A}$, або $\boldsymbol{A}$-*виконувана*, якщо $Ф_A$ – виконуваний предикат.

Ф *всюди істинна,* якщо Ф істинна при кожній інтерпретації.

Цей факт позначимо $\models Ф$.

Ф *виконувана,* якщо Ф виконувана при деякій інтерпретації.

Для встановлення істинності формули при *повнототальних еквітонних* інтерпретаціях досить перевірити значення відповідного Φ_A тільки на V-повних даних.

Теорема 1. $\boldsymbol{A} \models \Phi \Leftrightarrow$ *для кожного* $d \in A^V$ *маємо* $\Phi_A(d)=T$.

Наслідок. $\boldsymbol{A} \models \Phi \Leftrightarrow$ *для кожних* $\boldsymbol{A}=(A, I)$, $d \in A^V$ *маємо* $\Phi_A(d)=T$.

Для повнототальних еквітонних інтерпретацій справджується

Теорема 2. *Для кожної* $\boldsymbol{A}$, *якщо* $\boldsymbol{A} \models \Phi$ *та* $\boldsymbol{A} \models \Phi \to \Psi$, *то* $\boldsymbol{A} \models \Psi$.

Наслідок. *Якщо* $\models \Phi$ *та* $\models \Phi \to \Psi$, *то* $\models \Psi$.

Ім'я $x \in V$ (*строго*) *неістотне для формули* Φ, якщо для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ ім'я x (строго) неістотне для Φ_A.

У випадку логіки ЕП критерій неістотності предметних імен для формул встановлює

Теорема 3. *Ім'я* $x \in V$ *неістотне для* $\Phi \Leftrightarrow$ для всіх $v \in V$ маємо

$$\models R_v^x(\Phi) \leftrightarrow \Phi$$

Успадкування властивостей ПЛ для РНЛ відбувається перенесенням на рівень РНЛ понять тавтології, тавтологічних наслідку і еквівалентності.

Тавтології – формули, які мають структуру тавтологій мови ПЛ.

Формула *пропозиційно нерозкладна,* якщо вона атомарна або вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi$

Fr_0 – множина всіх пропозиційно нерозкладних формул мови L.

Істиннісна оцінка мови L – довільне відображення $\tau : Fr_0 \to \{T, F\}$.

Продовжимо його до відображення $\tau : Fr \to \{T, F\}$:

– $\tau(\neg\Phi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=F$;

– $\tau(\vee\Phi\Psi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=T$ або $\tau(\Psi)=T$.

Φ *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi)=T$ при кожній істиннісній оцінці τ.

Кожна тавтологія є всюди істинною формулою.

Приклад 4. Формула $\Phi \leftrightarrow R^{\bar{x}}_{\bar{x}}\Phi$ всюди істинна, але не тавтологія

На множині *Fr* формул введемо відношення
тавтологічного наслідку $\models$ (позначаємо також $|=_{т}$),
тавтологічної еквівалентності $\sim_{т}$,
логічного наслідку $|=$,
слабкого логічного наслідку $||=$,
логічної еквівалентності $\sim$.

Ψ є *тавтологічним наслідком* Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо
$\Phi \to \Psi$ – тавтологія.

Φ та Ψ *тавтологічно еквівалентні* (позн. $\Phi \sim_{т} \Psi$): $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$

Ψ є *логічним наслідком* Φ (позн. $\Phi |= \Psi$), якщо
для кожної $\boldsymbol{A}$ маємо: $\boldsymbol{T}(\Phi_{A}) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_{A}) = \varnothing$

Зрозуміло, що $\Phi |= \Psi \Leftrightarrow \Phi \to \Psi$ всюди істинна.

Φ та Ψ *логічно еквівалентні* (позн. $\Phi \sim \Psi$): $\Phi |= \Psi$ та $\Psi |= \Phi$.

Зрозуміло, що $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow$ формули $\Phi \to \Psi$ та $\Psi \to \Phi$ всюди істинні.

