ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ 1-го ПОРЯДКУ

Розглядаємо композиційно-номінативні логіки еквітонних квазіарних предикатів – *неокласичні* логіки

Чиста неокласична логіка

ЧНКЛ – це НКЛ еквітонних предикатів кванторного рівня

Семантичні моделі ЧНКЛ – композиційні системи еквітонних квазіарних предикатів кванторного рівня $({}^{V}A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$, де $\boldsymbol{C}$ визначається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$.

Кожна така КС задає АС даних (A, EPr^{A}) та композиційну алгебру предикатів кванторного рівня. $(Pr^{A}, \boldsymbol{C})$

Побудова композиційні алгебри предикатів кванторного рівня визначає мову ЧНКЛ. Алфавіт мови:

– V – множина предметних імен

– Ps –множина *предикатних символів* (ПС) – імен базових предикатів

– символи базових композицій $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$

Множину Ps назвемо *сигнатурою* мови ЧНКЛ.

1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо *атомарними*.

2. Нехай Φ – формула. Тоді $\neg\Phi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

3. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\vee\Phi\Psi$ – формула.

Множину всіх формул позначимо Fr.

Як і для мов ПЛ та РНЛ, використовуємо *скорочення* формул.

$\sigma(\Phi)$ – множина всіх тих $p \in Ps$, які входять до складу формули Φ.

$nm(\Phi)$ – множина всіх предметних імен $v \in V$, які фігурують в символах реномінації формули Φ.

Така $nm(\Phi)$ – *множина імен* формули Φ.

$q(\Phi)$ – множина всіх $v \in V$, які фігурують в символах квантифікації, що входять до складу Φ.

Така $q(\Phi)$ – *множина кванторних імен* формули Φ.

$nq(\Phi) = nm(\Phi) \setminus q(\Phi)$ – *множина некванторних імен* формули Φ.

Розширюємо σ, nm, q, nq на множини формул

Інтерпретуємо мову ЧНКЛ на КС еквітонних предикатів кванторного рівня.

Задамо тотальне однозначне $I : Ps \rightarrow EPr^A$, яке визначає значення ПС як базові предикати відповідної АС даних (A, EPr^A)

Такі АС даних – *неокласичні АС із еквітонними предикатами.*

Відображення I прив'язує АС даних (A, EPr^A) до мови.

Отримуємо об'єкти вигляду $((A, EPr^A), I)$ – *АС ЕП з доданою сигнатурою.*

Така АС фактично визначає КС $({}^VA, EPr^A, C)$

АС з доданою сигнатурою $((A, EPr^A), I)$ позначаємо (A, I).

АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову ЧНКЛ із АС даних. Називаємо їх *моделями мови*

Для інтерпретації формул продовжимо I до відображення $Fr \rightarrow EPr^A$

1. $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$.

2. $I(\vee\Phi\Psi) = \bigvee(I(\Phi), I(\Psi))$.

3. $I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi))$

4. $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{A}=(A, I)$

Позначаємо його Φ_A

Φ (частково) *істинна, або неспростовна при інтерпретації* $\boldsymbol{A} = (A, I)$, або $\boldsymbol{A}$-*істинна,* якщо Φ_A – істинний предикат.

Цей факт позначимо $\boldsymbol{A} \models \Phi$.

Φ *виконувана при інтерпретації* $\boldsymbol{A} =(A, I)$, або $\boldsymbol{A}$-*виконувана*, якщо Φ_A – виконуваний предикат.

Φ *всюди істинна,* якщо Φ істинна при кожній інтерпретації. Цей факт позначимо $\models \Phi$.

Φ *виконувана,* якщо Φ виконувана при деякій інтерпретації.

Успадкування властивостей ПЛ для ЧНКЛ відбувається перенесенням на рівень ЧНКЛ понять тавтології, тавтологічних наслідку і еквівалентності.

Тавтології – формули, які мають структуру тавтологій мови ПЛ.

Формула *пропозиційно нерозкладна,* якщо вона атомарна або вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ чи $\exists x\Phi$

Fr_0 – множина всіх пропозиційно нерозкладних формул мови L.

Істиннісна оцінка мови L – довільне $\tau : Fr_0 \rightarrow \{T, F\}$.

Продовжимо τ до відображення $\tau : Fr \rightarrow \{T, F\}$:

– $\tau(\neg\Phi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=F$;

– $\tau(\vee\Phi\Psi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=T$ або $\tau(\Psi)=T$.

Φ *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi)=T$ при кожній істиннісній оцінці τ

Кожна тавтологія є всюди істинною формулою.

Приклад. Формули вигляду $\exists x \exists y\Phi \leftrightarrow \exists y \exists x\Phi$ всюди істинні, але не тавтології.

На множині формул мови ЧНКЛ введемо відношення

тавтологічного наслідку $\models$,

тавтологічної еквівалентності $\sim_т$,

логічного наслідку $|=$,

слабкого логічного наслідку $||=$

логічної еквівалентності $\sim$.

Ψ є *тавтологічним наслідком* Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо $\Phi\to\Psi$ – тавтологія.

Φ та Ψ *тавтологічно еквівалентні* (позн. $\Phi\sim_т\Psi$): $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$

Ψ є *логічним наслідком* Φ (позн. $\Phi|=\Psi$): $\Phi\to\Psi$ всюди істинна.

Φ та Ψ *логічно еквівалентні* (позн. $\Phi\sim\Psi$): $\Phi|=\Psi$ та $\Psi|=\Phi$.

Зрозуміло, що $\Phi\sim\Psi \Leftrightarrow$ формули $\Phi\to\Psi$ та $\Psi\to\Phi$ всюди істинні.

Ψ є *слабким логічним наслідком* формули Φ, що позн. $\Phi||=\Psi$, якщо $\forall\, \boldsymbol{A}$ із $\boldsymbol{A}\,|=\Phi$ випливає $\boldsymbol{A}\,|=\Psi$.

Основні властивості відношень $\models$, $|=$, $||=$ та $\sim$:

1) Φ тавтологія $\Leftrightarrow$ $\models \Phi$;

2) Φ всюди істинна $\Leftrightarrow$ $|=\Phi$ $\Leftrightarrow$ $||=\Phi$;

3) $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi|=\Psi$; але не завжди $\Phi|=\Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$;

4) $\Phi|=\Psi \Rightarrow \Phi||=\Psi$; але не завжди $\Phi||=\Psi \Rightarrow \Phi|=\Psi$;

5) $\Phi \sim_{т} \Psi \Leftrightarrow \Phi \leftrightarrow \Psi$ тавтологія

6) $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow |=\Phi \leftrightarrow \Psi$;

7) відношення $\models$, $|=$ та $||=$ рефлексивні і транзитивні;

8) відношення $\sim$ рефлексивне, транзитивне і симетричне.

Теорема 1 (про розширення). *Нехай АС однієї сигнатури* $\boldsymbol{A}=(A,I_A)$ *і* $\boldsymbol{B}=(A,I_B)$ *та формула* Φ *такі:*

$\forall p\in\sigma(\Phi)\ \forall\delta\in{}^{V}\!A$ *із* $p_A(\delta)\!\downarrow$ *випливає* $p_B(\delta)\!\downarrow=p_A(\delta)$.

