

ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ 1-го ПОРЯДКУ

Розглядаємо композиційно-номінативні логіки еквітонних квазіарних предикатів – *неокласичні* логіки

Чиста неокласична логіка

ЧНКЛ – це НКЛ еквітонних предикатів кванторного рівня

Семантичні моделі ЧНКЛ – композиційні системи еквітонних квазіарних предикатів кванторного рівня (V, Pr^A, C) , де C визначається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x\}$.

Кожна така КС задає АС даних (A, EPr^A) та композиційну алгебру предикатів кванторного рівня. (Pr^A, C)

Побудова композиційні алгебри предикатів кванторного рівня визначає мову ЧНКЛ. Алфавіт мови:

– V – множина предметних імен

– Ps – множина *предикатних символів* (ПС) – імен базових предикатів

– символи базових композицій $\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x$

Множину Ps назвемо *сигнатурою* мови ЧНКЛ.

1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо *атомарними*.
2. Нехай Φ – формула. Тоді $\neg\Phi$, $R_x^v\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.
3. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\bigvee\Phi\Psi$ – формула.

Множину всіх формул позначимо Fr .

Як і для мов ПЛ та РНЛ, використовуємо *скорочення* формул.

$\sigma(\Phi)$ – множина всіх тих $p \in Ps$, які входять до складу формули Φ .

$nt(\Phi)$ – множина всіх предметних імен $v \in V$, які фігурують в символах реномінації формули Φ .

Така $nt(\Phi)$ – *множина імен* формули Φ .

$q(\Phi)$ – множина всіх $v \in V$, які фігурують в символах квантифікації, що входять до складу Φ .

Така $q(\Phi)$ – *множина кванторних імен* формули Φ .

$nq(\Phi) = nt(\Phi) \setminus q(\Phi)$ – *множина некванторних імен* формули Φ .

Розширюємо σ , nt , q , nq на множини формул

Інтерпретуємо мову ЧНКЛ на КС еквітонних предикатів кванторного рівня.

Задамо тотальне однозначне $I : Ps \rightarrow EPr^A$, яке визначає значення ПС як базові предикати відповідної АС даних (A, EPr^A)

Такі АС даних – *неокласичні АС із еквітонними предикатами*.

Відображення I прив'язує АС даних (A, EPr^A) до мови.

Отримуємо об'єкти вигляду $((A, EPr^A), \Gamma)$ – *АС ЕП з доданою сигнатурою*.

Така АС фактично визначає КС $({}^V A, EPr^A, C)$

АС з доданою сигнатурою $((A, EPr^A), \Gamma)$ позначаємо (A, Γ) .

АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову ЧНКЛ із АС даних. Називаємо їх *моделями мови*

Для інтерпретації формул продовжимо I до відображення $Fr \rightarrow EPr^A$

1. $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$.
2. $I(\bigvee \Phi\Psi) = \bigvee (I(\Phi), I(\Psi))$.
3. $I(R_x^{\bar{v}}\Phi) = R_x^{\bar{v}}(I(\Phi))$
4. $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $A=(A, I)$

Позначаємо його Φ_A

Φ (частково) істинна, або неспростовна при інтерпретації $A = (A, I)$, або A -істинна, якщо Φ_A – істинний предикат.

Цей факт позначимо $A \models \Phi$.

Φ виконувана при інтерпретації $A = (A, I)$, або A -виконувана, якщо Φ_A – виконуваний предикат.

Φ всюди істинна, якщо Φ істинна при кожній інтерпретації.

Цей факт позначимо $\models \Phi$.

Φ виконувана, якщо Φ виконувана при деякій інтерпретації.

Успадкування властивостей ПЛ для ЧНКЛ відбувається перенесенням на рівень ЧНКЛ понять тавтології, тавтологічних наслідку і еквівалентності.

Тавтології – формули, які мають структуру тавтологій мови ПЛ.

Формула *пропозиційно нерозкладна*, якщо вона атомарна або вигляду $R_{\bar{x}}^{\vee}\Phi$ чи $\exists x\Phi$

Fr_0 – множина всіх пропозиційно нерозкладних формул мови L .

Істиннісна оцінка мови L – довільне $\tau : Fr_0 \rightarrow \{T, F\}$.

Продовжимо τ до відображення $\tau : Fr \rightarrow \{T, F\}$:

– $\tau(\neg\Phi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=F$;

– $\tau(\bigvee \Phi\Psi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=T$ або $\tau(\Psi)=T$.

Φ *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi)=T$ при кожній істиннісній оцінці τ

Кожна тавтологія є всюди істинною формулою.

Приклад. Формули вигляду $\exists x \exists y \Phi \leftrightarrow \exists y \exists x \Phi$ всюди істинні, але не тавтології.

На множині формул мови ЧНКЛ введемо відношення
тавтологічного наслідку \vDash ,
тавтологічної еквівалентності \sim_T ,
логічного наслідку \models ,
слабкого логічного наслідку \Vdash
логічної еквівалентності \sim .

Ψ є тавтологічним наслідком Φ (позн. $\Phi \vDash \Psi$), якщо $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія.

Φ та Ψ тавтологічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim_T \Psi$): $\Phi \vDash \Psi$ та $\Psi \vDash \Phi$

Ψ є логічним наслідком Φ (позн. $\Phi \models \Psi$): $\Phi \rightarrow \Psi$ всюди істинна.

Φ та Ψ логічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim \Psi$): $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Зрозуміло, що $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow$ формули $\Phi \rightarrow \Psi$ та $\Psi \rightarrow \Phi$ всюди істинні.

Ψ є слабким логічним наслідком формули Φ , що позн. $\Phi \Vdash \Psi$, якщо
 $\forall A$ із $A \models \Phi$ випливає $A \models \Psi$.

Основні властивості відношень \vDash , \models , \Vdash та \sim :

- 1) Φ тавтологія $\Leftrightarrow \vDash \Phi$;
- 2) Φ всюди істинна $\Leftrightarrow \models \Phi \Leftrightarrow \Vdash \Phi$;
- 3) $\Phi \vDash \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$; але не завжди $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \vDash \Psi$;
- 4) $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \Vdash \Psi$; але не завжди $\Phi \Vdash \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$;
- 5) $\Phi \sim_{\text{T}} \Psi \Leftrightarrow \Phi \leftrightarrow \Psi$ тавтологія
- 6) $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \Psi$;
- 7) відношення \vDash , \models та \Vdash рефлексивні і транзитивні;
- 8) відношення \sim рефлексивне, транзитивне і симетричне.

Теорема 1 (про розширення). Нехай AC однієї сигнатури $A = (A, I_A)$ і $B = (A, I_B)$ та формула Φ такі:

$\forall p \in \sigma(\Phi) \forall \delta \in {}^V A$ із $p_A(\delta) \downarrow$ випливає $p_B(\delta) \downarrow = p_A(\delta)$.

