ПЕРШОПОРЯДКОВІ ЧИСЛЕННЯ ГІЛЬБЕРТІВСЬКОГО ТИПУ НКЛ ПОВНОТОТАЛЬНИХ ЕКВІТОННИХ ПРЕДИКАТІВ

Будуються ЧНКЧ – числення НКЛ повнототальних еквітонних предикатів функціонально-екваційного рівня.

Для них справджуються синтаксичні варіанти відповідних семантичних тверджень, зокрема, теорема еквівалентності, теореми про нормальні форми. Формулюється і доводиться теорема дедукції .

Для ЧНКЧ справджуються теореми коректності й повноти.

Числення НКЛ ПЕП кванторно-екваційного рівня можна трактувати як прикладні ЧНКЧ, у яких до множини власних аксіом входять спеціальні аксіоми рефлексивності рівності та рівності для формул.

Для цих числень справджуються теореми коректності й повноти.

Будуються ФЕНКЧ – числення НКЛ повнототальних еквітонних предикатів функціонально-екваційного рівня. Для них справджуються синтаксичні варіанти відповідних семантичних тверджень (теорема еквівалентності, теореми про нормальні форми), теорема дедукції

Для ФЕНКЧ справджуються теореми коректності та повноти.

ЧНКЧ – це трійка $T = (L, \text{Ax}, \text{P})$, де L – мова логіки із заданою множиною формул Fr, $\text{Ax} \subseteq Fr$ – множина аксіом, Р –правил виведення.

Ах розбита на множини $\text{A}_{\text{лог}}$ логічних аксіом і $\text{A}_{\text{вл}}$ власних аксіом.

Множина $\text{A}_{\text{лог}}$ задається такими схемами аксіом:

AxПР) $\neg\Phi \vee \Phi$

Ax$\exists\exists$) $\exists x \exists y \Phi \to \exists y \exists x \Phi$

AxR$\exists x$) $R_{x_1,\ldots,x_n}^{v_1,\ldots,v_n}(\Phi) \to \exists v_1 \ldots \exists v_n \Phi$

AxR$\neg$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$

AxR$\vee$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$

AxRR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \square_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$

AxRT) $R_z^z(\Phi) \leftrightarrow \Phi$

AxN$\exists$) $\exists x \Phi \to \forall x \exists x \Phi$

AxR$\exists$) $R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \leftrightarrow R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi), \quad x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$

AxNR) $\exists z R_z^x(\Phi) \leftrightarrow R_z^x(\Phi), \quad x \neq z$

AxNP) $p \rightarrow \forall x\, p$

Записані для всіх $p \in Ps$, AxNP визначають множини $\mu(p)$.

Множина Р складається з відомих пропозиційних правил розширення, скорочення, асоціативності, перетину та кванторних правил:

П5) $\Phi \rightarrow \Psi,\ \Psi \rightarrow \forall x \Psi \mid\!- \exists x \Phi \rightarrow \Psi$

П6) $\Phi \rightarrow \forall y \Phi \mid\!- R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$

Теорема істинності (коректності). $T \mid\!- \Phi \Rightarrow T \models \Phi$.

Доводиться *теорема повноти* чистих неокласичних числень:

Теорема повноти. $T \models \Phi \Rightarrow T \mid\!- \Phi$.

Ідея доведення – моделювання виведення квазізамкненої нормальної Ψ в численні T шляхом побудови виведення аналогічної їй формули класичної логіки Ψ' у відповідній теорії першого порядку T_Φ та навпаки

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ НКЛ 1-ГО ПОРЯДКУ

Секвенційні числення – це формально-аксіоматичні системи, які формалізують відношення |= логічного наслідку для множин формул

Використовуємо модифіковану форму запису секвенцій.

Секвенції трактуємо як множини специфікованих формул

Кожна формула специфікована (відмічена) символом $_{|-}$ чи $_{-|}$.

$_{|-}\Phi$ – T-формула; $_{-|}\Phi$ – F-формула.

Секвенції позначаємо $_{|-}\mathbf{\Gamma}\,_{-|}\mathbf{\Delta}$.

Секвенційне числення будується так:

секвенція $_{|-}\mathbf{\Gamma}\,_{-|}\mathbf{\Delta}$ *вивідна* (має виведення) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

Секвенція $_{|-}\mathbf{\Gamma}\,_{-|}\mathbf{\Delta}$ *замкнена*, якщо $\mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{\Delta} \neq \varnothing$.

Замкнені секвенції грають роль аксіом:

якщо $_{|-}\mathbf{\Gamma}\,_{-|}\mathbf{\Delta}$ *замкнена, то* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

Справді, $\mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{\Delta} \neq \varnothing \Rightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

Секвенційні форми – синтаксичні аналоги семантичних властивостей відношення |=

Вони є правилами виведення секвенційних числень

Мають вигляд $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ або $\dfrac{\Sigma \quad Y}{\Omega}$

Виведення в секвенційних численнях – дерево, вершини якого секвенції.