Тоді $\forall d\in{}^{V}\!A$ *із* $\Phi_A(d)\!\downarrow$ *випливає* $\Phi_B(d)\!\downarrow=\Phi_A(d)$.

Доводиться індукцією за побудовою формули Φ.

Теорема вірна для загального випадку логік квазіарних предикатів.

Нехай $\boldsymbol{A}=(A,I_A)$ і $\boldsymbol{B}=(A,I_B)$ – АС однієї сигнатури.

АС $\boldsymbol{B}$ – *система розширень* для АС $\boldsymbol{A}$, якщо $\forall p\in Ps\ \forall\delta\in{}^{V}\!A$ із $p_A(\delta)\!\downarrow$ випливає $p_B(\delta)\!\downarrow=p_A(\delta)$.

Наслідок. *Нехай* $\boldsymbol{B}=(A,I_B)$ *– система розширень для АС* $\boldsymbol{A}=(A,I_A)$. *Тоді для довільних* Φ *та* $d\in{}^{V}\!A$ *із* $\Phi_A(d)\!\downarrow$ *випливає* $\Phi_B(d)\!\downarrow=\Phi_A(d)$.

Ім'я $x \in V$ *неістотне для формули* Φ, якщо $\forall\, \boldsymbol{A} = (A, I)$ x неістотне для Φ_A.

Критерій неістотності предметних імен для формул встановлює

Теорема 2. *Ім'я* $x \in V$ *неістотне для* Φ $\Leftrightarrow$ $\models \Phi \leftrightarrow \forall x \Phi$

Враховуючи, що завжди $\models \forall x \Phi \rightarrow \Phi$ та $\models \Phi \rightarrow \exists x \Phi$, дістаємо

Наслідок. *Ім'я* $x \in V$ *неістотне для* Φ $\Leftrightarrow$ $\models \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ $\Leftrightarrow$ $\models \Phi \leftrightarrow \forall x \Phi$ $\Leftrightarrow$ $\models \exists x \Phi \leftrightarrow \Phi$ $\Leftrightarrow$ $\models \exists x \Phi \rightarrow \Phi$

Неістотні імена дають змогу робити перейменування квант. імен.

Теорема 3. *Нехай* $y \in V$ *неістотне для* Φ. *Тоді* $\models \exists x \Phi \leftrightarrow \exists R_y^x(\Phi)$

Наслідок. *Нехай* $y \in V$ *неістотне для* Φ. *Тоді* $\models \forall x \Phi \leftrightarrow \forall y R_y^x(\Phi)$

Основою евівалентних перетворень формул ЧНКЛ є

Теорема 4 (семантичної еквівалентості). *Нехай* Φ' *отримана із* Φ *заміною деяких входжень формул* $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ *на* $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ *відповідно. Якщо* $\models \Phi_1 \leftrightarrow \Psi_1, \ldots, \models \Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$, *то* $\models \Phi \leftrightarrow \Phi'$

Семантичні властивості ЧНКЛ

Для ЧНКЛ успадковуються властивості пропозиційного рівня.

Із реномінативного рівня успадковуємо специфічні властивості формул, пов′язані з ***реномінацією***.

RT) Згортка тотожної пари імен у реномінації:

$$\models R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$$

R¬) R¬-дистрибутивність:

$$\models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$$

R∨) R∨-дистрибутивність:

$$\models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$$

Аналогічно – властивості R→, R&, R↔, R⊕.

RR) Згортка реномінацій:

$$\models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \square^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$$

RN) Нехай y неістотне для формули Φ. Тоді

$$\models R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$$

Вкажемо властивості кванторного рівня, які не використовують реномінації. Вони цілком аналогічні властивостям класичної логіки:

S1) $|\!=\Phi\to\exists x\Phi$ та $|\!=\forall x\Phi\to\Phi$.

S2) $|\!=\Phi \Leftrightarrow |\!=\forall x\Phi$.

S3) $\Phi|\!|\!=\forall x\Phi$ та $\forall x\Phi|\!|\!=\Phi$, але не завжди $\Phi|\!=\forall x\Phi$.

S4) Якщо $|\!=\Phi$, то $|\!=\exists x\Phi$, $|\!=\Phi\leftrightarrow\exists x\Phi$ та $|\!=\Phi\leftrightarrow\forall x\Phi$.

S5) Якщо $|\!=\Phi\to\Psi$, то $|\!=\exists x\Phi\to\exists x\Psi$ та $|\!=\forall x\Phi\to\forall x\Psi$.

S6) Якщо $|\!=\Phi\to\Psi$ та $|\!=\Psi\to\forall x\Psi$, то $|\!=\exists x\Phi\to\Psi$.

S7) Якщо $|\!=\Phi\to\Psi$ та $|\!=\Phi\to\forall x\Phi$, то $|\!=\Phi\to\forall x\Psi$.

S8) $|\!=\exists x\exists y\Phi\leftrightarrow\exists y\exists x\Phi$ та $|\!=\forall x\forall y\Phi\leftrightarrow\forall y\forall x\Phi$.

S9) $|\!=\exists x\Phi\leftrightarrow\forall x\exists x\Phi$; $|\!=\exists x\Phi\leftrightarrow\exists x\exists x\Phi$; $|\!=\forall x\Phi\leftrightarrow\forall x\forall x\Phi$; $|\!=\forall x\Phi\leftrightarrow\exists x\forall x\Phi$.

S10) $|\!=\exists y\forall x\Phi\to\forall x\exists y\Phi$, але не завжди $|\!=\forall x\exists y\Phi\to\exists y\forall x\Phi$.

S11) $|\!=\forall x\Phi\leftrightarrow\neg\exists x\neg\Phi$ та $|\!=\exists x\Phi\leftrightarrow\neg\forall x\neg\Phi$.

S12) $|\!=\Phi\leftrightarrow\forall x\Phi \Leftrightarrow |\!=\Phi\to\forall x\Phi \Leftrightarrow |\!=\exists x\Phi\to\Phi \Leftrightarrow |\!=\exists x\Phi\leftrightarrow\Phi$.

S13) $|\!=\exists x\Phi\vee\exists x\Psi\leftrightarrow\exists x(\Phi\vee\Psi)$ та $|\!=\forall x\Phi\&\forall x\Psi\leftrightarrow\forall x(\Phi\&\Psi)$.

S14) $|\!=\exists x(\Phi\&\Psi)\to\exists x\Phi\&\exists x\Psi$ та $|\!=\forall x\Phi\vee\forall x\Psi\to\forall x(\Phi\vee\Psi)$.

Властивості, пов'язані з композиціями ***квантифікації та реномінації***:

R∃x) $\models R^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(\Phi) \to \exists v_1 ... \exists v_n \Phi$

∀xR) $\models \forall v_1 ... \forall v_n \Phi \to R^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(\Phi)$

NR) $\models \exists x R^{x,v_1,...,v_n}_{y,u_1,...,u_n}(\Phi) \leftrightarrow R^{x,v_1,...,v_n}_{y,u_1,...,u_n}(\Phi)$ при $x \notin \{y, u_1,...,u_n\}$ – аналітична неістотність верхніх імен в реномінаціях

Зокрема, при $x \neq y$ маємо $\models \exists x R^{x}_{y}(\Phi) \leftrightarrow R^{x}_{y}(\Phi)$

R∃) $\models R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(\exists x \Phi) \leftrightarrow \exists x R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(\Phi)$ при $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ – обмежена R∃-дистр-ть

RZ) Нехай x неістотне для Ф. Тоді $\forall y \in V$ маємо:

$$\models R^{x,v_1,...,v_n}_{y,u_1,...,u_n}(\Phi) \leftrightarrow R^{v_1,...,v_n}_{u_1,...,u_n}(\Phi)$$ – згортка за неістотним іменем.