Тоді $\forall d \in {}^V A$ із $\Phi_A(d) \downarrow$ випливає $\Phi_B(d) \downarrow = \Phi_A(d)$.

Доводиться індукцією за побудовою формули Φ .

Теорема вірна для загального випадку логік квазіарних предикатів.

Нехай $A = (A, I_A)$ і $B = (A, I_B)$ – AC однієї сигнатури.

$AC B$ – система розширень для $AC A$, якщо $\forall p \in Ps \forall \delta \in {}^V A$ із $p_A(\delta) \downarrow$ випливає $p_B(\delta) \downarrow = p_A(\delta)$.

Наслідок. Нехай $B = (A, I_B)$ – система розширень для $AC A = (A, I_A)$.

Тоді для довільних Φ та $d \in {}^V A$ із $\Phi_A(d) \downarrow$ випливає $\Phi_B(d) \downarrow = \Phi_A(d)$.

Ім'я $x \in V$ неістотне для формули Φ , якщо $\forall A = (A, I)$ x неістотне для Φ_A .

Критерій неістотності предметних імен для формул встановлює

Теорема 2. *Ім'я $x \in V$ неістотне для $\Phi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \forall x \Phi$*

Враховуючи, що завжди $\models \forall x \Phi \rightarrow \Phi$ та $\models \Phi \rightarrow \exists x \Phi$, дістаємо

Наслідок. *Ім'я $x \in V$ неістотне для $\Phi \Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \forall x \Phi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \forall x \Phi \Leftrightarrow \models \exists x \Phi \leftrightarrow \Phi \Leftrightarrow \models \exists x \Phi \rightarrow \Phi$*

Неістотні імена дають змогу робити перейменування квант. імен.

Теорема 3. *Нехай $y \in V$ неістотне для Φ . Тоді $\models \exists x \Phi \leftrightarrow \exists R_y^x(\Phi)$*

Наслідок. *Нехай $y \in V$ неістотне для Φ . Тоді $\models \forall x \Phi \leftrightarrow \forall y R_y^x(\Phi)$*

Основою евівалентних перетворень формул ЧНКЛ є

Теорема 4 (семантичної еквівалентності). *Нехай Φ' отримана із Φ заміною деяких входжень формул Φ_1, \dots, Φ_n на Ψ_1, \dots, Ψ_n відповідно. Якщо $\models \Phi_1 \leftrightarrow \Psi_1, \dots, \models \Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$, то $\models \Phi \leftrightarrow \Phi'$*

Семантичні властивості ЧНКЛ

Для ЧНКЛ успадковуються властивості пропозиційного рівня.

Із реномінативного рівня успадковуємо специфічні властивості формул, пов'язані з *реномінацією*.

RT) Згортка тотожної пари імен у реномінації:

$$|= R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

R¬) R¬-дистрибутивність:

$$|= R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

R∨) R∨-дистрибутивність:

$$|= R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$$

Аналогічно – властивості R→, R&, R↔, R⊕.

RR) Згортка реномінацій:

$$|= R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$$

RN) Нехай y неістотне для формули Φ . Тоді

$$|= R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

Вкажемо властивості кванторного рівня, які не використовують реномінації. Вони цілком аналогічні властивостям класичної логіки:

$$S1) \models \Phi \rightarrow \exists x\Phi \text{ та } \models \forall x\Phi \rightarrow \Phi.$$

$$S2) \models \Phi \Leftrightarrow \models \forall x\Phi.$$

$$S3) \Phi \models \forall x\Phi \text{ та } \forall x\Phi \models \Phi, \text{ але не завжди } \Phi \models \forall x\Phi.$$

$$S4) \text{ Якщо } \models \Phi, \text{ то } \models \exists x\Phi, \models \Phi \Leftrightarrow \exists x\Phi \text{ та } \models \Phi \Leftrightarrow \forall x\Phi.$$

$$S5) \text{ Якщо } \models \Phi \rightarrow \Psi, \text{ то } \models \exists x\Phi \rightarrow \exists x\Psi \text{ та } \models \forall x\Phi \rightarrow \forall x\Psi.$$

$$S6) \text{ Якщо } \models \Phi \rightarrow \Psi \text{ та } \models \Psi \rightarrow \forall x\Psi, \text{ то } \models \exists x\Phi \rightarrow \Psi.$$

$$S7) \text{ Якщо } \models \Phi \rightarrow \Psi \text{ та } \models \Phi \rightarrow \forall x\Phi, \text{ то } \models \Phi \rightarrow \forall x\Psi.$$

$$S8) \models \exists x\exists y\Phi \Leftrightarrow \exists y\exists x\Phi \text{ та } \models \forall x\forall y\Phi \Leftrightarrow \forall y\forall x\Phi.$$

$$S9) \models \exists x\Phi \Leftrightarrow \forall x\exists x\Phi; \models \exists x\Phi \Leftrightarrow \exists x\exists x\Phi; \models \forall x\Phi \Leftrightarrow \forall x\forall x\Phi; \models \forall x\Phi \Leftrightarrow \exists x\forall x\Phi.$$

$$S10) \models \exists y\forall x\Phi \rightarrow \forall x\exists y\Phi, \text{ але не завжди } \models \forall x\exists y\Phi \rightarrow \exists y\forall x\Phi.$$

$$S11) \models \forall x\Phi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\Phi \text{ та } \models \exists x\Phi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\Phi.$$

$$S12) \models \Phi \Leftrightarrow \forall x\Phi \Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \forall x\Phi \Leftrightarrow \models \exists x\Phi \rightarrow \Phi \Leftrightarrow \models \exists x\Phi \Leftrightarrow \Phi.$$

$$S13) \models \exists x\Phi \vee \exists x\Psi \Leftrightarrow \exists x(\Phi \vee \Psi) \text{ та } \models \forall x\Phi \& \forall x\Psi \Leftrightarrow \forall x(\Phi \& \Psi).$$

$$S14) \models \exists x(\Phi \& \Psi) \rightarrow \exists x\Phi \& \exists x\Psi \text{ та } \models \forall x\Phi \vee \forall x\Psi \rightarrow \forall x(\Phi \vee \Psi).$$

Властивості, пов'язані з композиціями *квантифікації та реномінації*:

$$R\exists x) \quad |= R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(\Phi) \rightarrow \exists v_1 \dots \exists v_n \Phi$$

$$\forall x R) \quad |= \forall v_1 \dots \forall v_n \Phi \rightarrow R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(\Phi)$$

$$NR) \quad |= \exists x R_{y, u_1, \dots, u_n}^{x, v_1, \dots, v_n}(\Phi) \leftrightarrow R_{y, u_1, \dots, u_n}^{x, v_1, \dots, v_n}(\Phi) \text{ при } x \notin \{y, u_1, \dots, u_n\} \text{ — аналітична}$$

