

ПЕРШОПОРЯДКОВІ ЧИСЛЕННЯ ГІЛЬБЕРТІВСЬКОГО ТИПУ НКЛ ПОВНОТОТАЛЬНИХ ЕКВІТОННИХ ПРЕДИКАТІВ

Будуються ЧНКЧ – числення НКЛ повнототальних еквітонних предикатів функціонально-екваційного рівня.

Для них справджуються синтаксичні варіанти відповідних семантичних тверджень, зокрема, теорема еквівалентності, теореми про нормальні форми. Формулюється і доводиться теорема дедукції .

Для ЧНКЧ справджуються теореми коректності й повноти.

Числення НКЛ ПЕП кванторно-екваційного рівня можна трактувати як прикладні ЧНКЧ, у яких до множини власних аксіом входять спеціальні аксіоми рефлексивності рівності та рівності для формул.

Для цих числень справджуються теореми коректності й повноти.

Будуються ФЕНКЧ – числення НКЛ повнототальних еквітонних предикатів функціонально-екваційного рівня. Для них справджуються синтаксичні варіанти відповідних семантичних тверджень (теорема еквівалентності, теореми про нормальні форми), теорема дедукції

Для ФЕНКЧ справджуються теореми коректності та повноти.

ЧНКЧ – це трійка $T = (L, Ax, P)$, де L – мова логіки із заданою множиною формул Fr , $Ax \subseteq Fr$ – множина аксіом, P – правил виведення.

Ax розбита на множини $A_{\text{лог}}$ логічних аксіом і $A_{\text{вл}}$ власних аксіом.

Множина $A_{\text{лог}}$ задається такими схемами аксіом:

$$AxIP) \neg\Phi \vee \Phi$$

$$Ax\exists\exists) \exists x \exists y \Phi \rightarrow \exists y \exists x \Phi$$

$$AxR\exists x) R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(\Phi) \rightarrow \exists v_1 \dots \exists v_n \Phi$$

$$AxR^{-}) R_{\bar{x}}^{-}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{-}(\Phi)$$

$$AxR\vee) R_{\bar{x}}^{-}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{-}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{-}(\Psi)$$

$$AxRR) R_{\bar{x}}^{-}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{-} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$$

$$AxRT) R_z^z(\Phi) \leftrightarrow \Phi$$

$$AxN\exists) \exists x \Phi \rightarrow \forall x \exists x \Phi$$

$$AxR\exists) R_{\bar{u}}^{-}(\exists x \Phi) \leftrightarrow R_{\bar{u}}^{-}(\exists x \Phi), \quad x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$$

$$AxNR) \exists z R_z^x(\Phi) \leftrightarrow R_z^x(\Phi), \quad x \neq z$$

$AxNP) p \rightarrow \forall x p$

Записані для всіх $p \in Ps$, $AxNP$ визначають множини $\mu(p)$.

Множина P складається з відомих пропозиційних правил розширення, скорочення, асоціативності, перетину та кванторних правил:

П5) $\Phi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \forall x \Psi \vdash \exists x \Phi \rightarrow \Psi$

П6) $\Phi \rightarrow \forall y \Phi \vdash R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$

Теорема істинності (коректності). $T \vdash \Phi \Rightarrow T \models \Phi$.

Доводиться *теорема повноти* чистих неокласичних числень:

Теорема повноти. $T \models \Phi \Rightarrow T \vdash \Phi$.

Ідея доведення – моделювання виведення квазізамкненої нормальної Ψ в численні T шляхом побудови виведення аналогічної їй формули класичної логіки Ψ' у відповідній теорії першого порядку T_Φ та навпаки

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ НКЛ 1-ГО ПОРЯДКУ

Секвенційні числення – це формально-аксіоматичні системи, які формалізують відношення \models логічного наслідку для множин формул

Використовуємо модифіковану форму запису секвенцій.

Секвенції трактуємо як множини специфікованих формул

Кожна формула специфікована (відмічена) символом \perp чи \neg .

$\perp \Phi$ – T -формула; $\neg \Phi$ – F -формула.

Секвенції позначаємо $\perp \Gamma \neg \Delta$.