Зокрема, $\models R^{x}_{y}(\Phi) \leftrightarrow \Phi$

RB)

$$\not\models (\Phi \to \forall x \Phi) \to (R^{x,v_1,...,v_n}_{y,u_1,...,u_n}(\Phi) \leftrightarrow R^{v_1,...,v_n}_{u_1,...,u_n}(\Phi))$$

Зокрема,

$$\not\models (\Phi \to \forall x \Phi) \to (R^{x}_{y}(\Phi) \leftrightarrow \Phi))$$

Умова $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ є істотною для властивості R$\exists$. Справді:

$\models \exists v R_u^v(\Phi) \leftrightarrow R_u^v(\Phi)$ при $v \neq u$;

та $\models \exists v R_v^v(\Phi) \leftrightarrow \exists v \Phi \quad = R_u^v \; \exists v \Phi \leftrightarrow \exists v \Phi$

$\not\models \exists u R_u^v(\Phi) \leftrightarrow R_u^v(\exists u \Phi)$

Для пронесення символів реномінації через $\exists x$, якщо умова для R$\exists$ не виконується, потрібно спочатку замінити підформулу $\exists x\Phi$ на $\exists z R_z^x(\Phi)$, де z неістотне для Φ та $z \notin \{v_1,\ldots,v_n, u_1,\ldots,u_n\}$. Тому для виконання еквівалентних перетворень довільних формул треба мати *потенційно нескінченний* запас неістотних імен. Це дає змогу пронести символи реномінації вглиб формули і перетворити формулу до вигляду, близького до класичного, коли реномінації застосовні тільки до ПС.

Для формул класичної логіки істотними є тільки їх *вільні* предметні імена, від яких *може залежати* значення відповідних предикатів. В класичній логіці $\forall$ базового предикату за допомогою спеціальної *функції арності* $ar : Ps \rightarrow N$ визначається скінченна стандартна множина *істотних* імен: для n-арного предикату істотними є саме імена $1, \ldots, n$. Для НКЛ важлива в першу чергу *неістотність* предметних імен. Тому для базових предикатів НКЛ будемо вказуємо множину *неістотних* імен, від яких *не залежить* значення таких предикатів.

Імена, неістотність яких для базових предикатів постулюється, називаються *синтетично неістотними*.

Нехай для визначення синтетично неістотних імен задана $\mu: Ps \to 2^V$.

Таку функцію продовжимо до $\mu : Fr \to 2^V$:

$$\mu(\neg\Phi) = \mu(\Phi);$$

$$\mu(\vee\Phi\Psi) = \mu(\Phi) \cap \mu(\Psi);$$

$$\mu(R^{v_1,\dots,v_n}_{x_1,\dots,x_n}\Phi) = (\mu(\Phi) \cup \{v_1,\dots,v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \mu(\Phi), i \in \{1,\dots,n\}.$$

$$\mu(\exists x\Phi) = \mu(\Phi) \cup \{x\}$$

Пару (Ps, μ) назвемо *сигнатурою синтетичної неістотності*.

Така сигнатура є аналогом сигнатури класичної логіки (Ps, ar).

На відміну від класичного випадку, вона не впливає на множину формул НКЛ, але обмежує клас інтерпретацій.

Тотальна неістотність імені x означає $x \in \bigcap_{p \in Ps} \mu(p)$

Тому при завданні синтетично неістотних імен за допомогою функції μ множиною тотально неістотних імен буде $V_T = \bigcap_{p \in Ps} \mu(p)$

Постулювання наявності нескінченної множини тотально неістотних імен вимагає, щоб V_T була нескінченною.

Отже, для НКЛ розглядаємо тільки такі мови та інтерпретації, для яких задана функція μ, що гарантує *нескінченність* $V_T = \bigcup_{p \in Ps} \mu(p)$

Теорема 5. *Нехай* $x \in \mu(\Phi)$. *Тоді* x *неістотне для* Φ

Наслідок. *Якщо* $x \in \mu(\Phi)$, *то* $\models \Phi \to \forall x\Phi$ *та* $\models \exists x\Phi \to \Phi$

Якщо для $R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ умова $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ не виконується, то візьмемо тотально неістотне z: $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$

Отримуємо *загальну* $R\exists$-дистрибутивність:

R∃∃) $R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi) \leftrightarrow \exists z R_{\bar{u}}^{\bar{v}} R_z^x(\Phi)$

тут z тотально неістотне та $z \notin nm(R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$

Нормальні форми в ЧНКЛ

Ψ –*варіанта* формули Ξ, якщо Ψ утворена із Ξ посл. замінами підформул вигляду $\exists x\Phi$ на підформули $\exists y R_y^x(\Phi)$ при умові $y \in \mu(\Phi)$.

Теорема (про варіанту). *Нехай* Ψ – *варіанта формули* Ξ. *Тоді* $|=\Psi \leftrightarrow \Xi$.

Формула Ψ – в *різнокванторній* формі, якщо всі входження кванторних префіксів у формулу Ψ (якщо вони є) − по різних тотально неістотних іменах, причому кожне $y \in q(\Psi)$ не може лежати в області дії $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ такого, що $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$

Формулу в різнокванторній формі назвемо *різнокванторною*.

Формула Ψ – в *нормальній формі*, якщо всі символи реномінації формули Ψ (якщо вони є) застосовані тільки до ПС, та всі входження кванторних префіксів у Ψ – по різних тотально неістотних іменах.

Отже, Ψ – в нормальній формі, якщо вона різнокванторна та всі символи реномінації формули Ψ (якщо вони є) застосовані тільки до ПС.

Формулу в нормальній формі назвемо *нормальною*.

Теорема. *Для кожної* Φ *можна збудувати різнокванторну* Ξ: |=Φ↔Ξ

Кожному входженню $\exists x$ в Φ зіставимо нове тотально неістотне ім'я із V, причому різним входженням кванторних префіксів зіставимо різні тотально неістотні імена. Просуваючись по Φ зліва направо, замінюємо кожну підформулу вигляду $\exists x$A на формулу $\exists y R_y^x(A)$, де y – тотально неістотне ім'я, співставлене такому входженню $\exists x$ в Φ.

Так збудована Ψ різнокванторна, в силу $\models \exists x A \leftrightarrow \exists y R_y^x(A)$ маємо |=Φ↔Ψ. Зрозуміло, що Ψ – варіанта формули Φ

Теорема. *Для кожної* Φ *можна збудувати нормальну* Ψ: |=Φ↔Ψ

За Φ побудуємо її варіанту – різнокванторну Φ_1. Тоді $\models\Phi_1\leftrightarrow\Phi$

За Φ_1 будуємо Ψ. Використовуючи R¬, R$\vee$, RR, проносимо всі символи реномінації вглиб формули до рівня ПС. Отримуємо Ψ таку, що $\models\Phi_1\leftrightarrow\Psi$. При цьому всі входження кванторних префіксів в Ψ – по різних тотально неістотних іменах. Отже, Ψ – нормальна, а в силу $\models\Phi_1\leftrightarrow\Phi$ та $\models\Phi_1\leftrightarrow\Psi$ маємо |=Φ↔Ψ

Нормальну формулу Ψ, отриману із даної формули Φ так описаним способом, назвемо *нормалізантою* формули Φ

Наслідок. *Нехай* Ψ − *нормалізанта формули* Φ. *Тоді* |=Φ↔Ψ

Визначимо множину $fr(\Phi)$ *квазівільних* імен формули Φ.