неістотність верхніх імен в реномінаціях

Зокрема, при $x \neq y$ маємо $|= \exists x R_y^x(\Phi) \leftrightarrow R_y^x(\Phi)$

$$R\bar{\exists}) \quad |= R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \leftrightarrow \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi) \text{ при } x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\} \text{ обмежена } R\bar{\exists} \text{ -дистр-ть}$$

RZ) Нехай x неістотне для Φ . Тоді $\forall y \in V$ маємо:

$$|= R_{y, u_1, \dots, u_n}^{x, v_1, \dots, v_n}(\Phi) \leftrightarrow R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\Phi) \text{ — згортка за неістотним іменем.}$$

Зокрема,

$$|= R_y^x(\Phi) \leftrightarrow \Phi$$

RB)

$$\neq (\Phi \rightarrow \forall x \Phi) \rightarrow (R_{y, u_1, \dots, u_n}^{x, v_1, \dots, v_n}(\Phi) \leftrightarrow R_{u_1, \dots, u_n}^{v_1, \dots, v_n}(\Phi))$$

Зокрема,

$$\neq (\Phi \rightarrow \forall x \Phi) \rightarrow (R_y^x(\Phi) \leftrightarrow \Phi)$$

Умова $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ істотною для властивості $R \exists$. Справді:

$$\models \exists v R_u^v(\Phi) \leftrightarrow R_u^v(\Phi) \text{ при } v \neq u;$$

$$\models \exists v \exists u R_v^v(\Phi) \leftrightarrow \exists v \Phi = R_u^v \exists v \Phi \leftrightarrow \exists v \Phi$$

$$\models \exists u R_u^v(\Phi) \leftrightarrow R_u^v(\exists u \Phi)$$

Для пронесення символів реномінації через $\exists x$, якщо умова для $R \exists$ не виконується, потрібно спочатку замінити підформулу $\exists x \Phi$ на $\exists z R_z^x(\Phi)$, де z неістотне для Φ та $z \notin \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$. Тому для виконання еквівалентних перетворень довільних формул треба мати *потенційно нескінченний* запас неістотних імен. Це дає змогу пронести символи реномінації вглиб формули і перетворити формулу до вигляду, близького до класичного, коли реномінації застосовні тільки до ПС.

Для формул класичної логіки істотними є тільки їх *вільні* предметні імена, від яких *може залежати* значення відповідних предикатів. В класичній логіці \forall базового предикату за допомогою спеціальної *функції арності* $ar: Ps \rightarrow N$ визначається скінченна стандартна множина *істотних* імен: для n -арного предикату істотними є саме імена $1, \dots, n$. Для НКЛ важлива в першу чергу *неістотність* предметних імен. Тому для базових предикатів НКЛ будемо вказуємо множину *неістотних* імен, від яких *не залежить* значення таких предикатів.

Імена, неістотність яких для базових предикатів постулюється, називаються *синтетично неістотними*.

Нехай для визначення синтетично неістотних імен задана $\mu: Ps \rightarrow 2^V$.

Таку функцію продовжимо до $\mu: Fr \rightarrow 2^V$:

$$\mu(\neg\Phi) = \mu(\Phi);$$

$$\mu(\bigvee \Phi\Psi) = \mu(\Phi) \cap \mu(\Psi);$$

$$\mu(R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} \Phi) = (\mu(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \mu(\Phi), i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

$$\mu(\exists x\Phi) = \mu(\Phi) \cup \{x\}$$

Пару (Ps, μ) назвемо *сигнатурою синтетичної неістотності*.

Така сигнатура є аналогом сигнатури класичної логіки (Ps, ar) .

На відміну від класичного випадку, вона не впливає на множину формул НКЛ, але обмежує клас інтерпретацій.

Тотальна неістотність імені x означає $x \in \bigcap_{p \in Ps} \mu(p)$

Тому при завданні синтетично неістотних імен за допомогою функції μ множиною тотально неістотних імен буде $V_T = \bigcap_{p \in Ps} \mu(p)$

Постулювання наявності нескінченної множини тотально неістотних імен вимагає, щоб V_T була нескінченною.

Отже, для НКЛ розглядаємо тільки такі мови та інтерпретації, для яких

задана функція μ , що гарантує нескінченність $V_T = \prod_{p \in Ps} \mu(p)$

Теорема 5. Нехай $x \in \mu(\Phi)$. Тоді x неістотне для Φ

Наслідок. Якщо $x \in \mu(\Phi)$, то $\models \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ та $\models \exists x \Phi \rightarrow \Phi$

Якщо для $R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi)$ умова $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ не виконується, то візьмемо тотально неістотне z : $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi))$

Отримуємо загальну $R \exists$ -дистрибутивність:

$$R \exists \exists R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \leftrightarrow \exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} \prod_z^x(\Phi)$$

тут z тотально неістотне та $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi))$

Нормальні форми в ЧНКЛ

Ψ – *варіанта* формули Ξ , якщо Ψ утворена із Ξ посл. замінами підформул вигляду $\exists x\Phi$ на підформули $\exists yR_y^x(\Phi)$ при умові $y \in \mu(\Phi)$.

Теорема (про варіанту). *Нехай Ψ – варіанта формули Ξ . Тоді $\models \Psi \leftrightarrow \Xi$.*

Формула Ψ – в *різнокванторній* формі, якщо всі входження кванторних префіксів у формулу Ψ (якщо вони є) – по різних тотально неістотних іменах, причому кожне $y \in q(\Psi)$ не може лежати в області дії $R_{\bar{x}}^{\bar{y}}$ такого, що $y \in \{\bar{y}, \bar{x}\}$

Формулу в різнокванторній формі назвемо *різнокванторною*.

Формула Ψ – в *нормальній формі*, якщо всі символи реномінації формули Ψ (якщо вони є) застосовані тільки до ПС, та всі входження кванторних префіксів у Ψ – по різних тотально неістотних іменах.

Отже, Ψ – в *нормальній формі*, якщо вона різнокванторна та всі символи реномінації формули Ψ (якщо вони є) застосовані тільки до ПС.

Формулу в нормальній формі назвемо *нормальною*.

Теорема. Для кожної Φ можна збудувати різнокванторну Ξ : $\models \Phi \leftrightarrow \Xi$

Кожному входженню $\exists x$ в Φ зіставимо нове тотально неістотне ім'я із V , причому різним входженням кванторних префіксів зіставимо різні тотально неістотні імена. Просуваючись по Φ зліва направо, замінюємо кожну підформулу вигляду $\exists xA$ на формулу $\exists yR_y^x(A)$, де y – тотально неістотне ім'я, співставлене такому входженню $\exists x$ в Φ .