Секвенційне числення будується так:

секвенція $\perp \Gamma \neg \Delta$ *вивідна* (має виведення) $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Секвенція $\perp \Gamma \neg \Delta$ *замкнена*, якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

Замкнені секвенції грають роль аксіом:

якщо $\perp \Gamma \neg \Delta$ замкнена, то $\Gamma \models \Delta$.

Справді, $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma \models \Delta$.

Секвенційні форми – синтаксичні аналоги семантичних властивостей відношення \models

Вони є правилами виведення секвенційних числень

Мають вигляд $\frac{\Sigma}{\Omega}$ або $\frac{\Sigma \quad Y}{\Omega}$

Виведення в секвенційних численнях – дерево, вершини якого секвенції.

Індуктивне визначення секвенційного дерева:

- 1) Секвенція Σ утворює тривіальне сек. дерево з єдиною вершиною Σ
- 2) Нехай α – сек. дерево з коренем Σ , β – сек. дерево з коренем Y ,

$\frac{\Sigma}{\Omega}$ та $\frac{\Sigma \quad Y}{\Omega}$ – секвенційні форми. Тоді $\frac{\alpha}{\Omega}$ та $\frac{\alpha \quad \beta}{\Omega}$ – секвенційні дерева з коренем Ω .

Секвенційне дерево *замкнене*: кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція Σ *вивідна*: існує замкнене сек. дерево з коренем Σ .

Таке замкнене дерево – *виведення* секвенції Σ .

Базові секвенційні форми НКЛ кванторного рівня

$$\vdash \neg \frac{\neg \vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma}$$

$$\neg \vdash \frac{\vdash A, \Sigma}{\neg \vdash \neg A, \Sigma}$$

$$\vdash \vee \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma}$$

$$\vdash \vee \frac{\neg \vdash A, \neg \vdash B, \Sigma}{\neg \vdash A \vee B, \Sigma}$$

$$\vdash RT \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(A), \Sigma}$$

$$\neg \vdash RT \frac{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\neg \vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(A), \Sigma}$$

$$\vdash RR \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$$

$$\vdash RR \frac{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$$

$$\frac{\vdash R \neg \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma}}{\vdash R \neg}$$

$$\frac{\neg \vdash R \neg \frac{\neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma}}{\neg \vdash R \neg}$$

$$\frac{\vdash R \vee \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma}}{\vdash R \vee}$$

$$\frac{\neg \vdash R \vee \frac{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma}}{\neg \vdash R \vee}$$

$$\frac{\vdash \Phi N \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma \text{ при } y \in \mu(A)}{\vdash R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}}(A), \Sigma}}{\vdash \Phi N}$$

$$\frac{\neg \vdash \Phi N \frac{\neg \vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma \text{ при } y \in \mu(A)}{\neg \vdash R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}}(A), \Sigma}}{\neg \vdash \Phi N}$$

$$\frac{\vdash R \exists \frac{\vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}}{\vdash R \exists} \quad \frac{\neg \vdash R \exists}{\neg \vdash R \exists}$$

$$\frac{\neg \vdash R \exists \frac{\neg \vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}}{\neg \vdash R \exists}$$

Для $\vdash R \exists$ та $\neg \vdash R \exists$ умова:
 $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$

$$\frac{\neg \vdash R \exists \exists \frac{\neg \vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_z^y(A), \Sigma}{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}}{\neg \vdash R \exists \exists}$$

$$\frac{\neg \vdash R \exists \exists \frac{\neg \vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_z^y(A), \Sigma}{\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}}{\neg \vdash R \exists \exists}$$

Для $\vdash R \exists \exists$, $\neg \vdash R \exists \exists$ умови:
 $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$,

z ТОТАЛЬНО НЕІСТОТНЕ,
 $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A))$

При умові $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ використовуємо форми $\perp\text{-}R \exists$ та $\text{-}\perp R \exists$,

При умові $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$ використовуємо форми $\perp\text{-}R \exists \exists$ та $\text{-}\perp R \exists \exists$.