Ψ є *слабким логічним наслідком* формули Φ, що позн. $\Phi || = \Psi$, якщо
для кожної $\boldsymbol{A}$ маємо: $\boldsymbol{A} |= \Phi \Rightarrow \boldsymbol{A} |= \Psi$.

Основні властивості відношень $\models$, $|=$, $||=$ та $\sim$:

1) Φ тавтологія $\Leftrightarrow$ $\models \Phi$;

2) Φ всюди істинна $\Leftrightarrow$ $|=\Phi$ $\Leftrightarrow$ $||=\Phi$;

3) $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi |= \Psi$; але не завжди $\Phi |= \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$;

4) $\Phi |= \Psi \Rightarrow \Phi ||= \Psi$; але не завжди $\Phi ||= \Psi \Rightarrow \Phi |= \Psi$;

5) $\Phi \sim_{\text{т}} \Psi \Leftrightarrow \Phi \leftrightarrow \Psi$ тавтологія

6) $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow |= \Phi \leftrightarrow \Psi$;

7) відношення $\models$, $|=$ та $||=$ рефлексивні і транзитивні;

8) відношення $\sim$ рефлексивне, транзитивне і симетричне.

Семантичні властивості РНЛ

Для РНЛ успадковуються семантичні властивості пропозиційного рівня.

Вкажемо властивості формул РНЛ, пов'язані з реномінацією. Вони відображають відповідні властивості композиції реномінації.

RT) Згортка тотожної пари імен у реномінації:

$$\models R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

Зокрема, $\models R_{z}^{z}(\Phi) \leftrightarrow \Phi$

R¬) R¬-дистрибутивність:

$$\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

R∨) R∨-дистрибутивність:

$$\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$$

Аналогічно – властивості R→, R&, R↔.

RR) Згортка реномінацій:

$$\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$$

RN) Нехай y неістотне для формули Φ. Тоді

$$\models R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

Зокрема, $\models R_{z}^{y}(\Phi) \leftrightarrow \Phi$

RП) Якщо $\models \Phi$, то $\models R_{z}^{y}(\Phi)$

Теорема 4 (*семантичної еквівалентності*). *Нехай формула* Φ' *отримана із формули* Φ *заміною деяких входжень формул* $\Phi_1, ..., \Phi_n$ *на* $\Psi_1, ..., \Psi_n$ *відповідно.*

Якщо $\Phi_1 \sim \Psi_1, ..., \Phi_n \sim \Psi_n$, *то* $\Phi \sim \Phi'$.

Доводиться індукцією за побудовою формули

Теорема (про розширення). *Нехай АС одної сигнатури* $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{A}})$ *і* $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{B}})$ *та формула* Φ *такі:* $\forall p\in\sigma(\Phi)\ \forall\delta\in{}^{V}A$ *із* $p_A(\delta)\downarrow$ *випливає* $p_B(\delta)\downarrow=p_A(\delta)$. *Тоді* $\forall d\in{}^{V}A$ *із* $\Phi_A(d)\downarrow$ *випливає* $\Phi_B(d)\downarrow=\Phi_A(d)$.

Доводиться індукцією за побудовою формули Φ.

Теорема 6 вірна для загального випадку логік квазіарних предикатів.

Нехай $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{A}})$ і $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{B}})$ – АС однієї сигнатури.

АС $\boldsymbol{B}$ – *система розширень* для АС $\boldsymbol{A}$, якщо $\forall p\in Ps\ \forall\delta\in{}^{V}A$ із $p_A(\delta)\downarrow$ випливає $p_B(\delta)\downarrow=p_A(\delta)$.

Наслідок. *Нехай* $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{B}})$ *– система розширень для АС* $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{A}})$. *Тоді для довільних* Φ *та* $d\in{}^{V}A$ *із* $\Phi_A(d)\downarrow$ *випливає* $\Phi_B(d)\downarrow=\Phi_A(d)$.

