

РЕНОМІНАТИВНА ЛОГІКА

Семантичні моделі РНЛ – композиційні системи квазіарних предикатів реномінативного рівня $({}^V A, Pr^A, C)$, де C визначається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\}$.

Відповідна алгебра (Pr^A, C) – композиційна алгебра квазіарних предикатів реномінативного рівня.

Побудова такої алгебри визначає мову РНЛ.

Алфавіт мови РНЛ

– V – множина предметних імен

– Ps – множина *предикатних символів* (ПС) – імен базових предикатів

– символи базових композицій $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Множину Ps назвемо *сигнатурою* мови РНЛ.

Індуктивно вводимо поняття *формули* мови РНЛ.

1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо *атомарними*.

2. Нехай Φ – формула. Тоді $\neg\Phi$ та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ – формули.

3. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\vee\Phi\Psi$ – формула.

При запису використовуємо традиційні *скорочення* формул.

$nt(\Phi)$ – множина всіх предметних імен, які фігурують в символах реномінації формули Φ .

Таку $nt(\Phi)$ назвемо *множиною імен* формули Φ .

Розширимо nt на множини формул

Для логік ЕП КС набувають вигляду $({}^V A, EPr^A, C)$.

Такі об'єкти – КС еквітонних предикатів реномінативного рівня.

Інтерпретуємо мову РНЛ на КС реномінативного рівня $({}^V A, Pr^A, C)$

Задамо тотальне однозначне $I: Ps \rightarrow Pr^A$, яке визначає значення ПС як базові предикати відповідної АС даних (A, Pr^A)

Для інтерпретації формул продовжимо I до відображення $Fr \rightarrow Pr^A$:

1. $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$.
2. $I(\bigvee \Phi\Psi) = \bigvee (I(\Phi), I(\Psi))$.
3. $J(R_x^{\bar{v}}\Phi) = R_x^{\bar{v}}(J(\Phi))$

Відображення I прив'язує АС даних (A, Pr^A) до мови.

Отримуємо об'єкти вигляду $((A, Pr^A), I)$ – АС з доданою сигнатурою.

Така АС фактично визначає КС $({}^V A, Pr^A, C)$

АС з доданою сигнатурою $((A, Pr^A), I)$ скорочено позначаємо (A, I) .

АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову КНЛ із АС даних. Називаємо їх *моделями мови*.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на $A=(A, I)$ – позначаємо Φ_A

Формула Φ істинна при інтерпретації на A , або A -істинна, якщо Φ_A – істинний предикат.

Цей факт позначимо $A \models \Phi$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації A , або A -виконувана, якщо Φ_A – виконуваний предикат.

Φ всюди істинна, якщо Φ істинна при кожній інтерпретації.

Цей факт позначимо $\models \Phi$.

Φ виконувана, якщо Φ виконувана при деякій інтерпретації.

Для встановлення істинності формули при *повнототальних еквітонних* інтерпретаціях досить перевірити значення відповідного Φ_A тільки на V -повних даних.

Теорема 1. $A \models \Phi \Leftrightarrow$ для кожного $d \in A^V$ маємо $\Phi_A(d) = T$.

Наслідок. $A \models \Phi \Leftrightarrow$ для кожних $A = (A, I)$, $d \in A^V$ маємо $\Phi_A(d) = T$.

Для повнототальних еквітонних інтерпретацій справджується

Теорема 2. Для кожної A , якщо $A \models \Phi$ та $A \models \Phi \rightarrow \Psi$, то $A \models \Psi$.

Наслідок. Якщо $\models \Phi$ та $\models \Phi \rightarrow \Psi$, то $\models \Psi$.

Ім'я $x \in V$ (строго) неістотне для формули Φ , якщо

для кожної моделі мови A ім'я x (строго) неістотне для Φ_A .

У випадку логіки ЕП критерій неістотності предметних імен для формул встановлює

Теорема 3. Ім'я $x \in V$ неістотне для $\Phi \Leftrightarrow$ для всіх $v \in V$ маємо

$$\models R_v^x(\Phi) \leftrightarrow \Phi$$

Успадкування властивостей ПЛ для РНЛ відбувається перенесенням на рівень РНЛ понять тавтології, тавтологічних наслідку і еквівалентності.