$\perp\text{-} \exists \frac{\perp\text{-}R_y^x(A), \Sigma}{\perp\text{-} \exists xA, \Sigma}$ при y тотально неістотному та $y \notin nm(\Sigma, A)$

$\text{-}\perp \exists \frac{\text{-}\perp R_{z_1}^x(A), \dots, \text{-}\perp R_{z_m}^x(A), \Sigma, \text{-}\perp \exists xA}{\text{-}\perp \exists xA, \Sigma}$

При застосуванні форми $\text{-}\perp \exists \{z_1, \dots, z_m\}$ – це множина усіх імен множини доступних формул секвенції $\text{-}\perp \exists xA, \Sigma$.

Секвенційне числення з цими базовими формами – *QZN-числення*

Теорема. Нехай $\perp\text{-}\Lambda \text{-}\perp \text{K}$ та $\perp\text{-}\Lambda \text{-}\perp \text{K} \text{-}\perp \text{X} \text{-}\bar{\text{Z}}$ базові секв. форми, тоді

1) якщо $\Lambda \models \text{K}$, то $\perp\text{-}\Gamma \models \Delta$; якщо $\perp\text{-}\text{K} \not\models \Delta$ та $\text{X} \models \text{Z}$, то $\Gamma \models \Delta$.

2) якщо $\Gamma \not\models \Delta$, то $\Lambda \not\models \text{K}$; якщо $\Gamma \not\models \Delta$, то $\Lambda \not\models \text{K}$ або $\text{X} \not\models \text{Z}$.

Поетапна *процедура побудови дерева* для секвенції Σ аналогічна відповідній процедурі для числень класичних чистих логік. 1-го порядку.

На початку побудови дерева зафіксуємо деякий нескінченний список TN тотально неістотних "нових" імен, які не зустрічаються в формулах секвенції Σ .

Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних формул.

На початку кожного етапу виконується крок доступу: до списку доступних формул додається по одній зі списків \perp -формул та \neg -формул.

На початку побудови дерева доступна лише пара перших формул списків.

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі $k+1$ перевіряємо, чи буде кожен лист дерева замкненою секвенцією.

Якщо всі листи дерева замкнені, то процедура завершена позитивно, ми отримали замкнене секвенційне дерево.

Нехай існують незамкнені листи дерева.

Для кожного такого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ :

(1) Активізуємо всі доступні непримітивні формули ξ .

(2) По черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму.

Форми $_R T$, $_R T$, $_R FN$, $_R FN$ допоміжні: перед застосуванням однієї з форм $_R R$, $_R R$, $_R \neg$, $_R \neg$, $_R \vee$, $_R \vee$, $_R \exists$, $_R \exists$, $_R \exists \exists$, $_R \exists \exists$ виконуємо за можливості спрощення, застосовуючи належну кількість раз ці форми $_R T$, $_R T$, $_R FN$, $_R FN$.

Після застосування основної форми формула дезактивується.

Спочатку виконуємо всі $_R \exists$ -форми. При застосуванні $_R \exists$ беремо u як перше незадіяне ім'я списку TN .

Після $\vdash \exists$ виконуємо $R \exists \exists$ -форми, при $z \notin TN$ (беремо із задіяних імен списку TN , якщо це можливо, інакше z – перше незадіяне ім'я списку TN).

Потім до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну секвенційну форму $\vdash \neg, \vdash \neg, \vdash \vee, \vdash \vee, \vdash RR, \vdash RR, \vdash R\neg, \vdash R\neg, \vdash R\vee, \vdash R\vee, \vdash R\exists, \vdash R\exists, \vdash \exists$.

При застосуванні $\vdash \exists$ множина $\{z_1, \dots, z_m\}$ складається з усіх імен доступних формул листа та його наступників.

Всі повтори формул в секвенції усуваємо.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

- 1) процедура завершена позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;
- 2) процедура завершена негативно або не завершується, тоді маємо незамкнене скінченне або нескінченне дерево. У цьому випадку в дереві існує хоча б один незамкнений шлях \wp , його вершини – незамкнені секвенції, бо при появі замкненої до неї незастосовна жодна секвенційна форма, і процес побудови для цього шляху обривається. Кожна із формул секвенції Σ зустрінеться на шляху \wp і стане доступною.

Теорема коректності. Нехай секвенція $\vdash_{-} \Gamma \vdash_{-} \Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Для доведення повноти QZN-числень – метод модельних множин.