Для цього задамо функцію fr: $Fr \to 2^V$:

$\forall p \in Ps$ покладемо $fr(p) = \varnothing$. Далі значення fr визначаємо індуктивно:

$fr(\neg\Phi) = fr(\Phi)$;

$fr(\vee \Phi\Psi) = fr(\Phi) \cup fr(\Psi)$;

$fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\}$;

$fr(R^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}\Phi) = (fr(\Phi) \setminus \{v_1,...,v_n\}) \cup \{x_1,...,x_n\}$.

Звідси $fr(\forall x\Phi) = fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\}$ та $fr(\exists y R^x_y(\Phi)) = fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\}$

Для встановлення неістотності предметних імен важливою є

Теорема. *Якщо* $y \in \mu(p)$ $\forall$ *ПС* p *ф-ли* Φ *та* $y \notin fr(\Phi)$, *то* $y \in \mu(\Phi)$.

Теорема доводиться індукцією за побудовою формули Φ.

Наслідок 1. *Нехай* $y \in V$ *неістотне* $\forall$ *ПС формули* Φ *та* $y \notin nm(\Phi)$. *Тоді* $y \in \mu(\Phi)$.

В силу $fr(\Phi) \subseteq nm(\Phi)$ з умови $y \notin nm(\Phi)$ випливає умова $y \notin fr(\Phi)$.

Наслідок 2. *Нехай* $y \in V$ *тотально неістотне та* $y \notin nm(\Phi)$. *Тоді* $y \in \mu(\Phi)$.

Формула Φ *квазізамкнена*, якщо $fr(\Phi) = \varnothing$.

Квазізамкнені формули є синтаксичними аналогами замкнених формул класичної логіки, проте семантичними аналогами замкнених формул їх вважати не можна. До складу формули можуть входити ПС, для яких множини істотних імен *нескінченні*. Можливість для формули бути залежною від *нескінченної* множини предметних імен є визначальною властивістю логіки квазіарних предикатів, зокрема, НКЛ, що істотно її відрізняє від класичної логіки.

Пропозиційною схемою формули Φ назвемо ПФ $Prop(\Phi)$, отриману із Φ опусканням усіх символів, окрім ПС та символів проп. зв'язок.

Теорема. *Нехай формула* Φ *квазізамкнена,* $Prop(\Phi)$ *не тавтологія і не суперечність, причому* Φ *не містить спеціальних ПС із явно виділеними істотними іменами* (*наприклад, символи рівності* $=_{xy}$). *Тоді існують АС* $\boldsymbol{A}=(A,I)$ *та* $d_1, d_1 \in {}^V\!A$ *такі, що* $\Phi_A(d_1)=T$ *та* $\Phi_A(d_2)=F$.

Якщо $Prop(\Phi)$ не тавтологія і не суперечність, то існують істиннісні оцінки τ_1, τ_2 такі, що $\tau_1(Prop(\Phi))=T$ та $\tau_2(Prop(\Phi))=F$. Візьмемо $z\in V$: $z\notin nm(\Phi)$ та $z\notin\mu(\Phi)$. Візьмемо $A=\{a,b\}$. $d\in A^{nm(\Phi)}$ та $\forall p\in\sigma(\Phi)$ визначимо $p_A(d)\uparrow$.

$\forall d\in A^{nm(\Phi)}$ та $\forall p\in\sigma(\Phi)$ задамо $p_A(d\nabla z\square a)=\tau_1(p)$ та $p_A(d\nabla z\square b)=\tau_2(p)$.

Тоді $\Phi_A(d\nabla z\square a)=T$ та $\Phi_A(d\nabla z\square b)=F$

Таким чином, для логіки квазіарних предикатів квазізамкнені формули необов'язково інтерпретуються як константні предикати. У той же час для випадку класичної логіки кожна замкнена формула на кожній АС відповідної сигнатури завжди інтерпретується як як $\equiv T$ або $\equiv F$

Теорема. *$\forall$ формули Φ можна побудувати квазізамкнену нормальну формулу Ξ таку, що $|\!=\Phi \Leftrightarrow |\!=\Xi$.*

За Φ спочатку будуємо її різнокванторну варіанту Φ_1

Якщо $fr(\Phi)=fr(\Phi_1)=\varnothing$, далі будуємо нормальну формулу Ψ

Позаяк $fr(\Psi)=fr(\Phi_1)=\varnothing$, то Ψ квазізамкнена, вона нормалізанта формули Φ, тому $|\!=\Phi\leftrightarrow\Psi$. Звідси $|\!=\Phi \Leftrightarrow |\!=\Psi$, тому Ψ – шукана формула Ξ.

Нехай $fr(\Phi)=fr(\Phi_1)=\{u_1,...,u_k\}\neq\varnothing$. Візьмемо множину $\{y_1,...,y_k\}$ тотально неістотних імен таких, що $\{y_1,...,y_k\}\cap nm(\Phi_1)=\varnothing$. Всі $y_1,...,y_k$ неістотні для Φ_1. Тоді $|\!=\Phi_1 \Leftrightarrow |\!=\Phi \Leftrightarrow |\!=\forall u_1\ldots\forall u_k\Phi_1$, звідки $|\!=\forall u_1\ldots\forall u_k\Phi_1\leftrightarrow\Phi_2$, де Φ_2 – це формула $\forall y_1...\forall y_k R^{u_1,...,u_k}_{y_1,...,y_k}\Phi_1$.

Звідси $|\!=\Phi_1 \Leftrightarrow |\!=\Phi_2$. Згідно R¬, R$\vee$, RR проносимо всі реномінації вглиб формули до рівня ПС. Отримуємо Ξ таку, що $|\!=\Phi_2\leftrightarrow\Xi$. При цьому $fr(\Xi)=\varnothing$, всі входження кванторних префіксів в Ξ – по різних тотально неістотних іменах. Отже, квазізамкнена Ξ – в нормальній формі, згідно $|\!=\Phi\leftrightarrow\Phi_1$□, $|\!=\Phi_1\leftrightarrow\Phi_2$□ та $|\!=\Phi_2\leftrightarrow\Xi$ маємо $|\!=\Phi \Leftrightarrow |\!=\Xi$.

Така Ξ – *квазізамкнена нормалізанта* формули Φ.

Відношення логічного наслідку для множин формул ЧНКЛ

Γ та **Δ** – множини формул мови сигнатури Ps.

$\boldsymbol{A}=(A, I)$ – АС сигнатури Ps.

Δ є *логічним наслідком* **Γ** в *АС* $\boldsymbol{A}$, якщо $\forall d \in {}^{V}A$

$\Phi_A(d)=T \ \forall \Phi \in \mathbf{\Gamma} \Rightarrow$ неможливо $\Psi_A(d)=F \ \forall \Psi \in \mathbf{\Delta}$.