Тавтології – формули, які мають структуру тавтологій мови ПЛ.

Формула *пропозиційно нерозкладна*, якщо вона атомарна або вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$

Fr_0 – множина всіх пропозиційно нерозкладних формул мови L .

Істиннісна оцінка мови L – довільне відображення $\tau : Fr_0 \rightarrow \{T, F\}$.

Продовжимо його до відображення $\tau : Fr \rightarrow \{T, F\}$:

– $\tau(\neg\Phi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=F$;

– $\tau(\bigvee \Phi\Psi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=T$ або $\tau(\Psi)=T$.

Φ *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi)=T$ при кожній істиннісній оцінці τ .

Кожна тавтологія є всюди істинною формулою.

Приклад 4. Формула $\Phi \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{x}}\Phi$ всюди істинна, але не тавтологія

На множині Fr формул введемо відношення
тавтологічного наслідку \vDash (позначаємо також \vDash_T),
тавтологічної еквівалентності \sim_T ,
логічного наслідку \models ,
слабкого логічного наслідку \models ,
логічної еквівалентності \sim .

Ψ є тавтологічним наслідком Φ (позн. $\Phi \vDash \Psi$), якщо
 $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія.

Φ та Ψ тавтологічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim_T \Psi$): $\Phi \vDash \Psi$ та $\Psi \vDash \Phi$

Ψ є логічним наслідком Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо
для кожної A маємо: $T(\Phi_A) \cap F(\Psi_A) = \emptyset$

Зрозуміло, що $\Phi \models \Psi \Leftrightarrow \Phi \rightarrow \Psi$ всюди істинна.

Φ та Ψ логічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim \Psi$): $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Зрозуміло, що $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow$ формули $\Phi \rightarrow \Psi$ та $\Psi \rightarrow \Phi$ всюди істинні.

Ψ є слабким логічним наслідком формули Φ , що позн. $\Phi \models \Psi$, якщо
для кожної A маємо: $A \models \Phi \Rightarrow A \models \Psi$.

Основні властивості відношень \vDash , \models , \Vdash та \sim :

- 1) Φ тавтологія $\Leftrightarrow \vDash \Phi$;
- 2) Φ всюди істинна $\Leftrightarrow \models \Phi \Leftrightarrow \Vdash \Phi$;
- 3) $\Phi \vDash \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$; але не завжди $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \vDash \Psi$;
- 4) $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \Vdash \Psi$; але не завжди $\Phi \Vdash \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$;
- 5) $\Phi \sim_{\text{T}} \Psi \Leftrightarrow \Phi \leftrightarrow \Psi$ тавтологія
- 6) $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \Psi$;
- 7) відношення \vDash , \models та \Vdash рефлексивні і транзитивні;
- 8) відношення \sim рефлексивне, транзитивне і симетричне.

Семантичні властивості РНЛ

Для РНЛ успадковуються семантичні властивості пропозиційного рівня.

Вкажемо властивості формул РНЛ, пов'язані з реномінацією. Вони відображають відповідні властивості композиції реномінації.

RT) Згортка тотожної пари імен у реномінації:

$$\models R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

Зокрема, $\models R_z^z(\Phi) \leftrightarrow \Phi$

R \neg) R \neg -дистрибутивність:

$$\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

R \vee) R \vee -дистрибутивність:

$$\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$$

Аналогічно – властивості R \rightarrow , R $\&$, R \leftrightarrow .

RR) Згортка реномінацій:

$$\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$$

RN) Нехай y неістотне для формули Φ . Тоді

$$\models R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

Зокрема, $\models R_z^y(\Phi) \leftrightarrow \Phi$

RP) Якщо $\models \Phi$, то $\models R_z^y(\Phi)$

Теорема 4 (семантичної еквівалентності). Нехай формула Φ' отримана із формули Φ заміною деяких входжень формул Φ_1, \dots, Φ_n на Ψ_1, \dots, Ψ_n відповідно.

Якщо $\Phi_1 \sim \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim \Psi_n$, то $\Phi \sim \Phi'$.