Множина \mathbf{H} специфікованих формул із $W = nm(\mathbf{H})$ модельна, якщо:

НС) Для кожної примітивної Φ лише одна з $\vdash_{-} \Phi$ чи $\vdash_{-} \neg \Phi$ може належати \mathbf{H}

HN) Якщо $\vdash_{-} R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$ та $y \in \mu(\Phi)$, то $\vdash_{-} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$;

якщо $\vdash_{-} R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$ та $y \in \mu(\Phi)$, то $\vdash_{-} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$.

H \neg) Якщо $\vdash_{-} \neg \Phi \in \mathbf{H}$, то $\vdash_{-} \Phi \in \mathbf{H}$; якщо $\vdash_{-} \neg \Phi \in \mathbf{H}$, то $\vdash_{-} \Phi \in \mathbf{H}$.

H \vee) Якщо $\vdash_{-} \Phi \vee \Psi \in \mathbf{H}$, то $\vdash_{-} \Phi \in \mathbf{H}$ або $\vdash_{-} \Psi \in \mathbf{H}$;

якщо $\vdash_{-} \Phi \vee \Psi \in \mathbf{H}$, то $\vdash_{-} \Phi \in \mathbf{H}$ та $\vdash_{-} \Psi \in \mathbf{H}$.

HT) Якщо $\vdash_{-} R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$, то $\vdash_{-} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$;

якщо $\vdash_{-} R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$, то $\vdash_{-} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$

НRR) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \notin H$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H$;

якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \notin H$.

НР \neg) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H$, то $\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$;

якщо $\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H$.

НР \vee) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H$;

якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H$.

НР \exists) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то $\vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$;

якщо $\vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H$.

НР $\exists\exists$) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то $\vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_z^y(\Phi) \in H$;

якщо $\vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_z^y(\Phi) \in H$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H$.

Тут z тотально неістотне та $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H$ та $\vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_z^y(\Phi) \in H$

Н \exists) Якщо $\vdash \exists x\Phi \in H$, то існує $y \in W$ таке, що $\vdash R_y^x(\Phi) \in H$;

якщо $\vdash \exists x\Phi \in H$, то для всіх $y \in W$ маємо $\vdash R_y^x(\Phi) \in H$.

$\vdash R_y^x(\Phi)$

Теорема. Нехай \wp – незамкнений шлях в секвенційному дереві, \mathbf{H} – множина всіх відмічених формул секвенцій цього шляху. Тоді \mathbf{H} – модельна множина.

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм. Переходи згідно таких форм точно відповідають визначенню модельної множини. Кожна непримітивна формула шляху \wp рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно відповідної секвенційної форми. Всі секвенції шляху \wp незамкнені.

Отже, \mathbf{H} – модельна множина

Теорема (про контрмодель). Нехай \mathbf{H} – модельна множина, нехай $W = \text{nt}(\mathbf{H})$.

Тоді існують АС $A = (A, \mathbf{I})$ з $|A| = |W|$ та ін'єктивна $\delta \in {}^V A$ з $\text{im}(\delta) = W$ такі:

- 1) з умови $\vdash \Phi \in \mathbf{H}$ випливає $\Phi_A(\delta) = T$;
- 2) з умови $\neg \vdash \Phi \in \mathbf{H}$ випливає $\Phi_A(\delta) = F$.

Візьмемо деяку A таку, що $|A| = |W|$, та ін'єктивну $\delta \in {}^V A$ з $\text{im}(\delta) = W$.

Доведення – індукцією за складністю формули згідно визначення модельної множини.

Спочатку задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо $\vdash p \in H$, то $p_A(\delta) = T$; якщо $\neg \vdash p \in H$, то $p_A(\delta) = F$.

Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H$, то візьмемо $p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$

Якщо $\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H$, то візьмемо $p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = F$

Так задані значення базових предикатів продовжимо, враховуючи умови неістотності імен, за еквітонністю на відповідні $h \in {}^V A$.

Для всіх інших $d \in {}^V A$ значення $p_A(d)$ задаємо довільним чином, враховуючи еквітонність та обмеження стосовно неістотності:

$\forall d, h \in {}^V A$ таких, що $d \parallel \neg \mu(p) = h \parallel \neg \mu(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$.

Для атомарних та формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ твердження теореми впливають з визначення значень базових предикатів.