Позначаємо $\mathbf{\Gamma} \models_A \mathbf{\Delta}$

Δ є *логічним наслідком* **Γ**, якщо

$\mathbf{\Gamma} \models_A \mathbf{\Delta} \ \forall$ АС $\boldsymbol{A}=(A, I)$ сигнатури Ps .

Це позначаємо $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$

Звідси: $\mathbf{\Gamma} \not\models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow$ існують АС $\boldsymbol{A}=(A, I)$ та $d \in {}^{V}A$ такі:

$\forall \Phi \in \mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_A(d)=T$ та $\forall \Psi \in \mathbf{\Delta}$ маємо $\Psi_A(d)=F$

Відношення $\models$ для множин формул рефлексивне, але не транзитивне

Теорема (*заміни еквівалентних*). *Нехай* $\Phi \sim \Psi$. *Тоді*

$$\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \text{ \textit{та} } \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Psi.$$

***Властивості відношення* |=**

G1, G2 та П1–П10 успадковуються на кванторному рівні

Вкажемо властивості відношення |=, пов‘язані з композиціями реномінації та квантифікації.

Вони безпосередньо відтворюють відповідні властивості формул.

Кожна така властивість розщеплюється на дві властивості для |=

RT$_{\vdash}$) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi),\Gamma \models \Delta \quad \Leftrightarrow \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$

RT$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$

RR$_{\vdash}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)),\Gamma \models \Delta \quad \Leftrightarrow \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$

RR$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$

R¬$_{\vdash}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi),\Gamma \models \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$

R¬$_{\dashv}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi),\Gamma \models \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$

R$\vee_{|-}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$

R$\vee_{-|}$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$

PsN$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(p), \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p), \Gamma \models \Delta$ при $y \in \mu(p)$, де $p \in Ps$

PsN$_{-|}$) $\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(p) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ при $y \in \mu(p)$, де $p \in Ps$

ΦN$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$ при умові $y \in \mu(\Phi)$.

ΦN$_{-|}$) $\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ при умові $y \in \mu(\Phi)$.

Умову $y \in \mu(\Phi)$ можна ослабити до умови *y неістотне для* Φ.

Базові властивості відношення $\models$ на реномінативному рівні:

П1–П4 та RT$_{|-}$, RT$_{-|}$, RR$_{|-}$, RR$_{-|}$, R$\neg_{|-}$, R$\neg_{-|}$, R$\vee_{|-}$, R$\vee_{-|}$, PsN$_{|-}$, PsN$_{-|}$

Властивості, пов‘язані з кванторами та реномінаціями:

$R\exists_{\vdash}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi),\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma \models \Delta$ при умові $y \notin \{\bar v, \bar x\}$

$R\exists_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$ при умові $y \notin \{\bar v, \bar x\}$

$R\exists\exists_{\vdash}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi),\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R^{\bar v}_{\bar x} \circ R^{y}_{z}(\Phi),\Gamma \models \Delta$ при умові $y \in \{\bar v, \bar x\}$

$R\exists\exists_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \exists z \Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x} \circ R^{y}_{z}(\Phi)$ при умові $y \in \{\bar v, \bar x\}$

Для $R\exists\exists_{\vdash}$ та $R\exists\exists_{\dashv}$ z тотально неістотне та $z \notin nm(R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi))$

Вл-ті $R\exists_{\vdash}$, $R\exists_{\dashv}$, $R\exists\exists_{\vdash}$, $R\exists\exists_{\dashv}$ переформульовуються для $\forall x$.

Властивості, пов‘язані з елімінацією кванторів:

$\exists_{\vdash})$ $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R^{x}_{y}(\Phi), \Gamma \models \Delta$ при умові $y \in V_T$ та $y \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$

$\exists_{\dashv})$ $\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y_1}(\Phi), \ldots, R^{x}_{y_n}(\Phi), \exists x\Phi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$

$\forall_{\vdash})$ $R^{x}_{y_1}(\Phi), \ldots, R^{x}_{y_n}(\Phi), \forall x\Phi, \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \forall x\Phi, \Gamma \models \Delta$

$\forall_{\dashv})$ $\Gamma \models \Delta, \forall x\Phi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\Phi)$ при умові $y \in V_T$ та $y \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$

Базові властивості відношення $\models$ на кванторному рівні:

П1–П4 та $RT_{\vdash}$, $RT_{\dashv}$, $RR_{\vdash}$, $RR_{\dashv}$, $R\neg_{\vdash}$, $R\neg_{\dashv}$, $R\vee_{\vdash}$, $R\vee_{\dashv}$, $PsN_{\vdash}$, $PsN_{\dashv}$, $\Phi N_{\vdash}$, $\Phi N_{\dashv}$, $R\exists_{\vdash}$, $R\exists_{\dashv}$, $R\exists\exists_{\vdash}$, $R\exists\exists_{\dashv}$, $\exists_{\dashv}$, $\exists_{\vdash}$

Семантично несуперечливі множини формул

Множина формул **Γ** *семантично несуперечлива* (*сумісна*), якщо *існують* АС $\boldsymbol{A}=(A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі, що $\Phi_A(d)=T$ для всіх $\Phi \in \mathbf{\Gamma}$.

Звідси: **Γ** *семантично суперечлива* (*несумісна*), якщо *не існують* АС $\boldsymbol{A}=(A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі, що $\Phi_A(d)=T$ для всіх $\Phi \in \mathbf{\Gamma}$.

Модель сумісності множини формул **Γ** – це АС $\boldsymbol{A}=(A, I)$ така: для деякого $d \in {}^V A$ маємо $\Phi_A(d)=T$ $\forall \Phi \in \mathbf{\Gamma}$.

Теорема 1. **Γ** *сем. несуперечлива* $\Leftrightarrow$ **Γ** *має модель сумісності*.

Теорема 2. **Γ** *сем. несуперечлива* $\Leftrightarrow$ $\forall$ Φ *маємо* $\mathbf{\Gamma} \not\models \Phi \& \neg\Phi$

Наслідок. **Γ** *сем. суперечлива* $\Leftrightarrow$ *для деякої* Φ *маємо* $\mathbf{\Gamma} \models \Phi \& \neg\Phi$

Теорема 3. *Якщо* **Γ** *сем. суперечлива, то* $\forall$ Φ *маємо* $\mathbf{\Gamma} \models \Phi$.

Якщо $\mathbf{\Gamma} \not\models \Phi$ для деякої Φ, то існують АС $\boldsymbol{A}=(A, I)$ та $d \in {}^V A$: $\Phi_A(d)=F$ та $\Xi_A(d)=T$ $\forall \Xi \in \mathbf{\Gamma}$. Але $\Xi_A(d)=T$ $\forall \Xi \in \mathbf{\Gamma}$ означає несуперечливість **Γ**

Модель істинності множини формул **Γ** – це АС $\boldsymbol{A}=(A, I)$ така: $\forall d \in {}^V A$ $\forall \Phi \in \mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_A(d) \cong T$.

Для логік ПЕП кожна модель істинності є моделлю сумісності.

Для логік ЕП це невірно: розгл. АС, де $\forall$ ПС інтерпретується як усюди невизначений пр-т

Кожна АС із ЕП може бути довизначена до АС із ПЕП.