Доводиться індукцією за побудовою формули

Теорема (про розширення). *Нехай АС одної сигнатури $A = (A, I_A)$ і $B = (A, I_B)$ та формула Φ такі: $\forall p \in \sigma(\Phi) \forall \delta \in {}^V A$ із $p_A(\delta) \downarrow$ випливає $p_B(\delta) \downarrow = p_A(\delta)$. Тоді $\forall d \in {}^V A$ із $\Phi_A(d) \downarrow$ випливає $\Phi_B(d) \downarrow = \Phi_A(d)$.*

Доводиться індукцією за побудовою формули Φ .

Теорема 6 вірна для загального випадку логік квазіарних предикатів.

Нехай $A = (A, I_A)$ і $B = (A, I_B)$ – АС однієї сигнатури.

АС B – система розширень для АС A , якщо $\forall p \in Ps \forall \delta \in {}^V A$ із $p_A(\delta) \downarrow$ випливає $p_B(\delta) \downarrow = p_A(\delta)$.

Наслідок. *Нехай $B = (A, I_B)$ – система розширень для АС $A = (A, I_A)$. Тоді для довільних Φ та $d \in {}^V A$ із $\Phi_A(d) \downarrow$ випливає $\Phi_B(d) \downarrow = \Phi_A(d)$.*

Нормальні форми в РНЛ

Формула Φ – в *слабкій нормальній формі*, якщо символи реномінації в формулі Φ застосовні тільки до ПС.

Формула Φ – в *нормальній формі*, або *нормальна*, якщо Φ – в слабкій нормальній формі, причому всі $R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} p$ із Φ не мають тотожних перейменувань.

Формула Φ *примітивна*: Φ атомарна або має вигляд

$R_{\bar{x}}^{\bar{v}} p$ де $\{ \bar{y} \cap \bar{u} \} p = \emptyset$ та відсутні тотожні перейменування

Теорема 1. $\forall \Phi$ можна збудувати Ψ в нормальній формі: $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

Зведення Φ до нормальної форми виконуємо так.

Використовуючи R_{\neg} та R_{\vee} , просуваємо реномінації вглиб формули

Використовуючи RR , згортаємо сусідні символи реномінації.

При появі усуваємо тотожні перейменування згідно RT .

За теоремою еквівалентності, після просунення всіх символів реномінації на рівень ПС та усунення тотожних перейменувань дістанемо формулу Ψ у нормальній формі таку, що $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

Формулу Ψ у нормальній формі, утворену з Φ за допомогою перетворень на основі $R\neg$, $R\vee$, RR та RT , назвемо *нормалізантаю* формули Φ .

Наслідок 2. *Нехай Ψ – нормалізанта формули Φ . Тоді $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$.*

Наслідок 3. *Нехай Ψ_1 та Ψ_2 – нормалізанти Φ . Тоді $\models \Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$.*

Індукцією за побудовою формули доводиться

Теорема 2. *Нехай Ψ – нормалізанта формули Φ . Тоді*

нормалізанта формули $R_{\bar{x}}\Psi$ є нормалізантаю формули $R_{\bar{x}}\Phi$

Формула Φ – *субтавтологія*, якщо її нормалізанта – тавтологія.

Коректність таких визначень гарантує

Теорема 3. *Якщо Ψ_1 та Ψ_2 – нормалізанти формули Φ , а формула Ψ_1 – тавтологія, то й Ψ_2 – тавтологія.*

Фундаментальну роль субтавтологіям встановлює

Теорема 4. *Формула Φ – субтавтологія $\Leftrightarrow \models \Phi$.*

Відношення логічного наслідку для множин формул РНЛ

Γ та Δ – множини формул мови сигнатури Ps .

$A=(A, I)$ – АС сигнатури Ps .

Δ є логічним наслідком Γ в АС A , якщо $\forall d \in {}^V A$

$\Phi_A(d)=T \ \forall \Phi \in \Gamma \Rightarrow$ неможливо $\Psi_A(d)=F \ \forall \Psi \in \Delta$.

Позначаємо $\Gamma \models_A \Delta$

Δ є логічним наслідком Γ , якщо

$\Gamma \models_A \Delta \ \forall$ АС $A=(A, I)$ сигнатури Ps .