Доведемо крок індукції.

Нехай $\vdash \neg\Phi \in \mathbf{H}$. За визначенням \mathbf{H} маємо $\vdash \Phi \in \mathbf{H}$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta)=F$, звідки $(\neg\Phi)_A(\delta)=T$.

Нехай $\vdash \neg\Phi \in \mathbf{H}$. За визначенням \mathbf{H} маємо $\vdash \Phi \in \mathbf{H}$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta)=T$, звідки $(\neg\Phi)_A(\delta)=F$.

Нехай $\vdash \Phi \vee \Psi \in \mathbf{H}$. За визначенням \mathbf{H} маємо $\vdash \Phi \in \mathbf{H}$ або $\vdash \Psi \in \mathbf{H}$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta)=T$ або $\Psi_A(\delta)=T$, звідки $(\Phi \vee \Psi)_A(\delta)=T$.

Нехай $\vdash \Phi \vee \Psi \in \mathbf{H}$. За визначенням \mathbf{H} маємо $\vdash \Phi \in \mathbf{H}$ та $\vdash \Psi \in \mathbf{H}$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta)=F$ та $\Psi_A(\delta)=F$, звідки $(\Phi \vee \Psi)_A(\delta)=F$.

Нехай $\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$. За визначенням \mathbf{H} маємо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$. За припущенням індукції $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A)(\delta) = T$, звідки $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_A)(\delta) = T$.

Нехай $\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$. За визначенням \mathbf{H} маємо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \mathbf{H}$. За припущенням індукції $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A)(\delta) = F$, звідки $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_A)(\delta) = F$.

Нехай $\vdash \exists x \Phi \in H$. За визначенням H існує $y \in W$: $\vdash R_y^x(\Phi) \in H$.

За припущенням індукції $R_y^x(\Phi)_A(\delta) = T$, звідси

$\Phi_A(\delta \nabla x \sqcap \delta(y)) = T$. Але $\delta(y) \downarrow$ згідно $\delta \in {}^W A$ та $y \in W$, тому для $a = \delta(y)$ маємо $\Phi_A(\delta \nabla x \sqcap a) = T$, звідки $(\exists x \Phi)_A(\delta) = T$.

Нехай $\vdash \exists x \Phi \in H$. За визначенням H $\vdash R_y^x(\Phi) \in H \quad \forall y \in W$. За припущенням індукції $R_y^x(\Phi)_A(\delta) = F \quad \forall y \in W$. Звідси $\Phi_A(\delta \nabla x \sqcap \delta(y)) = F \quad \forall y \in W$. Згідно $\delta \in {}^W A$ маємо $\delta(y) \downarrow \quad \forall y \in W$. Але δ – бієкція $W \rightarrow A$, кожне $b \in A$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y \in W$. Отже, $\Phi_A(\delta \nabla x \sqcap b) = F \quad \forall b \in A$, звідки $(\exists x \Phi)_A(\delta) = F$.

Теорема повноти. *Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma \dashv \vdash \Delta$ вивідна.*

Прип. супротивне: $\Gamma \models \Delta$ та $\vdash \Gamma \dashv \vdash \Delta$ невивідна. Тоді секв. дерево δ для $\vdash \Gamma \dashv \vdash \Delta$ незамкнене \Rightarrow в δ існує незамкнений шлях \wp .

Нехай H – множина всіх відмічених формул шляху \wp . Така H – модельна множина. Звідси існують $AC \ A = (A, I)$ та $\delta \in {}^V A$ такі:

$\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\dashv \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$. Згідно з $\vdash \Gamma \dashv \vdash \Delta \subseteq H$ тоді $\Phi \in \Gamma \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\Phi \in \Delta \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$. Це суперечить $\Gamma \models \Delta$

Теорема компактності.

Суперечливість та несуперечливість множин формул

Теорема 1 (ПК_1). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді існують скінченні $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ та $\Delta_0 \subseteq \Delta$ такі, що $\Gamma_0 \models \Delta_0$.

$\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Sigma = \ulcorner \Gamma \urcorner \ulcorner \Delta \urcorner$ вивідна $\Rightarrow \Sigma$ має скінченне замкнене секв.дерево δ , але в кожній вершині δ доступні скінченна к-ть формул секвенції.