Так збудована Ψ різнокванторна, в силу $\models \exists xA \leftrightarrow \exists yR_y^x(A)$ маємо $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$. Зрозуміло, що Ψ – варіанта формули Φ

Теорема. Для кожної Φ можна збудувати нормальну Ψ : $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

За Φ побудуємо її варіанту – різнокванторну Φ_1 . Тоді $\models \Phi_1 \leftrightarrow \Phi$

За Φ_1 будуємо Ψ . Використовуючи $R\neg, R\vee, RR$, проносимо всі символи реномінації вглиб формули до рівня ПС. Отримуємо Ψ таку, що $\models \Phi_1 \leftrightarrow \Psi$. При цьому всі входження кванторних префіксів в Ψ – по різних тотально неістотних іменах. Отже, Ψ – нормальна, а в силу $\models \Phi_1 \leftrightarrow \Phi$ та $\models \Phi_1 \leftrightarrow \Psi$ маємо $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

Нормальну формулу Ψ , отриману із даної формули Φ так описаним способом, назвемо *нормалізантаю* формули Φ

Наслідок. Нехай Ψ – нормалізанта формули Φ . Тоді $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

Визначимо множину $fr(\Phi)$ *квазівільних* імен формули Φ .

Для цього задамо функцію $fr: Fr \rightarrow 2^V$:

$\forall p \in Ps$ покладемо $fr(p) = \emptyset$. Далі значення fr визначаємо індуктивно:

$$fr(\neg\Phi) = fr(\Phi);$$

$$fr(\bigvee \Phi\Psi) = fr(\Phi) \cup fr(\Psi);$$

$$fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\};$$

$$fr(R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} \Phi) = (fr(\Phi) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}) \cup \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Звідси $fr(\forall x\Phi) = fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\}$ та $fr(\exists y R_y^x(\Phi)) = fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\}$

Для встановлення неістотності предметних імен важливою є

Теорема. Якщо $y \in \mu(p) \quad \forall PS$ p ϕ -ли Φ та $y \notin fr(\Phi)$, то $y \in \mu(\Phi)$.

Теорема доводиться індукцією за побудовою формули Φ .

Наслідок 1. Нехай $y \in V$ неістотне $\forall PS$ формули Φ та $y \notin nt(\Phi)$. Тоді $y \in \mu(\Phi)$.

В силу $fr(\Phi) \subseteq nt(\Phi)$ з умови $y \notin nt(\Phi)$ випливає умова $y \notin fr(\Phi)$.

Наслідок 2. Нехай $y \in V$ тотально неістотне та $y \notin nt(\Phi)$. Тоді $y \in \mu(\Phi)$.

Формула Φ *квазізамкнена*, якщо $fr(\Phi) = \emptyset$.

Квазізамкнені формули є синтаксичними аналогами замкнених формул класичної логіки, проте семантичними аналогами замкнених формул їх вважати не можна. До складу формули можуть входити ПС, для яких множини істотних імен *нескінченні*. Можливість для формули бути залежною від *нескінченної* множини предметних імен є визначальною властивістю логіки квазіарних предикатів, зокрема, НКЛ, що істотно її відрізняє від класичної логіки.

Пропозиційною схемою формули Φ назвемо ПФ $Prop(\Phi)$, отриману із Φ опусканням усіх символів, окрім ПС та символів проп. зв'язок.

Теорема. *Нехай формула Φ квазізамкнена, $Prop(\Phi)$ не тавтологія і не суперечність, причому Φ не містить спеціальних ПС із явно виділеними істотними іменами (наприклад, символи рівності $=_{xy}$). Тоді існують АС $A=(A, I)$ та $d_1, d_2 \in V A$ такі, що $\Phi_A(d_1)=T$ та $\Phi_A(d_2)=F$.*

Якщо $Prop(\Phi)$ не тавтологія і не суперечність, то існують істиннісні оцінки τ_1, τ_2 такі, що $\tau_1(Prop(\Phi))=T$ та $\tau_2(Prop(\Phi))=F$. Візьмемо $z \in V$: $z \notin nm(\Phi)$ та $z \notin \mu(\Phi)$. Візьмемо $A = \{a, b\}$. $d \in A^{nm(\Phi)}$ та $\forall p \in \sigma(\Phi)$ визначимо $p_A(d) \uparrow$.

$\forall d \in A^{nm(\Phi)}$ та $\forall p \in \sigma(\Phi)$ задамо $p_A(d \nabla z \square a) = \tau_1(p)$ та $p_A(d \nabla z \square b) = \tau_2(p)$.

Тоді $\Phi_A(d \nabla z \square a) = T$ та $\Phi_A(d \nabla z \square b) = F$

Таким чином, для логіки квазіарних предикатів квазізамкнені формули необов'язково інтерпретуються як константні предикати. У той же час для випадку класичної логіки кожна замкнена формула на кожній АС відповідної сигнатури завжди інтерпретується як $\equiv T$ або $\equiv F$

Теорема. \forall формули Φ можна побудувати квазізамкнену нормальну формулу Ξ таку, що $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Xi$.

За Φ спочатку будемо її різнокванторну варіанту Φ_1

Якщо $fr(\Phi) = fr(\Phi_1) = \emptyset$, далі будемо нормальну формулу Ψ

Позаяк $fr(\Psi) = fr(\Phi_1) = \emptyset$, то Ψ квазізамкнена, вона нормалізанта формули Φ , тому $\models \Phi \leftrightarrow \models \Psi$. Звідси $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Psi$, тому Ψ – шукана формула Ξ .

Нехай $fr(\Phi) = fr(\Phi_1) = \{u_1, \dots, u_k\} \neq \emptyset$. Візьмемо множину $\{y_1, \dots, y_k\}$ тотально неістотних імен таких, що $\{y_1, \dots, y_k\} \cap nm(\Phi_1) = \emptyset$. Всі y_1, \dots, y_k неістотні для Φ_1 . Тоді $\models \Phi_1 \Leftrightarrow \models \Phi \Leftrightarrow \models \forall u_1 \dots \forall u_k \Phi_1$, звідки $\models \forall u_1 \dots \forall u_k \Phi_1 \leftrightarrow \models \Phi_2$, де Φ_2 – це формула $\forall y_1 \dots \forall y_k R_{y_1, \dots, y_k}^{u_1, \dots, u_k} \Phi_1$.

Звідси $\models \Phi_1 \Leftrightarrow \models \Phi_2$. Згідно $R\neg, R\vee, RR$ проносимо всі реномінації вглиб формули до рівня ПС. Отримуємо Ξ таку, що $\models \Phi_2 \leftrightarrow \models \Xi$. При цьому $fr(\Xi) = \emptyset$, всі входження кванторних префіксів в Ξ – по різних тотально неістотних іменах. Отже, квазізамкнена Ξ – в нормальній формі, згідно $\models \Phi \leftrightarrow \models \Phi_1 \square, \models \Phi_1 \leftrightarrow \models \Phi_2 \square$ та $\models \Phi_2 \leftrightarrow \models \Xi$ маємо $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Xi$.