Це позначаємо $\Gamma \models \Delta$

Отже, $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують АС $A=(A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі:

$\forall \Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(d)=T$ та $\forall \Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(d)=F$

Відношення \models для множин формул рефлексивне, але не транзитивне

Теорема 1 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim \Psi$. Тоді

$\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Властивості відношення \models

G1, G2 та П1–П10 успадковуються на реномінативному рівні
Вкажемо властивості відношення \models , пов'язані з композицією
реномінації.

Вони безпосередньо відтворюють відповідні властивості формул.
Кожна така властивість розщеплюється на дві властивості для \models

$$RT_{|-}) \quad R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$$

$$RT_{-|}) \quad \Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

$$RR_{|-}) \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$$

$$RR_{-|}) \quad \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$$

$$R_{\neg|-}) \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$$

$$R_{\neg-|}) \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$$

$$R \vee_{|-} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$$

$$R \vee_{-|} \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$$

$$PsN_{|-} R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(p), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p), \Gamma \models \Delta \quad \text{при } y \in \mu(p), \text{ де } p \in Ps$$

$$PsN_{-|} \Gamma \models \Delta, R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(p) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \quad \text{при } y \in \mu(p), \text{ де } p \in Ps$$

$$\Phi N_{|-} R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \quad \text{при умові } y \in \mu(\Phi).$$

$$\Phi N_{-|} \Gamma \models \Delta, R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \quad \text{при умові } y \in \mu(\Phi).$$

Умову $y \in \mu(\Phi)$ можна ослабити до умови y неістотне для Φ .

Базові властивості відношення \models на реномінативному рівні:

П1–П4 та $RT_{|-}, RT_{-|}, RR_{|-}, RR_{-|}, R^{-}_{|-}, R^{-}_{-|}, R \vee_{|-}, R \vee_{-|}, PsN_{|-}, PsN_{-|}$

Реномінативні числення РНЛ повнототальних ЕП

Реномінативне неокласичне числення (РНКЧ):

ФС вигляду $T = (Fr, Ax, P)$.

Fr – множина формул мови РНЛ

Ax – множина логічних аксіом

P – множина правил виведення.

$A_{\text{лог}}$ задається схемами аксіом:

$AxIP$) $\neg\Phi \vee \Phi$ – пропозиційні аксіоми

$AxRT$) $R_{\bar{x}}(\Phi) \leftrightarrow \Phi$ – аксіоми елімінації тотожних перейменувань

$AxR\neg$) $R_{\bar{x}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}(\Phi)$ – аксіоми $R\neg$ -дистрибутивності

$AxR\vee$) $R_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}(\Psi)$ – аксіоми $R\vee$ -
дистрибутивності

$AxRR$) $R_{\bar{x}}(R_{\bar{y}}^w(\Phi)) \leftrightarrow R_{\bar{x}} \boxtimes_{\bar{y}}^w(\Phi)$ – аксіоми згортки реномінацій

Такі РНКЧ назвемо *вільними*.

Множина P правил виведення РНКЧ:

П1) $\Phi \vdash \Psi \vee \Phi$ – правило розширення.

П2) $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$ – правило скорочення.

П3) $\Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi$ – правило асоціативності.

П4) $\Phi \vee \Psi, \neg \Phi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi$ – правило перетину.

П5) $\Phi \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – правило реномінації (ПР).

Теорема РНКЧ: формула, яка виводиться із аксіом за допомогою ПВ

Позначення: $T \vdash \Phi$, або $\vdash \Phi$, якщо T мається на увазі.

$\text{Th}(T)$ – множина теорем РНКЧ T

Теорема. 1) *Логічні аксіоми є всюди істинними формулами;*

2) *Висновки правил П1–П4 – логічні наслідки засновків;*

3) *Висновок правила П5 – слабкий логічний наслідок засновку.*

Модель мови $A=(A, I)$ – модель РНКЧ T , якщо $A \models \Phi$ для всіх $\Phi \in Ax$ ПВ для кожної інтерпретації A зберігають істинність на A . Отже:

Теорема 2 (істинності). *Кожна теорема РНКЧ T істинна на кожній моделі T .*

Наслідок. \forall теорема вільного РНКЧ – всюди істинна формула Φ істинна в РНКЧ T , якщо Φ істинна на \forall моделі числення T .
Те, що Φ істинна в T , позначаємо $T \models \Phi$.