Нехай ${}^{nd}\Sigma$ – множина всіх формул Σ , недоступних у вершинах δ . При побудові δ використовуються лише формули *скінченної* $\Sigma_0 = \Sigma \setminus {}^{nd}\Sigma$.

Відкинемо з кожної вершини δ всі формули ${}^{nd}\Sigma \Rightarrow$ дістанемо дерево δ_0 з коренем $\Sigma_0 = \ulcorner \Gamma_0 \urcorner \ulcorner \Delta_0 \urcorner$, всі вершини якого – скінченні секвенції. Отже,

$\Sigma_0 = \ulcorner \Gamma_0 \urcorner \ulcorner \Delta_0 \urcorner$ вивідна $\Rightarrow \Gamma_0 \models \Delta_0$

Γ синтаксично несуперечлива, якщо $\forall \Phi \ulcorner \Gamma \urcorner (\Phi \& \neg \Phi)$ невивідна.

Γ семантично несуперечлива (сумісна), якщо існують $A=(A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі: $\Phi_A(d)=T \quad \forall \Phi \in \Gamma$.

Модель сумісності для Γ – АС $A=(A, I)$ така: $\exists d \in {}^V A: \Phi_A(d)=T \quad \forall \Phi \in \Gamma$.

Γ семантично несуперечлива $\Leftrightarrow \Gamma$ має модель сумісності.

Γ семантично несуперечлива $\Leftrightarrow \forall \Phi$ маємо $\Gamma \not\models \Phi \& \neg \Phi$

Теорема 2 (про існування моделі). *Нехай Γ синтакс. несуперечлива. Тоді Γ має зліченну або скінченну модель сумісності.*

Γ синт. несуперечлива $\Rightarrow \forall \Phi$ секвенція $\Sigma = \Gamma_{-|}(\Phi \& \neg \Phi)$ невивідна \Rightarrow секв. дерево для $\Gamma_{-|}(\Phi \& \neg \Phi)$ незамкнене \Rightarrow в ньому існує незамкнений шлях \wp . Нехай H – множина всіх формул секвенцій цього шляху $\Rightarrow H$ – модельна \Rightarrow існують АС $A = (A, I)$ із скінченною або зліченною A та $\delta \in {}^V A$ такі: $\Gamma_{-|} \Psi \in H \Rightarrow \Psi_A(\delta) = T$ та $\Gamma_{-|} \Psi \in H \Rightarrow \Psi_A(\delta) = F$. В силу $\Sigma \subseteq H$ це вірно і для формул з $\Sigma = \Gamma_{-|}(\Phi \& \neg \Phi) \Rightarrow \Psi_A(\delta) = T \forall \Psi \in \Gamma \Rightarrow A = (A, I)$ – модель сумісності для Γ

Наслідок. *Γ синтаксично несуп. $\Rightarrow \Gamma$ семантично несуп.*

Теорема 3. *Γ семантично несуп. $\Rightarrow \Gamma$ синтаксично несуп.*

Прип. супротивне: Γ семант. несуп. та Γ синт. суп. $\Rightarrow \Gamma \not\models \Psi \& \neg \Psi \quad \forall \Psi$ та $\Gamma_{-|}(\Phi \& \neg \Phi)$ вивідна для деякої $\Phi \Rightarrow \Gamma \models \Phi \& \neg \Phi$ – суперечність

Наслідок 1. *Γ синтаксично несуп. $\Leftrightarrow \Gamma$ семантично несуп.*

Надалі можна просто говорити про несуперечливість мн-ни формул Γ , не конкретизуючи, семантичну чи синтаксичну несуперечливість.

Наслідок 2. *Γ синтаксично несуп. $\Leftrightarrow \Gamma$ має модель сумісності.*

Теорема 4 (аналог теореми Левенгейма Сколема↓). Γ має модель сумісності $\Rightarrow \Gamma$ має зліченну або скінченну модель сумісності.

Γ має модель сумісності $\Rightarrow \Gamma$ семан. несуп. $\Rightarrow \Gamma$ синт. несуп. За теоремою 2 Γ має зліченну або скінченну модель сумісності

Теорема (ПК_2). Кожна скінченна $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ несуп. $\Rightarrow \Gamma$ несуп.