Така Ξ – *квазізамкнена нормалізанта* формули Φ .

Відношення логічного наслідку для множин формул ЧНКЛ

Γ та Δ – множини формул мови сигнатури Ps .

$A=(A, I)$ – АС сигнатури Ps .

Δ є логічним наслідком Γ в АС A , якщо $\forall d \in {}^V A$

$\Phi_A(d)=T \ \forall \Phi \in \Gamma \Rightarrow$ неможливо $\Psi_A(d)=F \ \forall \Psi \in \Delta$.

Позначаємо $\Gamma \models_A \Delta$

Δ є логічним наслідком Γ , якщо

$\Gamma \models_A \Delta \ \forall$ АС $A=(A, I)$ сигнатури Ps .

Це позначаємо $\Gamma \models \Delta$

Звідси: $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують АС $A=(A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі:

$\forall \Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(d)=T$ та $\forall \Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(d)=F$

Відношення \models для множин формул рефлексивне, але не транзитивне

Теорема (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim \Psi$. Тоді

$\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Властивості відношення \models

G1, G2 та П1–П10 успадковуються на кванторному рівні

Вкажемо властивості відношення \models , пов'язані з композиціями реномінації та квантифікації.

Вони безпосередньо відтворюють відповідні властивості формул.

Кожна така властивість розщеплюється на дві властивості для \models

$$RT_{|-}) \quad R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$$

$$RT_{-|}) \quad \Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$$

$$RR_{|-}) \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$$

$$RR_{-|}) \quad \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$$

$$R_{\neg|-}) \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$$

$$R_{\neg-|}) \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$$

$$R \vee_{|-} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$$

$$R \vee_{-|} \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$$

$$PsN_{|-} R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(p), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p), \Gamma \models \Delta \quad \text{при } y \in \mu(p), \text{ де } p \in Ps$$

$$PsN_{-|} \Gamma \models \Delta, R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(p) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \quad \text{при } y \in \mu(p), \text{ де } p \in Ps$$

$$\Phi N_{|-} R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \quad \text{при умові } y \in \mu(\Phi).$$

$$\Phi N_{-|} \Gamma \models \Delta, R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \quad \text{при умові } y \in \mu(\Phi).$$

Умову $y \in \mu(\Phi)$ можна ослабити до умови y неістотне для Φ .

Базові властивості відношення \models на реномінативному рівні:

П1–П4 та $RT_{|-}, RT_{-|}, RR_{|-}, RR_{-|}, R_{|-}, R_{-|}, R \vee_{|-}, R \vee_{-|}, PsN_{|-}, PsN_{-|}$

Властивості, пов'язані з кванторами та реномінаціями:

$$R \exists_{|-} \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\overline{\forall y} \Phi) \models \Delta \Leftrightarrow, \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \quad y \notin \bar{v} \bar{x}$$

$$R \exists_{-|} \quad \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\overline{\forall y} \Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \quad y \notin \bar{v} \bar{x}$$

$$R \exists \exists_{|-} \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\overline{\forall y} \Phi) \models \Delta \Leftrightarrow, \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_z^y(\Phi), \Gamma \models \Delta \quad y \in \bar{v} \bar{x}$$

$$R \exists \exists_{-|} \quad \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\overline{\forall y} \Phi) \Leftrightarrow \exists z \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_z^y(\Phi) \quad y \in \bar{v} \bar{x}$$

Для $R \exists \exists_{|-}$ та $R \exists \exists_{-|}$ z тотально неістотне та $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi))$

Вл-ті $R \exists_{|-}$, $R \exists_{-|}$, $R \exists \exists_{|-}$, $R \exists \exists_{-|}$ переформулюються для $\forall x$.

Властивості, пов'язані з елімінацією кванторів:

$$\exists_{|-} \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_y^x(\Phi), \Gamma \models \Delta \quad (y \in V_T \quad y \notin nm \Gamma \Delta \Phi)$$

$$\exists_{-|} \Gamma \models \Delta, R_{y_1}^x(\Phi), \dots, R_{y_n}^x(\Phi), \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$$

$$\forall_{|-} R_{y_1}^x(\Phi), \dots, R_{y_n}^x(\Phi), \forall x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \forall x\Phi, \Gamma \models \Delta$$

$$\forall_{-|} \Gamma \models \Delta, R_y^x(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_y^x(\Phi) \quad (y \in V_T \quad y \notin nm \Gamma \Delta \Phi)$$

Базові властивості відношення \models на кванторному рівні:

$$\begin{aligned} & \text{П1–П4 та } RT_{|-}, RT_{-|}, RR_{|-}, RR_{-|}, R\neg_{|-}, R\neg_{-|}, R\vee_{|-}, R\vee_{-|}, PsN_{|-}, PsN_{-|}, \\ & \Phi N_{|-}, \Phi N_{-|}, R\exists_{|-}, R\exists_{-|}, R\exists\exists_{|-}, R\exists\exists_{-|}, \exists_{-|}, \exists_{|-} \end{aligned}$$

Семантично несуперечливі множини формул

Множина формул Γ семантично несуперечлива (сумісна), якщо існують

АС $A=(A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі, що $\Phi_A(d)=T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$.

Звідси: Γ семантично суперечлива (несумісна), якщо не існують АС

$A=(A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі, що $\Phi_A(d)=T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$.

Модель сумісності множини формул Γ – це АС $A=(A, I)$ така:

для деякого $d \in {}^V A$ маємо $\Phi_A(d)=T \quad \forall \Phi \in \Gamma$.

Теорема 1. Γ сем. несуперечлива $\Leftrightarrow \Gamma$ має модель сумісності.

Теорема 2. Γ сем. несуперечлива $\Leftrightarrow \forall \Phi$ маємо $\Gamma \not\models \Phi \& \neg \Phi$

Наслідок. Γ сем. суперечлива \Leftrightarrow для деякої Φ маємо $\Gamma \models \Phi \& \neg \Phi$

Теорема 3. Якщо Γ сем. суперечлива, то $\forall \Phi$ маємо $\Gamma \models \Phi$.

Якщо $\Gamma \not\models \Phi$ для деякої Φ , то існують АС $A=(A, I)$ та $d \in {}^V A$: $\Phi_A(d)=F$ та

$\Xi_A(d)=T \quad \forall \Xi \in \Gamma$. Але $\Xi_A(d)=T \quad \forall \Xi \in \Gamma$ означає несуперечливість Γ

Модель істинності множини формул Γ – це АС $A=(A, I)$ така: $\forall d \in {}^V A$

$\forall \Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(d) \cong T$.

Для логік ПЕП кожна модель істинності є моделлю сумісності.