Нормальні форми в РНЛ

Формула Φ – в *слабкій нормальній формі*, якщо символи реномінації в формулі Φ застосовні тільки до ПС.

Формула Φ – в *нормальній формі*, або *нормальна*, якщо Φ – в слабкій нормальній формі, причому всі $R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n} p$ із Φ не мають тотожних перейменувань.

Формула Φ *примітивна:* Φ атомарна або має вигляд

$R^{\bar{v}}_{\bar{x}} p$, де $\{\bar{v}\} \cap \mu(p) = \varnothing$ та відсутні тотожні перейменування

Теорема 1. $\forall$ Φ *можна збудувати* Ψ *в нормальній формі:* $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

Зведення Φ до нормальної форми виконуємо так.
Використовуючи R¬ та R$\vee$, просуваємо реномінації вглиб формули
Використовуючи RR, згортаємо сусідні символи реномінації.
При появі усуваємо тотожні перейменування згідно RT.
За теоремою еквівалентності, після просунення всіх символів реномінації на рівень ПС та усунення тотожних перейменувань дістанемо формулу Ψ у нормальній формі таку, що $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

Формулу Ψ у нормальній формі, утворену з Φ за допомогою перетворень на основі R¬, R$\vee$, RR та RT, назвемо *нормалізантою* формули Φ.

Наслідок 2. *Нехай* Ψ *– нормалізанта формули* Φ. *Тоді* $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$.

Наслідок 3. *Нехай* Ψ_1 *та* Ψ_2 *– нормалізанти* Φ. *Тоді* $\models \Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$.

Індукцією за побудовою формули доводиться

Теорема 2. *Нехай* Ψ *– нормалізанта формули* Φ. *Тоді нормалізанта формули* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi$ *є нормалізантою формули* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$

Формула Φ – *субтавтологія*, якщо її нормалізанта – тавтологія.

Коректність таких визначень гарантує

Теорема 3. *Якщо* Ψ_1 *та* Ψ_2 *– нормалізанти формули* Φ, *а формула* Ψ_1 *– тавтологія, то й* Ψ_2 *– тавтологія.*

Фундаментальну роль субтавтологій встановлює

Теорема 4. *Формула* Φ *– субтавтологія* $\Leftrightarrow$ $\models \Phi$.

Відношення логічного наслідку для множин формул РНЛ

$\mathbf{\Gamma}$ та $\mathbf{\Delta}$ – множини формул мови сигнатури Ps.

$\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$ – АС сигнатури Ps.

$\mathbf{\Delta}$ є *логічним наслідком* $\mathbf{\Gamma}$ в *АС* $\boldsymbol{A}$, якщо $\forall d \in {}^{V}A$

$\Phi_A(d)=T \ \forall \Phi \in \mathbf{\Gamma} \ \Rightarrow$ неможливо $\Psi_A(d)=F \ \forall \Psi \in \mathbf{\Delta}$.

Позначаємо $\mathbf{\Gamma} \models_A \mathbf{\Delta}$

$\mathbf{\Delta}$ є *логічним наслідком* $\mathbf{\Gamma}$, якщо

$\mathbf{\Gamma} \models_A \mathbf{\Delta} \ \forall$ АС $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$ сигнатури Ps .

Це позначаємо $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$

Отже, $\mathbf{\Gamma} \not\models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow$ існують АС $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$ та $d \in {}^{V}A$ такі:

$\forall \Phi \in \mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_A(d)=T$ та $\forall \Psi \in \mathbf{\Delta}$ маємо $\Psi_A(d)=F$

Відношення $\models$ для множин формул рефлексивне, але не транзитивне

Теорема 1 (*заміни еквівалентних*). *Нехай* $\Phi \sim \Psi$. *Тоді*

$$\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \ \textit{та} \ \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Psi.$$

Властивості відношення |=

G1, G2 та П1–П10 успадковуються на реномінативному рівні

Вкажемо властивості відношення |=, пов‘язані з композицією реномінації.