Супротивне: кожна скінченна $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ несуп. та Γ суп. Тоді $\forall \Phi \vdash_{\Gamma} (\Phi \& \neg \Phi)$ вивідна \Rightarrow вона має скінченне замкнене секв. дерево δ . В кожній вершині дерева доступні тільки скінченна кількість формул секвенції, тому при побудові δ використані формули деякої скінченної $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Дістаємо дерево δ_1 з коренем $\vdash_{\Gamma_1} (\Phi \& \neg \Phi)$, всі вершини якого – скінченні секвенції $\Rightarrow \vdash_{\Gamma_1} (\Phi \& \neg \Phi)$ вивідна \Rightarrow скінченна $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ суперечлива – отримали суперечність

Теорема (ПК_3). Кожна скінченна $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ має модель сумісності $\Rightarrow \Gamma$ має модель сумісності.

Кожна скінченна $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ має модель сумісності \Rightarrow кожна така Γ_0 несуп.

За ПК_2 Γ несуперечлива $\Rightarrow \Gamma$ має модель сумісності

Теорема (про взаємну суперечливість). *Нехай Γ_1 і Γ_2 несуп. та $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ суп. Тоді існують скінченні $\Gamma_{01} \subseteq \Gamma_1$ та $\Gamma_{02} \subseteq \Gamma_2$ такі, що $\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}$ суперечлива.*

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ суп. \Rightarrow існує скінченна суп. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (кожна скінченна $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ несуп. $\Rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ несуп.). В силу несуп. Γ_1 і Γ_2 неможливо $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$ і $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_2$. Отже, $\Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}$ для деяких скінченних непорожніх $\Gamma_{01} \subseteq \Gamma_1$ та $\Gamma_{02} \subseteq \Gamma_2$

Теорема (про взаємну несуперечливість). *Нехай Γ_1 і Γ_2 несуп. та для довільних $\Gamma_{01} \subseteq \Gamma_1$ і $\Gamma_{02} \subseteq \Gamma_2$ $\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}$ несуп. Тоді $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ несуперечлива.*

Супротивне: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ суп. Тоді існує скінченна суперечлива $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Така Γ_0 має вигляд $\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}$ для деяких скінченних $\Gamma_{01} \subseteq \Gamma_1$ та $\Gamma_{02} \subseteq \Gamma_2$

Інтерполяційна теорема

Це один із найважливіших результатів математичної логіки

Інтерполяційна теорема. Нехай секвенція $\neg \Psi \rightarrow \Xi$ має виведення. Тоді існує Φ сигнатури $\sigma(\Phi) \subseteq \sigma(\Psi) \cap \sigma(\Xi)$ така: $\neg \Psi \rightarrow \Phi$ та $\neg \Phi \rightarrow \Xi$ мають виведення.

Таку Φ називають інтерполяційною формулою, або інтерполянтом.

При $\sigma(\Psi) \cap \sigma(\Xi) = \emptyset$ твердження теореми може бути невірним:

Нехай Ψ та Ξ – це $\neg p \vee p$ та $\neg q \vee q$, де $p, q \in Ps$. Тоді інтерполянтом Φ буде всюди істинна формула, але при умові $\sigma(\Phi) \subseteq \sigma(\Psi) \cap \sigma(\Xi) = \emptyset$ такої Φ не існує, бо її просто немає з чого будувати.

Доводиться загальніше твердження (індукцією за довжиною виведення):

Теорема. Нехай $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2$ має виведення $\delta \Rightarrow$ існує формула Φ сигнатури $\sigma(\Phi) \subseteq \sigma(\Sigma_1) \cap \sigma(\Sigma_2)$ така, що за δ можна збудувати виведення δ_1 для $\neg \Phi, \Sigma_1$ та виведення δ_2 для $\neg \Phi, \Sigma_2$.