Для логік ЕП це невірно: розгл. АС, де \forall ПС інтерпретується як усюди невизначений пр-т

Кожна АС із ЕП може бути довизначена до АС із ПЕП.

Неокласичні логіки функціонально-екваційного рівня

ФЕНКЛ – це НКЛ функціонально-екваційного рівня – ФКНЛР ЕП

Семантичні моделі ФЕНКЛ – КС еквітонних квазіарних функцій і предикатів функціонально-екваційного рівня $(V A, EFn^A \cup EPr^A, C)$

C визначається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, \exists x, S^{\bar{v}}, 'x, =\}$.

$(EFn^A \cup EPr^A, C)$ – композиційна алгебра квазіарних функцій і предикатів функціонально-екваційного рівня.

Побудова такої алгебри визначає мову ФЕНКЛ.

Алфавіт мови ФЕНКЛ

- V – множина предметних імен
- Fns – множина функціональних (ФНС) символів
- Dns – множина деномінаційних (ДНС) символів
- Ps – множина предикатних (ПС) символів
- символи базових композицій $\neg, \vee, \exists x, S^{\bar{v}}, =$.

Множину $Fns \cup Dns$ позначимо Fs .

Множину $Fns \cup Ps$ назвемо *сигнатурою* мови ФЕНКЛ.

Множини термів Tr і формул Fr вводимо індуктивно.

T1. Кожний ФС є термом. Такі терми назвемо *атомарними*.

T2. Нехай τ, t_1, \dots, t_n – терми. Тоді $S^{v_1, \dots, v_n} \tau t_1 \dots t_n$ – терм.

Ф1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо *атомарними*.

Ф2. Нехай t та s – терми. Тоді $=ts$ – формула.

Ф3. Нехай Φ – формула, t_1, \dots, t_n – терми. Тоді $S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n$ – формула

Ф4. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$, $\forall\Phi\Psi$ та $\exists x\Phi$ – формули.

$\sigma(\phi)$ – множина сигнатурних символів терма чи формули ϕ .

$nm(\Phi)$ – множина всіх $v \in V$, які фігурують в символах суперпозиції та квантифікації формули Φ .

Така $nm(\Phi)$ – множина явних імен формули Φ .

$dnm(\Phi)$ – множина всіх $v \in V$, відповідних до ДНС формули Φ .

$ndn(\phi) = nm(\Phi) \cup dnm(\Phi)$ – множина імен формули Φ .

$q(\Phi)$ – множина всіх $v \in V$, які є в символах квантифікації ϕ -ли Φ .

$nq(\Phi) = ndn(\Phi) \setminus q(\Phi)$

Розширюємо σ , nm , dnm , ndn , q , nq на множини формул

Множина $fr(\Phi)$ квазівільних імен формули Φ :

$\forall f \in Fns \ \forall p \in Ps$ покладемо $fr(f) = fr(p) = \emptyset$.

\forall ДНС $'x$ покладемо $fr('x) = \{x\}$.

$$fr(S^{v_1, \dots, v_n} \tau t_1 \dots t_n) = (fr(\tau) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}) \boxtimes \boxtimes_{i=1}^n fr(t_i)$$

$$fr(=ts) = fr(t) \cup fr(s);$$

$$fr(\neg\Phi) = fr(\Phi);$$

$$fr(\forall\Phi\Psi) = fr(\Phi) \cup fr(\Psi);$$

$$fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\};$$

$$fr(S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n) = (fr(\Phi) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}) \boxtimes \boxtimes_{i=1}^n fr(t_i)$$

Інтерпретуємо мову ФЕНКЛ на КС еквітонних квазіарних ф-ій та пр-ів
 Задамо тотальне однозначне $I : Fs \cup Ps \rightarrow EFn^A \cup EPr^A$, яке визначає значення
 сигнатурних символів ПС як базові функції та предикати відповідної АС даних
 $(A, EFn^A \cup EPr^A)$

При цьому $I('v)_{\square} = 'v \quad \forall 'v \in Dns$.

Такі АС даних – неокласичні АС із еквітонними функціями та предикатами.

Отримуємо об'єкти $((A, EFn^A \cup EPr^A), I)$ – АС ЕФ та ЕП з доданою сигнатурою.

Кожна така АС фактично визначає КС $({}^V A, EFn^A \cup EPr^A, C)$

АС з доданою сигнатурою $((A, EFn^A \cup EPr^A), I)$ скорочено позначаємо (A, I) .

АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують
 мову ЧНКЛ із АС даних. Називаємо їх *моделями мови*

Продовжимо I до відображення $Fr \cup Tr \rightarrow EFn^A \cup EPr^A$:

1. $I(S^{v_1, \dots, v_n} \tau t_1 \dots t_n) = S^{v_1, \dots, v_n} (I(\tau), I(t_1), \dots, I(t_n))$
2. $I(=ts) = =(I(t), I(s))$.
3. $I(S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n) = S^{v_1, \dots, v_n} (I(\Phi), I(t_1), \dots, I(t_n))$
4. $I(\neg \Phi) = \neg(I(\Phi))$.
5. $I(\vee \Phi \Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$.
6. $I(\exists x \Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Функцію $I(t)$ – значення терма t при інтерпретації $A=(A, I)$, – позн. t_A .

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інт-ї $A=(A, I)$, – позн. Φ_A .

Поняття істинності та виконуваності формул – аналог. випадку ЧНКЛ.

Поняття тавтології, тавт. наслідку, тавт. еквівалентності для ФЕНКЛ успадковуються з реномінаційного та кванторного рівнів.

Формула *пропозиційно нерозкладна*, якщо вона атомарна або має вигляд $=ts$, $\exists x\Phi$ чи $\forall x\Phi$ чи $S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n$

Визначення та властивості відношень логічного наслідку, слабкого логічного наслідку та логічної еквівалентності для ФЕНКЛ аналогічні відп. визначенням та властивостям для класичної логіки, РНЛ та ЧНКЛ.

Семантичні власт-ті формул ФЕНКЛ індуковані відп. вл-ми композицій.

Для пропозиційних композицій та кванторів такі властивості аналогічні відповідним властивостям формул класичної логіки.