Індуктивне визначення секвенційного дерева:

1) Секвенція **Σ** утворює тривіальне сек. дерево з єдиною вершиною **Σ**

2) Нехай **α** – сек. дерево з коренем **Σ**, **β** – сек. дерево з коренем **Y**,

$\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ та $\dfrac{\Sigma \quad Y}{\Omega}$ – секвенційні форми. Тоді $\begin{array}{c}\alpha\\ |\\ \Omega\end{array}$ та $\begin{array}{c}\alpha \quad \beta\\ \backslash /\\ \Omega\end{array}$ – секвенційні дерева з коренем **Ω**.

Секвенційне дерево *замкнене*: кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція **Σ** *вивідна*: існує замкнене сек. дерево з коренем **Σ**.

Таке замкнене дерево – *виведення* секвенції **Σ**.

Базові секвенційні форми НКЛ кванторного рівня

$$\vdash\neg \quad \frac{\dashv A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma} \qquad\qquad \dashv\neg \quad \frac{\vdash A, \Sigma}{\dashv \neg A, \Sigma}$$

$$\vdash\vee \quad \frac{\vdash A, \Sigma \qquad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma} \qquad\qquad \vdash\vee \quad \frac{\dashv A, \dashv B, \Sigma}{\dashv A \vee B, \Sigma}$$

$$\vdash RT \quad \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A), \Sigma} \qquad\qquad \dashv RT \quad \frac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A), \Sigma}$$

$$\vdash RR \quad \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \square_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma} \qquad\qquad \vdash RR \quad \frac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \square_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A), \Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$$

$$\vdash R\neg \quad \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma} \qquad\qquad \dashv R\neg \quad \frac{\dashv \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma}$$

$$\vdash R\vee \quad \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma} \qquad\qquad \dashv R\vee \quad \frac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma}$$

$$\vdash \Phi\mathrm{N} \quad \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A), \Sigma} \text{ при } y \in \mu(A) \qquad\qquad \dashv \Phi\mathrm{N} \quad \frac{\dashv R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\dashv R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A), \Sigma} \text{ при } y \in \mu(A)$$

$$\vdash \mathrm{R}\exists \quad \frac{\vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma} \qquad\qquad \dashv \mathrm{R}\exists \quad \frac{\dashv \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}$$

Для $\vdash \mathrm{R}\exists$ та $\dashv \mathrm{R}\exists$ умова: $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$

$$\dashv \mathrm{R}\exists\exists \quad \frac{\vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \square_z^y (A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma} \qquad\qquad \dashv \mathrm{R}\exists\exists \quad \frac{\dashv \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \square_z^y (A), \Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}$$

Для $\vdash \mathrm{R}\exists\exists$, $\dashv \mathrm{R}\exists\exists$ умови: $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, z тотально неістотне, $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A))$

При умові $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ використовуємо форми $\vdash\mathrm{R}\exists$ та $\dashv\mathrm{R}\exists$,

При умові $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$ використовуємо форми $\vdash\mathrm{R}\exists\exists$ та $\dashv\mathrm{R}\exists\exists$.

$\vdash\exists$ $\dfrac{\vdash R_y^x(A), \Sigma}{\vdash \exists x A, \Sigma}$ при y тотально неістотному та $y \notin nm(\mathbf{\Sigma}, A)$

$\dashv\exists$ $\dfrac{\dashv R_{z_1}^x(A), \ldots, \dashv R_{z_m}^x(A), \Sigma, \ \dashv \exists x A}{\dashv \exists x A, \Sigma}$

При застосуванні форми $\dashv\exists$ $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – це множина усіх імен множини доступних формул секвенції $\dashv \exists x A, \mathbf{\Sigma}$.

Секвенційне числення з цими базовими формами – *QZN-числення*

Теорема. *Нехай* $\dfrac{\vdash\Lambda \dashv \mathrm{K}}{\vdash\Gamma \dashv \Delta}$ та $\dfrac{\vdash\Lambda \dashv \mathrm{K} \quad \vdash\mathrm{X} \dashv \mathrm{Z}}{\vdash\Gamma \dashv \Delta}$ – *базові секв. форми, тоді*

1) *якщо* $\mathbf{\Lambda} \models \mathbf{K}$, *то* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$; *якщо* $\mathbf{\Lambda} \models \mathbf{K}$ *та* $\mathbf{X} \models \mathbf{Z}$, *то* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

2) *якщо* $\mathbf{\Gamma} \not\models \mathbf{\Delta}$, *то* $\mathbf{\Lambda} \not\models \mathbf{K}$; *якщо* $\mathbf{\Gamma} \not\models \mathbf{\Delta}$, *то* $\mathbf{\Lambda} \not\models \mathbf{K}$ *або* $\mathbf{X} \models \mathbf{Z}$.