Вони безпосередньо відтворюють відповідні властивості формул.

Кожна така властивість розщеплюється на дві властивості для |=

RT$_{\vdash}$) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$

RT$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$

RR$_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$

RR$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$

R¬$_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$

R¬$_{\dashv}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$

R$\vee_{|-}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$

R$\vee_{-|}$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$

PsN$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(p), \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p), \Gamma \models \Delta$ при $y \in \mu(p)$, де $p \in Ps$

PsN$_{-|}$) $\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(p) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ при $y \in \mu(p)$, де $p \in Ps$

ΦN$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$ при умові $y \in \mu(\Phi)$.

ΦN$_{-|}$) $\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ при умові $y \in \mu(\Phi)$.

Умову $y \in \mu(\Phi)$ можна ослабити до умови *y неістотне для* Φ.

Базові властивості відношення $\models$ на реномінативному рівні:

П1–П4 та RT$_{|-}$, RT$_{-|}$, RR$_{|-}$, RR$_{-|}$, R¬$_{|-}$, R¬$_{-|}$, R$\vee_{|-}$, R$\vee_{-|}$, PsN$_{|-}$, PsN$_{-|}$

Реномінативні числення РНЛ повнототальних ЕП

Реномінативне неокласичне числення (РНКЧ):

ФС вигляду $T = (Fr, Ax, P)$.

Fr – множина формул мови РНЛ

Ax – множина *логічних аксіом*

P – множина *правил виведення*.

$A_{лог}$ задається схемами аксіом:

AxПР) $\neg\Phi \vee \Phi$ – пропозиційні аксіоми

AxRT) $R_{\bar{x}}^{\bar{x}}(\Phi) \leftrightarrow \Phi$ – аксіоми елімінації тотожних перейменувань

AxR¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – аксіоми R¬-дистрибутивності

AxR∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$ – аксіоми R∨-дистрибутивності

AxRR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$ – аксіоми згортки реномінацій

Такі РНКЧ назвемо *вільними*.

Множина P правил виведення РНКЧ:

П1) $\Phi \vdash \Psi \vee \Phi$ − правило розширення.

П2) $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$ − правило скорочення.

П3) $\Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi$ − правило асоціативності.

П4) $\Phi \vee \Psi,\ \neg\Phi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi$ − правило перетину.

П5) $\Phi \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ − правило реномінації (ПР).

Теорема РНКЧ: формула, яка виводиться із аксіом за допомогою ПВ

Позначення: $T \vdash \Phi$, або $\vdash \Phi$, якщо T мається на увазі.

Th(T) – множина теорем РНКЧ T

Теорема. *1) Логічні аксіоми є всюди істинними формулами;*

2) Висновки правил П1–П4 – логічні наслідки засновків;

3) Висновок правила П5 – слабкий логічний наслідок засновку.

Модель мови ***A***=(*A*, *I*) – *модель* РНКЧ *T*, якщо ***A*** $\models$Φ для всіх Φ∈*Ax* ПВ для кожної інтерпретації ***A*** зберігають істинність на ***A***. Отже:

Теорема 2 (*істинності*). *Кожна теорема РНКЧ T істинна на кожній моделі T.*

Наслідок. ∀ *теорема вільного РНКЧ* − *всюди істинна формула* Φ *істинна в РНКЧ T*, якщо Φ істинна на ∀ моделі числення *T*.

Те, що Φ істинна в *T*, позначаємо *T* $\models$Φ.

Теорема істинності. *Якщо T* $\vdash$Φ, *то T* $\models$Φ.

Теорема істинності засвідчує *коректність* РНКЧ:

із *синтаксичної* істинності випливає *семантична* істинність.

Кожне виведення засобами ПЧ є виведенням вільного РНКЧ.

Теорема 3 (тавтології). *Кожна тавтологія є теоремою.*

Наслідок. *Якщо* $\{\Phi_1, ..., \Phi_n\} \models \Phi$ *та* $\vdash\Phi_1, ..., \vdash\Phi_n$, *то* $\vdash\Phi$.