Неокласичні логіки функціонально-еквацiйного рівня

ФЕНКЛ – це НКЛ функціонально-еквацiйного рівня – ФКНЛР ЕП

Семантичні моделі ФЕНКЛ – КС еквітонних квазіарних функцій і предикатів функціонально-еквацiйного рівня $({}^{V}A,\ EFn^{A} \cup EPr^{A},\ \boldsymbol{C})$

$\boldsymbol{C}$ визначається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, \exists x, \mathrm{S}^{\bar{v}}, {}'x, =\}$.

$(EFn^{A} \cup EPr^{A},\ \boldsymbol{C})$ – композиційна алгебра квазіарних функцій і предикатів функціонально-еквацiйного рівня.

Побудова такої алгебри визначає мову ФЕНКЛ.

Алфавіт мови ФЕНКЛ

– V – множина предметних імен

– Fns – множина функціональних (ФНС) символів

– Dns – множина деномінаційних (ДНС) символів

– Ps – множина предикатних (ПС) символів

– символи базових композицій $\neg, \vee, \exists x, S^{\bar{v}}, =$.

Множину $Fns \cup Dns$ позначимо Fs.

Множину $Fns \cup Ps$ назвемо *сигнатурою* мови ФЕНКЛ.

Множини термів Tr і формул Fr вводимо індуктивно.

T1. Кожний ФС є термом. Такі терми назвемо *атомарними*.

T2. Нехай $\tau, t_1, ..., t_n$ – терми. Тоді $S^{v_1,...,v_n}\tau t_1...t_n$ – терм.

Ф1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо *атомарними*.

Ф2. Нехай t та s – терми. Тоді $=ts$ – формула.

Ф3. Нехай Φ – формула, $t_1, ..., t_n$ – терми. Тоді $S^{v_1,...,v_n}\Phi t_1...t_n$ – формула

Ф4. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$ та $\exists x\Phi$ – формули.

$\sigma(\phi)$ – множина сигнатурних символів терма чи формули ϕ.

$nm(\Phi)$ – множина всіх $v \in V$, які фігурують в символах суперпозиції та квантифікації формули Φ.

Така $nm(\Phi)$ – *множина явних імен* формули Φ.

$dnm(\Phi)$ – множина всіх $v \in V$, відповідних до ДНС формули Φ.

$ndn(\phi) = nm(\Phi) \cup dnm(\Phi)$ – *множина імен* формули Φ.

$q(\Phi)$ – множина всіх $v \in V$, які є в символах квантифікації ф-ли Φ.

$nq(\Phi) = ndn(\Phi) \backslash q(\Phi)$

Розширюємо σ, nm, dnm, ndn, q, nq на множини формул

Множина $fr(\Phi)$ *квазівільних* імен формули Φ:

$\forall f \in Fns\ \forall p \in Ps$ покладемо $fr(f) = fr(p) = \varnothing$.

$\forall$ ДНС $'x$ покладемо $fr('x) = \{x\}$.

$$fr(S^{v_1,\dots,v_n}\tau t_1 \dots t_n) = (fr(\tau) \setminus \{v_1,\dots,v_n\}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} fr(t_i)$$

$fr(=ts) = fr(t) \cup fr(s)$;

$fr(\neg\Phi) = fr(\Phi)$;

$fr(\vee\Phi\Psi) = fr(\Phi) \cup fr(\Psi)$;

$fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\}$;

$$fr(S^{v_1,\dots,v_n}\Phi t_1 \dots t_n) = (fr(\Phi) \setminus \{v_1,\dots,v_n\}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} fr(t_i)$$

Інтерпретуємо мову ФЕНКЛ на КС еквітонних квазіарних ф-ій та пр-ів

Задамо тотальне однозначне $I : Fs \cup Ps \to EFn^A \cup EPr^A$, яке визначає значення сигнатурних символів ПС як базові функції та предикати відповідної АС даних $(A,\ EFn^A \cup EPr^A)$

При цьому $I('v) = \mathbf{'v}$ $\forall\, 'v \in Dns$.

Такі АС даних – неокласичні АС із еквітонними функціями та предикатами.

Отримуємо об'єкти $((A,\ EFn^A \cup EPr^A), I)$ – АС ЕФ та ЕП з доданою сигнатурою.

Кожна така АС фактично визначає КС $({}^{V}\!A, EFn^A \cup EPr^A, \boldsymbol{C})$

АС з доданою сигнатурою $((A,\ EFn^A \cup EPr^A), I)$ скорочено позначаємо (A, I).

АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову ЧНКЛ із АС даних. Називаємо їх *моделями мови*

Продовжимо I до відображення $Fr \cup Tr \to EFn^A \cup EPr^A$:

1. $I(S^{v_1,...,v_n}\tau t_1...t_n) = \mathrm{S}^{v_1,...,v_n}(I(\tau), I(t_1),..., I(t_n))$
2. $I(=ts) = \mathbf{=}(I(t), I(s))$.
3. $I(S^{v_1,...,v_n}\Phi t_1...t_n) = \mathrm{S}^{v_1,...,v_n}(I(\Phi), I(t_1),..., I(t_n))$
4. $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$.
5. $I(\vee\Phi\Psi) = \mathbf{\vee}(I(\Phi), I(\Psi))$.
6. $I(\exists x\Phi) = \mathbf{\exists} x(I(\Phi))$.

Функцію $I(t)$ – значення терма t при інтерпретації $\boldsymbol{A}=(A, I)$, – позн. t_A.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інт-ї $\boldsymbol{A}=(A, I)$, – позн. Φ_A.

Поняття істинності та виконуваності формул – аналог. випадку ЧНКЛ.

Поняття тавтології, тавт. наслідку, тавт. еквівалентності для ФЕНКЛ успадковуються з реномінаційного та кванторного рівнів.

Формула *пропозиційно нерозкладна*, якщо вона атомарна або має вигляд

$=ts$, $\exists x\Phi$ чи $S^{v_1,\ldots,v_n}\Phi t_1\ldots t_n$

Визначення та властивості відношень логічного наслідку, слабкого логічного наслідку та логічної еквівалентності для ФЕНКЛ аналогічні відп. визначенням та властивостям для класичної логіки, РНЛ та ЧНКЛ.

Семантичні власт-ті формул ФЕНКЛ індуковані відп. вл-ми композицій.

Для пропозиційних композицій та кванторів такі властивості аналогічні відповідним властивостям формул класичної логіки.