Розглянемо властивості, пов'язані з композиціями

- квантифікації
- суперпозиції
- рівності

$$S \neg) \models S^{\bar{v}}(\neg\Phi, \bar{f}) \leftrightarrow \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{f})$$

$$S \vee) \models S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{f}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{f})$$

Аналогічно $S \nabla$ записуються $S \&$, $S \rightarrow$, $S \leftrightarrow$, $S \oplus$

$$SE) \models S^{\bar{v}}(r = s, \bar{t}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(r, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t})$$

$$S \forall) \models S^{\bar{v}}(\forall x \Phi, \bar{t}) \leftrightarrow \forall x \in \bar{v} S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \quad x \notin \bar{v} \quad x \quad \text{отне для } \bar{t}$$

$S \exists s$) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$ (тут $x \notin \bar{v}$)

$$\models S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, S^x(t_1, 'v_1), \dots, S^x(t_n, 'v_n)) \leftrightarrow \exists x S^{v_1, \dots, v_n}(\Phi, S^x(t_1, 'v_1), \dots, S^x(t_n, 'v_n))$$

$$S \exists) \models S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}) \leftrightarrow \exists y \in V_T S^{\bar{v}, x}(\Phi, \bar{t}, 'y) \quad y \notin ndn \quad S^{\bar{v}} \quad \exists x \Phi \quad \bar{t} \quad y \in V_T$$

Аналогічно записуються $S \nabla \nabla$, $S \nabla s$ та $S \nabla \nabla$

$$SS\tau) \models S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{v}}(\tau, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) =$$

$$S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\tau, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}))$$

$$SS\Phi) \models S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \leftrightarrow$$

$$S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}))$$

$$\text{ZT)} \models S^{x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n} (\tau, 'x_1, \dots, 'x_m, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n} (\tau, g_1, \dots, g_n)$$

$$\text{Z}\Phi) \models S^{x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n} (\Phi, 'x_1, \dots, 'x_m, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n} (\Phi, g_1, \dots, g_n)$$

$$\text{DD)} \models S^{v_1, \dots, v_n} ('x, g_1, \dots, g_n) = 'x$$

$$\text{DS)} \models S^{x, v_1, \dots, v_n} ('x, \tau, g_1, \dots, g_n) = \tau$$

$$\text{IPII)} \models S^{x, v_1, \dots, v_n} (\tau, t, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n} (\tau, g_1, \dots, g_n) \quad x \quad \text{не для } \tau$$

$$\text{IPI}\Phi) \models S^{x, v_1, \dots, v_n} (\Phi, t, g_1, \dots, g_n) \leftrightarrow S^{v_1, \dots, v_n} (\Phi, g_1, \dots, g_n) \quad x \quad \text{для } \Phi$$

$$\text{IPI}\bar{\Phi}) \models S^{x, \bar{v}} (\Phi, t, \bar{t}) \leftrightarrow S^{x, \bar{v}} (\Phi, t, \bar{t}) \quad x \quad \text{для } t, \bar{t}$$

$$\text{SQ)} \models S^{v_1, \dots, v_n} (\Phi, t_1, \dots, t_n) \rightarrow \exists v_1 \dots \exists v_n \Phi$$

III) Нехай $\models \Phi$. Тоді $\models S^{v_1, \dots, v_n} (\Phi, t_1, \dots, t_n)$

Специфічні властивості рівності.

Rf) рефлексивність: $\models t=t$;

Sm) симетричність: $\models s=t \leftrightarrow t=s$;

Tr) транзитивність: $\models s=t \rightarrow t=h \rightarrow s=h$;

ET) $\models t_1 = s_1 \ \& \dots \ \& \ t_n = s_n \rightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(t, t_1, \dots, t_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(t, s_1, \dots, s_n)$

EФ) $\models t_1 = s_1 \ \& \dots \ \& \ t_n = s_n \rightarrow (S^{v_1, \dots, v_n}(\Phi, t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(\Phi, s_1, \dots, s_n))$

Теорема (еквівалентості). *Нехай Φ' отримана із формули Φ заміною деяких входжень формул Φ_1, \dots, Φ_n на Ψ_1, \dots, Ψ_n . Якщо $\models \Phi_1 \leftrightarrow \Psi_1, \dots, \models \Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$, то $\models \Phi \leftrightarrow \Phi'$.*

Теорема (рівності для термів). *Нехай τ' отриманий з терма τ заміною деяких входжень термів s_1, \dots, s_n на t_1, \dots, t_n . Якщо $\models s_1 = t_1, \dots, \models s_n = t_n$, то $\models \tau = \tau'$.*

Теорема (рівності для формул). *Нехай Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень термів s_1, \dots, s_n на t_1, \dots, t_n . Якщо $\models s_1 = t_1, \dots, \models s_n = t_n$, то $\models \Phi \leftrightarrow \Phi'$.*

Ім'я $x \in V$ неістотне для формули Φ , якщо

$$\forall A = (A, I) \ x \text{ неістотне для } \Phi_A.$$

Ім'я $x \in V$ неістотне для терма τ , якщо

$$\forall A = (A, I) \ x \text{ неістотне для } \tau_A.$$

Критерії неістотності предметних імен для формул та термів:

Теорема. Ім'я $x \in V$ неістотне для $\Phi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \forall x \Phi$

Теорема. Ім'я $x \in V$ неістотне для $\tau \Leftrightarrow$

$$\models \forall y (\tau = S^x(\tau, 'y)) \Leftrightarrow \models (\tau = S^x(\tau, 'y)).$$

Звідси $x \in V$ неістотне для формули $\Phi \Leftrightarrow$

$$\models \Phi \rightarrow \forall x \Phi \Leftrightarrow \models \exists x \Phi \rightarrow \Phi.$$

Ім'я x тотально неістотне, якщо воно неістотне для

$$\forall g \in Fns \cup Ps.$$

Надалі розглядаємо такі інтерпретації, для яких виділена

нескінченна підмножина $V_T \subseteq V$ тотально неістотних імен.

$\forall g \in Fs \cup Ps$ множину *синтетично неістотних* предметних імен визначимо за допомогою тотальної $\mu : Fs \cup Ps \rightarrow 2^V$.

При цьому $\forall 'x \in Dns \quad \mu('x) = V \setminus \{x\}$.

Продовжимо таку функцію до $\mu : Tr \cup Fr \rightarrow 2^V$ так:

$$\mu(S^{v_1, \dots, v_n} \tau t_1 \dots t_n) = (\mu(\tau) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \boxtimes_{\{i | v_i \notin \mu(t)\}} \mu(t_i)$$

$$\mu(=ts) = \mu(t) \cap \mu(s)$$

$$\mu(\neg \Phi) = \mu(\Phi)$$

$$\mu(\vee \Phi \Psi) = \mu(\Phi) \cap \mu(\Psi)$$

$$\mu(\exists x \Phi) = \mu(\Phi) \cup \{x\}$$

$$\mu(S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n) = (\mu(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \boxtimes_{\{i | v_i \notin \mu(t)\}} \mu(t_i)$$

Пару $(Fs \cup Ps, \mu)$ назвемо сигнатурою синтетичної неістотності.

Множина тотально неістотних імен $V_T = \boxtimes_{g \in Fns \cup Ps} \mu(g)$ мусить бути нескінченною

Семантичною основою ФЕНКЛ є КС еквітонних функцій та предикатів з додатковою вимогою наявності нескінченної множини тотально неістотних предметних імен.

Теорема. 1) Нехай $x \in \mu(\tau)$. Тоді x неістинне для терма τ .