Теорема істинності. *Якщо $T \not\models \Phi$, то $T \models \neg \Phi$.*

Теорема істинності засвідчує коректність РНКЧ:

із синтаксичної істинності випливає семантична істинність.

Кожне виведення засобами ПЧ є виведенням вільного РНКЧ.

Теорема 3 (тавтології). *Кожна тавтологія є теоремою.*

Наслідок. *Якщо $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \vdash \Phi$ та $\vdash \neg \Phi_1, \dots, \vdash \neg \Phi_n$, то $\vdash \neg \Phi$.*

Теорема 4 (еквівалентності). *Нехай Φ' отримана із Φ заміною деяких входжень формул Φ_1, \dots, Φ_n на Ψ_1, \dots, Ψ_n відповідно. Якщо $\vdash \neg \Phi_1 \leftrightarrow \Psi_1, \dots, \vdash \neg \Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$, то $\vdash \neg \Phi \leftrightarrow \Phi'$.*

Теорема 5. *Нехай Ψ – нормалізанта формули Φ . Тоді $\vdash\text{-}\Phi \leftrightarrow \Psi$.*

Нормалізанта Ψ формули Φ утворена із Φ за допомогою перетворень на основі $R_T, R_{\neg}, R_{\vee}, R_R, R_N$. На синтаксичному рівні вони задані відповідними аксіомами.

Далі скористуємося ТТ і теоремою еквівалентності

Наслідок 1. *Нехай Φ – субтавтологія, тоді $\vdash\text{-}\Phi$.*

Нехай Ψ – нормалізанта субтавтології Φ . За теоремою 5 маємо $\vdash\text{-}\Phi \leftrightarrow \Psi$. Але Ψ – тавтологія, тому $\vdash\text{-}\Psi$. Звідси $\vdash\text{-}\Phi$ за ТТ.

Теорема 6 (повноти). $\forall RHKЧ T$ маємо $T \models \Phi \Leftrightarrow T \vdash\text{-}\Phi$

За теоремою істинності із $T \vdash\text{-}\Phi$ випливає $T \models \Phi$.

Умова $T \models \Phi$ для стандартних РНКЧ означає $\Box \mu \models \Phi$.

За теоремою 4 із $\models \Phi$ випливає, що Φ – субтавтологія.

За наслідком теореми 5 маємо $T \vdash\text{-}\Phi$

Наслідок теореми повноти – *розв'язність* вільних РНКЧ.

Секвенційні числення РНЛ

Базові секвенційні форми:

$$\frac{|-\neg A, \Sigma}{|-\neg A, \Sigma}$$

$$\frac{|-\neg A, \Sigma}{|-\neg A, \Sigma}$$

$$\frac{|-\ A, \Sigma \quad |-\ B, \Sigma}{|-\ A \vee B, \Sigma}$$

$$\frac{|-\ A, |-\ B, \Sigma}{|-\ A \vee B, \Sigma}$$

$$\frac{|-\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{|-\ R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(A), \Sigma}$$

$$\frac{|-\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{|-\ R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(A), \Sigma}$$

$$\frac{|-\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{|-\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$$

$$\frac{|-\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{|-\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$$

$$\frac{|-\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{|-\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma}$$

$$\frac{|-\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{|-\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma}$$

$$\begin{array}{c} \vdash R \vee \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\vee}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\vee}(B), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\vee}(A \vee B), \Sigma} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdash R \vee \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\vee}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\vee}(B), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\vee}(A \vee B), \Sigma} \end{array}$$

Теорема 1. 1) Нехай $\frac{\Sigma}{\text{та}} \frac{\Sigma}{Y}$ – секвенційні форми, де

$\Sigma = \vdash \Lambda \vdash \mathbf{K}$, $Y = \vdash \mathbf{X} \vdash \mathbf{Z}$, $\Omega = \vdash \Gamma \vdash \Delta$. Тоді:

- 1) якщо $\Lambda \models \mathbf{K}$, то $\Gamma \models \Delta$;
- 2) якщо $\Lambda \models \mathbf{K}$ та $\mathbf{X} \models \mathbf{Z}$, то $\Gamma \models \Delta$.

Теорема 2 (коректності). Нехай $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Теорема 3 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ вивідна.

Для доведення теореми повноти використовується метод модельних (Хінтікківських) множин.