Теорема 4 (еквівалентності). *Нехай* Φ' *отримана із* Φ *заміною деяких входжень формул* $\Phi_1, ..., \Phi_n$ *на* $\Psi_1, ..., \Psi_n$ *відповідно. Якщо* $\vdash\Phi_1\leftrightarrow\Psi_1, ..., \vdash\Phi_n\leftrightarrow\Psi_n$, то $\vdash\Phi\leftrightarrow\Phi'$.

Теорема 5. *Нехай* Ψ – *нормалізанта формули* Φ. *Тоді* $\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$.

Нормалізанта Ψ формули Φ утворена із Φ за допомогою перетворень на основі RT, R¬, R$\vee$, RR, RN. На синтаксичному рівні вони задані відповідними аксіомами.

Далі скористуємося TT і теоремою еквівалентності

Наслідок 1. *Нехай* Φ – *субтавтологія, тоді* $\vdash \Phi$.

Нехай Ψ – нормалізанта субтавтології Φ. За теоремою 5 маємо $\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$. Але Ψ –тавтологія, тому $\vdash \Psi$. Звідси $\vdash \Phi$ за TT.

Теорема 6 (повноти). $\forall$ *РНКЧ* T *маємо* $T \models \Phi \Leftrightarrow T \vdash \Phi$

За теоремою істинності із $T \vdash \Phi$ випливає $T \models \Phi$.

Умова $T \models \Phi$ для стандартних РНКЧ означає □$\mu \models \Phi$.

За теоремою 4 із $\models \Phi$ випливає, що Φ – субтавтологія.

За наслідком теореми 5 маємо $T \vdash \Phi$

Наслідок теореми повноти – *розв'язність* вільних РНКЧ.

Секвенційні числення РНЛ

Базові секвенційні форми:

$$\vdash\neg \quad \frac{\dashv A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma} \qquad\qquad \dashv\neg \quad \frac{\vdash A, \Sigma}{\dashv \neg A, \Sigma}$$

$$\vdash\vee \quad \frac{\vdash A, \Sigma \qquad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma} \qquad\qquad \vdash\vee \quad \frac{\dashv A, \dashv B, \Sigma}{\dashv A \vee B, \Sigma}$$

$$\vdash RT \quad \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A), \Sigma} \qquad\qquad \dashv RT \quad \frac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A), \Sigma}$$

$$\vdash RR \quad \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma} \qquad\qquad \vdash RR \quad \frac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$$

$$\vdash R\neg \quad \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma} \qquad\qquad \dashv R\neg \quad \frac{\dashv \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma}$$

$$\vdash R\vee \quad \frac{\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(B),\Sigma}{\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A\vee B),\Sigma} \qquad\qquad \vdash R\vee \quad \frac{\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(B),\Sigma}{\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A\vee B),\Sigma}$$

Теорема 1. 1) *Нехай* $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ та $\dfrac{\Sigma \quad \mathrm{Y}}{\Omega}$ – *секвенційні форми, де* $\mathbf{\Sigma} = {}_{\vdash}\mathbf{\Lambda}_{\dashv}\mathbf{K}$, $\mathbf{Y} = {}_{\vdash}\mathbf{X}_{\dashv}\mathbf{Z}$, $\mathbf{\Omega} = {}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\mathbf{\Delta}$. *Тоді:*

1) *якщо* $\mathbf{\Lambda} \models \mathbf{K}$, *то* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$;

2) *якщо* $\mathbf{\Lambda} \models \mathbf{K}$ *та* $\mathbf{X} \models \mathbf{Z}$, *то* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

Теорема 2 (коректності). *Нехай* ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\mathbf{\Delta}$ *вивідна. Тоді* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

Теорема 3 (повноти). *Нехай* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$. *Тоді* ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\mathbf{\Delta}$ *вивідна.*

Для доведення теореми повноти використовується метод модельних (Хінтікківських) множин.