Виведемо звідси інтерполяційну теорему

$\neg \Psi \rightarrow \Xi$ має виведення $\Rightarrow \neg \Psi, \neg \Xi$ має виведення. Візьмемо як Σ_1 і Σ_2 секвенції $\neg \Psi$ і $\neg \Xi$. За теоремою існує Φ сигнатури $\sigma(\Phi) \subseteq \sigma(\Psi) \cap \sigma(\Xi)$: $\neg \Phi, \neg \Psi$ та $\neg \Phi, \neg \Xi$ мають виведення. Звідси $\neg \Psi \rightarrow \Phi$ та $\neg \Phi \rightarrow \Xi$ мають виведення

Теорема про визначність

Розглянемо співвідношення між двома різними уточненнями визначення одного поняття в термінах інших понять.

Одне уточнення – **семантичне**, або неявне. Його суть: поняття (ПС) q *неявно* визначається через поняття p_1, \dots, p_n в теорії (множині формул) Γ , якщо для кожних моделей істинності Γ , узгоджених у тому розумінні, що в них p_1, \dots, p_n інтерпретуються однаково, маємо однакові інтерпретації для q .

Друге – **синтаксичне**, або явне. Його суть: поняття q *явно* визначається в Γ через p_1, \dots, p_n , якщо таке визначення є логічним наслідком Γ .

Для класичної логіки еквівалентність явного та неявного визначення одного поняття в термінах інших – це теорема Бета про визначність.

Нехай $\pi \subseteq Ps$ – деяка множина предикатних символів мови.

Модель істинності для Γ – це $A=(A, I)$ така: $\forall d \in {}^V A \ \forall \Phi \in \Gamma \ \Phi_A(d) \cong T$.

Для логік ПЕП кожна модель істинності є моделлю сумісності. Для логік ЕП це невірно: розгл. АС, де кожний ПС інтерпретується як усюди невизначений предикат

Моделі істинності $A=(M, I_A)$ та $B=(M, I_B)$ мн-ни формул Γ π -тотожні, якщо $\forall p \in \pi$ маємо $p_A \cong p_B$.

ПС q семантично визначний через ПС $\{p_1, \dots, p_n\}$, де $q \notin \{p_1, \dots, p_n\}$, якщо $\forall \{p_1, \dots, p_n\}$ -тотожних *еквітонних* моделей істинності $A=(M, I_A)$ та $B=(M, I_B)$ множини формул Γ маємо $q_A \cong q_B$.

ПС q синтаксично визначний через ПС $\{p_1, \dots, p_n\}$ в множині формул Γ , якщо існує формула Φ із $\sigma(\Phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$ така, що $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$.

Теорема 1. Нехай ПС q синтаксично визначний через $\{p_1, \dots, p_n\}$ в множині формул Γ . Тоді q семантично визначний через $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Нехай Φ із $\sigma(\Phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$ така, що $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$. Прип. супротивне: q не є сем. визн. через $\{p_1, \dots, p_n\} \Rightarrow$ існують $\{p_1, \dots, p_n\}$ -тотожні еквітонні моделі іст-ті $A=(M, I_A)$ та $B=(M, I_B)$ для Γ та $d \in {}^V M$: $q_A(d) \neq q_B(d)$.

Візьмемо для A та B АС повнототальних розширень A' та B' , візьмемо $\delta \in M^V$ таке, що $\delta \supseteq d$. За еквітонністю $q_{A'}(\delta) = q_A(d)$ та $q_{B'}(\delta) = q_B(d)$, тому $q_{A'}(\delta) \neq q_{B'}(\delta)$. Але A' та B' – моделі істинності для Γ , тому $\forall \Psi \in \Gamma \quad \Psi_{A'}(\delta) = T$ та $\Psi_{B'}(\delta) = T$. Враховуючи $\Gamma \models q \leftrightarrow \Phi$, тоді $(q \leftrightarrow \Phi)_{A'}(\delta) = T$ та $(q \leftrightarrow \Phi)_{B'}(\delta) = T$, але згідно $q_{A'}(\delta) \neq q_{B'}(\delta)$ маємо $\Phi_{A'}(\delta) \neq \Phi_{B'}(\delta)$. Проте $\sigma(\Phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$, A' та B' – $\{p_1, \dots, p_n\}$ -тотожні, тому $\Phi_{A'}(\delta) = \Phi_{B'}(\delta)$. Отримали суперечність

Теорема 2. Нехай ПС q семантично визначний через $\{p_1, \dots, p_n\}$. Тоді q синтаксично визначний через $\{p_1, \dots, p_n\}$ в множині формул Γ .