2) Нехай $x \in \mu(\Phi)$. Тоді x неістинне для формули Φ .

Наслідок. 1) Якщо $x \in \mu(\tau)$, то $\models \forall y(\tau = S^x(\tau, 'y))$.

2) Якщо $x \in \mu(\Phi)$, то $\models \Phi \rightarrow \forall x\Phi$ та $\models \exists x\Phi \rightarrow \Phi$.

Теорема. Нехай $x \in \mu(g) \forall g \in \sigma(F)$ та $x \notin fr(F)$. Тоді $x \in \mu(\Phi)$.

В силу $fr(\Phi) \subseteq dnt(\Phi)$ із $x \notin dnt(\Phi)$ випливає $x \notin fr(\Phi)$. Тому

Наслідок 1. Нехай $x \in \mu(g) \forall g \in \sigma(\Phi)$ та $x \notin dnt(\Phi)$. Тоді $x \in \mu(\Phi)$.

Наслідок 2. Нехай $x \in V$ тотально неістинне та $x \notin dnt(\Phi)$. Тоді $x \in \mu(\Phi)$.

Ψ – варіанта формули Ξ , якщо Ψ утворена із Ξ послідовними замінами підформул $\exists x\Phi$ на підформули $\exists yS^x(\Phi, 'y)$ при $y \in \mu(\Phi)$.

Теорема (про варіанту). Нехай Ψ – варіанта формули Ξ .

Тоді $\models \Psi \leftrightarrow \Xi$.

Нормальні форми в ФЕНКЛ

Формула Ψ знаходиться в *різнокванторній формі*, якщо:

- всі входження кв. префіксів у Ψ – по різних тотально неіст. іменах;
- \forall підформули вигляду $S^{\bar{v}}(A, \bar{t})$ якщо A містить $\exists x$, то
 $x \notin \{\bar{a}\} \quad x(\in) \mu \bar{t}$

Формула Ψ знаходиться в *нормальній формі* (або НФ) якщо:

- всі вх-ня квант. префіксів у Ψ – по різних тотально неістотних іменах;
- всі символи суперпозиції формули Ψ застосовні тільки до ФС чи ПС.

Неважко переконатись, що кожна нормальна формула є різнокваторною.

Терм мови ФЕНКЛ *нормальний*, якщо

- всі його символи суперпозиції застосовані тільки до ФС
- згорнуті неістотні імена і виконані спрощення згідно
SST, ZNT, ZT, DS, DD

Нормальна формула ФЕНКЛ *стандартна*, якщо

- для її термів та підформул згорнуті неістотні імена
- виконані спрощення згідно ZNФ, ZФ та всі її терми нормальні.

Теорема. \forall формули Φ можна збудувати різнокванторну Ψ : $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$.

\forall входженню кванторного префіксу $\exists x$ в складі підформули $\exists xA$ зіставимо тотально неістотне $y \in \mu(A)$: $y \notin \text{ndn}(\Phi)$ та різним входженням кванторних префіксів зіставлені різні тотально неістотні імена.

Зрозуміло, що всі такі імена неістотні для кожного терма формули Φ .

Просуваючись по Φ зліва направо, замінимо \forall підформулу вигляду $\exists xA$ на $\exists yS^x(A, 'y)$, де y – тотально неістотне, зіставлене такому входженню $\exists x$ в формулу Φ . Отримаємо варіанту формули Φ – різнокванторну Ψ .

Згідно $\models \exists xA \leftrightarrow \exists yS^x(A, 'y)$ за теоремою еквівалентності $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

Теорема. \forall ф-ли Φ можна збудувати стандартну нормальну Ξ : $\models \Phi \leftrightarrow \Xi$.

За Φ будуємо різнокванторну ф-лу Ψ як описано вище. Маємо $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$.

Використовуючи $S\neg$, $S\forall$, $S\exists$, SE , а також $SS\Phi$ та SST , проносимо всі символи суперпозиції, згортаючи їх при потребі, вглиб формули до рівня Φ_C та Ψ_C . Для спрощення використовуємо DD , DS , ZNT , ZT , $ZN\Phi$, $Z\Phi$.

Отримуємо Ξ : $\models \Psi \leftrightarrow \Xi$.

Така Ξ – нормальна, а згідно $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$ та $\models \Psi \leftrightarrow \Xi$ маємо $\models \Phi \leftrightarrow \Xi$

$\text{NF } \Xi$, отримана із даної Φ описаним способом – *нормалізанта* ф-ли Φ .

Наслідок. Нехай Ξ – нормалізанта формули Φ . Тоді $\models \Phi \leftrightarrow \Xi$.

Теорема. $\forall \Phi$ можна збудувати нормальну квазізамкнену Ψ : $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Xi$.

За Φ спочатку будуємо різнокванторну формулу Ψ так, як описано вище.

Якщо $fr(\Psi) = \emptyset$, далі будуємо формулу Ξ так, як описано як описано вище.

Позаяк $fr(\Xi) = fr(\Psi)$, то Ξ – квазізамкнена, вона є нормалізантаю ф-ли Φ ,

тому $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Xi$. Звідси $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Xi$.

Нехай тепер $fr(\Psi) = \{u_1, \dots, u_k\} \neq \emptyset$. Маємо $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Візьмемо множину $\{y_1, \dots, y_k\}$ тотально неістотних імен: $\{y_1, \dots, y_k\}$

$\cap ndn(\Psi) = \emptyset$.

Всі $y_1, \dots, y_k \in \mu(\Psi)$, тому $\models \forall u_1 \dots \forall u_k \Psi \Leftrightarrow \forall y_1 \dots \forall y_k S^{u_1, \dots, u_k} (\Phi, 'y_1, \dots, 'y_k)$

Звідси $\models \Psi \Leftrightarrow \models \Phi_1, \dots, \Phi_1 \quad (\forall y_1' \quad \forall y_k' S^{u_1}) \dots^{u_k} \Phi \quad y_1 \quad y_k$

Використ-чи $S\neg, S\vee, SST, SS\Phi$, проносимо всі символи суперпозиції вглиб формули до рівня ПС та ФС. Отримуємо Ξ таку, що $\models \Phi_1 \Leftrightarrow \models \Xi$.

Тоді $fr(\Xi) = \emptyset$, всі вх-ня квант. префіксів в Ξ – по різних тотально неістотних іменах, причому всі її ДНС 'у такі, що у тотально неістотне.

Отже, квазізамкнена Ξ – нормальна.

Згідно $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$, $\models \Psi \Leftrightarrow \models \Phi_1$ та $\models \Phi_1 \Leftrightarrow \models \Xi$ маємо $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Xi$

Отримана таким способом Ξ – квазізамкнена нормалізанта формули Φ .

Наслідок. Нехай Ξ – квазізамкнена норм-та ф-ли Φ . Тоді $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Xi$.