Розглянемо властивості, пов'язані з композиціями

– квантифікації

– суперпозиції

– рівності

S¬) $\models S^{\bar{v}}(\neg\Phi, \bar{f}) \leftrightarrow \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{f})$

S∨) $\models S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{f}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{f})$

Аналогічно S∨ записуються S&, S→, S↔, S⊕

SE) $\models S^{\bar{v}}(r = s, \bar{t}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(r, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t})$

S∃) $\models S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}) \leftrightarrow \exists x S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t})$

при умові { та Sei $x \notin \bar{v}$ x отне для $\bar{t}$

S∃s) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$ (тут $x \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$)

$\models S^{v_1,\ldots,v_n}(\exists x\Phi, S^x(t_1, 'v_1), \ldots, S^x(t_n, 'v_n)) \leftrightarrow \exists x S^{v_1,\ldots,v_n}(\Phi, S^x(t_1, 'v_1), \ldots, S^x(t_n, 'v_n))$

S∃∃) $\models S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}) \leftrightarrow \exists y S^{\bar{v},x}(\Phi, \bar{t}, 'y)$

при та $y \notin ndn\ S^{\bar{v}}\ \exists x\Phi\ \bar{t}$ $y \in V_T$

Аналогічно записуються S∀, S∀s та S∀∀

SSt) $\models S^{\bar{u},x}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\tau, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) =$

$$S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\tau, \bar{t}, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \ldots, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \ldots, S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}))$$

SSΦ) $\models S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \leftrightarrow$

$$S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\Phi, \bar{t}, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \ldots, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \ldots, S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}))$$

ZT) $\models S^{x_1,\ldots,x_m,v_1,\ldots v_n}(\tau,'x_1,\ldots,'x_m,g_1,\ldots,g_n) = S^{v_1,\ldots v_n}(\tau,g_1,\ldots,g_n)$

ZΦ) $\models S^{x_1,\ldots,x_m,v_1,\ldots v_n}(\Phi,'x_1,\ldots,'x_m,g_1,\ldots,g_n) = S^{v_1,\ldots v_n}(\Phi,g_1,\ldots,g_n)$

DD) $\models S^{v_1,\ldots v_n}('x,g_1,\ldots,g_n) = 'x$

DS) $\models S^{x,v_1,\ldots v_n}('x,\tau,g_1,\ldots,g_n) = \tau$

ZNT) $\models S^{x,v_1,\ldots v_n}(\tau,t,g_1,\ldots,g_n) = S^{v_1,\ldots v_n}(\tau,g_1,\ldots,g_n)$

при x неістот не для τ

ZNΦ) $\models S^{x,v_1,\ldots v_n}(\Phi,t,g_1,\ldots,g_n) \leftrightarrow S^{v_1,\ldots v_n}(\Phi,g_1,\ldots,g_n)$

при x неіст. для Φ

NS) $\models \exists S^{x,\bar{v}}(\Phi,t,\bar{t}) \leftrightarrow S^{x,\bar{v}}(\Phi,t,\bar{t})$

при умові x неістотне для $t,\bar{t}$

SQ) $\models S^{v_1,\ldots,v_n}(\Phi,t_1,\ldots t_n) \to \exists v_1\ldots\exists v_n\Phi$

ПП) Нехай $\models\Phi$. Тоді $\models S^{v_1,\ldots v_n}(\Phi,t_1,\ldots,t_n)$

Специфічні властивості рівності.

Rf) рефлексивність: $\models t{=}t$;

Sm) симетричність: $\models s{=}t \leftrightarrow t{=}s$;

Tr) транзитивність: $\models s{=}t \rightarrow t{=}h \rightarrow s{=}h$;

ЕТ) $\models t_1 = s_1 \,\&\ldots\&\, t_n = s_n \rightarrow S^{v_1,\ldots v_n}(t, t_1,\ldots,t_n) = S^{v_1,\ldots v_n}(t, s_1,\ldots,s_n)$

ЕФ) $\models t_1 = s_1 \,\&\ldots\&\, t_n = s_n \rightarrow (S^{v_1,\ldots v_n}(\Phi, t_1,\ldots,t_n) \leftrightarrow S^{v_1,\ldots v_n}(\Phi, s_1,\ldots,s_n))$

Теорема (еквівалентості). *Нехай* Φ' *отримана із формули* Φ *заміною деяких входжень формул* $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ *на* $\Psi_1,\ldots,\Psi_n$. *Якщо* $\models\Phi_1\leftrightarrow\Psi_1,\ldots, \models\Phi_n\leftrightarrow\Psi_n$, *то* $\models\Phi\leftrightarrow\Phi'$.

Теорема (рівності для термів). *Нехай* τ' *отриманий з терма* τ *заміною деяких входжень термів* $s_1,\ldots, s_n$ *на* $t_1, \ldots, t_n$. *Якщо* $\models s_1 = t_1, \ldots, \models s_n = t_n$, *то* $\models\tau = \tau'$.

Теорема (рівності для формул). *Нехай* Φ' *отримана з формули* Φ *заміною деяких входжень термів* $s_1, \ldots, s_n$ *на* $t_1, \ldots, t_n$. *Якщо* $\models s_1 = t_1, \ldots, \models s_n = t_n$, *то* $\models\Phi\leftrightarrow\Phi'$.

Ім'я $x \in V$ *неістотне для формули* Φ, якщо

$\forall \boldsymbol{A} = (A, I)$ x неістотне для Φ_A.

Ім'я $x \in V$ *неістотне для терма* τ, якщо

$\forall \boldsymbol{A} = (A, I)$ x неістотне для τ_A.

Критерії неістотності предметних імен для формул та термів:

Теорема. *Ім'я* $x \in V$ *неістотне для* Φ $\Leftrightarrow$ $\models \Phi \leftrightarrow \forall x \Phi$

Теорема. *Ім'я* $x \in V$ *неістотне для* τ $\Leftrightarrow$

$$\models \forall y(\tau = S^x(\tau, 'y)) \Leftrightarrow \models (\tau = S^x(\tau, 'y)).$$

Звідси $x \in V$ неістотне для формули Φ $\Leftrightarrow$

$$\models \Phi \to \forall x \Phi \Leftrightarrow \models \exists x \Phi \to \Phi.$$

Ім'я x *тотально неістотне*, якщо воно неістотне для $\forall g \in Fns \cup Ps$.

Надалі розглядаємо такі інтерпретації, для яких виділена нескінченна підмножина $V_T \subseteq V$ тотально неістотних імен.

$\forall g \in Fs \cup Ps$ множину *синтетично неістотних* предметних імен визначимо за допомогою тотальної $\mu : Fs \cup Ps \to 2^V$.

При цьому $\forall\, 'x \in Dns$ $\mu('x) = V \setminus \{x\}$.

Продовжимо таку функцію до $\mu : Tr \cup Fr \to 2^V$ так:

$$\mu(S^{v_1,\ldots,v_n} \tau t_1 \ldots t_n) = (\mu(\tau) \cup \{v_1,\ldots,v_n\}) \cap \bigcap_{\{i | v_i \notin \mu(t)\}} \mu(t_i)$$

$\mu(=ts) = \mu(t) \cap \mu(s)$

$\mu(\neg\Phi) = \mu(\Phi)$

$\mu(\vee\Phi\Psi) = \mu(\Phi) \cap \mu(\Psi)$

$\mu(\exists x\Phi) = \mu(\Phi) \cup \{x\}$

$$\mu(S^{v_1,\ldots,v_n} \Phi t_1 \ldots t_n) = (\mu(\Phi) \cup \{v_1,\ldots,v_n\}) \cap \bigcap_{\{i | v_i \notin \mu(t)\}} \mu(t_i).$$

Пару $(Fs \cup Ps, \mu)$ назвемо сигнатурою синтетичної неістотності.

Множина тотально неістотних імен $V_T = \bigcap_{g \in Fns \cup Ps} \mu(g)$ мусить бути нескінченною

Семантичною основою ФЕНКЛ є КС еквітонних функцій та предикатів з додатковою вимогою наявності нескінченної множини тотально неістотних предметних імен.

Теорема. 1) *Нехай* $x \in \mu(\tau)$. *Тоді* x *неістотне для терма* τ.
2) *Нехай* $x \in \mu(\Phi)$. *Тоді* x *неістотне для формули* Φ.

Наслідок. 1) *Якщо* $x \in \mu(\tau)$, *то* $|{=}\forall y(\tau = S^x(\tau, {}'y)$.
2) *Якщо* $x \in \mu(\Phi)$, *то* $|{=}\Phi \to \forall x\Phi$ *та* $|{=}\exists x\Phi \to \Phi$.

Теорема. *Нехай* $x \in \mu(g)$ $\forall g \in \sigma(\mathrm{F})$ *та* $x \notin fr(\mathrm{F})$. *Тоді* $x \in \mu(\Phi)$.

В силу $fr(\Phi) \subseteq dnm(\Phi)$ із $x \notin dnm(\Phi)$ випливає $x \notin fr(\Phi)$. Тому

Наслідок 1. *Нехай* $x \in \mu(g)$ $\forall g \in \sigma(\Phi)$ *та* $x \notin dnm(\Phi)$. *Тоді* $x \in \mu(\Phi)$.

Наслідок 2. *Нехай* $x \in V$ *тотально неістотне та* $x \notin dnm(\Phi)$. *Тоді* $x \in \mu(\Phi)$.

Ψ – *варіанта* формули Ξ, якщо Ψ утворена із Ξ послідовними замінами підформул $\exists x\Phi$ на підформули $\exists y S^x(\Phi, {}'y)$ при $y \in \mu(\Phi)$.

Теорема (про варіанту). *Нехай* Ψ − *варіанта формули* Ξ. *Тоді* $|{=}\Psi \leftrightarrow \Xi$.

Нормальні форми в ФЕНКЛ

Формула Ψ знаходиться в *різнокванторній формі*, якщо:

– всі входження кв. префіксів у Ψ − по різних тотально неіст. іменах;

– $\forall$ підформули вигляду $S^{\overline{v}}(A,\overline{t})$ якщо A містить $\exists x$, то

$x \notin \{\overline{v}\}$ та $x \in \mu\ \overline{t}$

Формула Ψ знаходиться в *нормальній формі* (або НФ) якщо:

– всі вх-ня квант. префіксів у Ψ − по різних тотально неістотних іменах;

– всі символи суперпозиції формули Ψ застосовні тільки до ФС чи ПС.

Неважко переконатись, що кожна нормальна формула є різнокваторною.

Терм мови ФЕНКЛ *нормальний*, якщо

– всі його символи суперпозиції застосовані тільки до ФС

– згорнуті неістотні імена і виконані спрощення згідно
SST, ZNT, ZT, DS, DD

Нормальна формула ФЕНКЛ *стандартна*, якщо

– для її термів та підформул згорнуті неістотні імена

– виконані спрощення згідно ZNФ, ZФ та всі її терми нормальні.

Теорема. $\forall$ *формули* Φ *можна збудувати різнокванторну* Ψ: $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$.

$\forall$ входженню кванторного префіксу $\exists x$ в складі підформули $\exists x$A зіставимо тотально неістотне $y \in \mu$(A): $y \notin ndn(\Phi)$ та різним входженням кванторних префіксів зіставлені різні тотально неістотні імена.

Зрозуміло, що всі такі імена неістотні для кожного терма формули Φ.

Просуваючись по Φ зліва направо, замінимо $\forall$ підформулу вигляду $\exists x$A на $\exists y S^x$(A, ‘y), де y − тотально неістотне, зіставлене такому входженню $\exists x$ в формулу Φ. Отримаємо варіанту формули Φ – різнокванторну Ψ.

Згідно $\models \exists x\text{A} \leftrightarrow \exists y S^x(\text{A}, `y)$ за теоремою еквівалентності $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$

Теорема. $\forall$ *ф-ли* Φ *можна збудувати стандартну нормальну* Ξ: $\models \Phi \leftrightarrow \Xi$.

За Φ будуємо різнокванторну ф-лу Ψ як описано вище. Маємо $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$.

Використовуючи S¬, S∨, S∃, SE, а також SSΦ та SST, проносимо всі символи суперпозиції, згортаючи їх при потребі, вглиб формули до рівня ФС та ПС. Для спрощення використовуємо DD, DS, ZNT, ZT, ZNΦ, ZΦ. Отримуємо Ξ: $\models \Psi \leftrightarrow \Xi$.

Така Ξ − нормальна, а згідно $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$ та $\models \Psi \leftrightarrow \Xi$ маємо $\models \Phi \leftrightarrow \Xi$

НФ Ξ, отримана із даної Φ описаним способом – *нормалізанта* ф-ли Φ.

Наслідок. *Нехай* Ξ − *нормалізанта формули* Φ. *Тоді* $\models \Phi \leftrightarrow \Xi$.

Теорема. $\forall$ Φ *можна збудувати нормальну квазізамкнену* Ψ: $\models\Phi \Leftrightarrow \models \Xi$.

За Φ спочатку будуємо різнокванторну формулу Ψ так, як описано вище.

Якщо $fr(\Psi)=\varnothing$, далі будуємо формулу Ξ так, як описано як описано вище.

Позаяк $fr(\Xi) = fr(\Psi)$, то Ξ – квазізамкнена, вона є нормалізантою ф-ли Φ, тому $\models\Phi\leftrightarrow\Xi$. Звідси $\models\Phi \Leftrightarrow \models\Xi$.

Нехай тепер $fr(\Psi)=\{u_1,..., u_k\} \neq \varnothing$. Маємо $\models\Phi\leftrightarrow\Psi$.

Візьмемо множину $\{y_1,...,y_k\}$ тотально неістотних імен: $\{y_1,...,y_k\} \cap ndn(\Psi) = \varnothing$.

Всі $y_1,...,y_k \in \mu(\Psi)$, тому $\models \forall u_1 ... \forall u_k \Psi \leftrightarrow \forall y_1 ... \forall y_k S^{u_1,...,u_k}(\Phi, 'y_1,..., 'y_k)$

Звідси $\models \Psi \Leftrightarrow \models \Phi_1$, де Φ_1 це $(\forall y_1 ... \forall y_k S^{u_1,...,u_k})$ Φ $'y_1$ ... $'y_k$

Використ-чи S¬, S∨, SST, SSΦ, проносимо всі символи суперпозиції вглиб формули до рівня ПС та ФС. Отримуємо Ξ таку, що $\models\Phi_1\leftrightarrow\Xi$. Тоді $fr(\Xi)=\varnothing$, всі вх-ня квант. префіксів в Ξ − по різних тотально неістотних іменах, причому всі її ДНС $'y$ такі, що y тотально неістотне.

Отже, квазізамкнена Ξ − нормальна.

Згідно $\models\Phi\leftrightarrow\Psi$, $\models\Psi \Leftrightarrow \models\Phi_1$ та $\models\Phi_1\leftrightarrow\Xi$ маємо $\models\Phi \Leftrightarrow \models\Xi$

Отримана таким способом Ξ – *квазізамкнена нормалізанта* формули Φ.

Наслідок. *Нехай* Ξ − *квазізамкнена норм-та ф-ли* Φ. *Тоді* $\models\Phi \Leftrightarrow \models\Xi$.