Поетапна ***процедура побудови дерева*** для секвенції **Σ** аналогічна відповідній процедурі для числень класичних чистих логік. 1-го порядку.

На початку побудови дерева зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* тотально неістотних "нових" імен, які не зустрічаються в формулах секвенції **Σ**.

Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних формул.

На початку кожного етапу виконується крок доступу: до списку доступних формул додається по одній зі списків $_{\vdash}$-формул та $_{\dashv}$-формул.

На початку побудови дерева доступна лише пара перших формул списків.

Нехай виконано *k* етапів процедури. На етапі *k*+1 перевіряємо, чи буде кожен лист дерева замкненою секвенцією.

Якщо всі листи дерева замкнені, то процедура завершена позитивно, ми отримали замкнене секвенційне дерево.

Нехай існують незамкнені листи дерева.

Для кожного такого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ:

(1) Активізуємо всі доступні непримітивні формули ξ.

(2) По черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму.

Форми $_{\vdash}\mathrm{RT}$, $_{\dashv}\mathrm{RT}$, $_{\vdash}\mathrm{FN}$, $_{\dashv}\mathrm{FN}$ допоміжні: перед застосуванням однієї з форм $_{\vdash}\mathrm{RR}$, $_{\dashv}\mathrm{RR}$, $_{\vdash}\mathrm{R}\neg$, $_{\dashv}\mathrm{R}\neg$, $_{\vdash}\mathrm{R}\vee$, $_{\dashv}\mathrm{R}\vee$, $_{\vdash}\mathrm{R}\exists$, $_{\dashv}\mathrm{R}\exists$, $_{\vdash}\mathrm{R}\exists\exists$, $_{\dashv}\mathrm{R}\exists\exists$ виконуємо за можливості спрощення, застосовуючи належну кількість раз ці форми $_{\vdash}\mathrm{RT}$, $_{\dashv}\mathrm{RT}$, $_{\vdash}\mathrm{FN}$, $_{\dashv}\mathrm{FN}$.

Після застосування основної форми формула дезактивується.

Спочатку виконуємо всі $_{\vdash}\exists$-форми. При застосуванні $_{\vdash}\exists$ беремо y як перше незадіяне ім'я списку *TN*.

Після $\vdash\exists$ виконуємо $\mathrm{R}\exists\exists$-форми, при цьому $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi))$ беремо із задіяних імен списку *TN*, якщо це можливо, інакше z – перше незадіяне ім'я списку *TN*.

Потім до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну секвенційну форму $\vdash\neg$, $\dashv\neg$, $\vdash\vee$, $\dashv\vee$, $\vdash\mathrm{RR}$, $\dashv\mathrm{RR}$, $\vdash\mathrm{R}\neg$, $\dashv\mathrm{R}\neg$, $\vdash\mathrm{R}\vee$, $\dashv\mathrm{R}\vee$, $\vdash\mathrm{R}\exists$, $\dashv\mathrm{R}\exists$, $\dashv\exists$.

При застосуванні $\dashv\exists$ множина $\{z_1,\ldots, z_m\}$ складається з усіх імен доступних формул листа та його наступників.

Всі повтори формул в секвенції усуваємо.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) процедура завершена позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;

2) процедура завершена негативно або не завершується, тоді маємо незамкнене скінченне або нескінченне дерево. У цьому випадку в дереві існує хоча б один незамкнений шлях $\wp$, його вершини – незамкнені секвенції, бо при появі замкненої до неї незастосовна жодна секвенційна форма, і процес побудови для цього шляху обривається. Кожна із формул секвенції $\boldsymbol{\Sigma}$ зустрінеться на шляху $\wp$ і стане доступною.

Теорема коректності. *Нехай секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна. Тоді* $\Gamma\models\Delta$.

Для доведення повноти *QZN*-числень – метод модельних множин.

Множина $\boldsymbol{H}$ специфікованих формул із $W=nm(\boldsymbol{H})$ модельна, якщо:

HC)Для кожної примітивної Ф лише одна з $\vdash\Phi$ чи $\dashv\Phi$ може належати $\boldsymbol{H}$

HN) Якщо $\vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\mu(\Phi)$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\mu(\Phi)$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬) Якщо $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$.

H∨) Якщо $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$.

HT) Якщо $\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$

HRR) Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar v}_{\bar x} \circ R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar v}_{\bar x} \circ R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR¬) Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то $\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то $\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR∨) Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$.

HR∃) Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \notin \{\bar v, \bar x\}$, то $\vdash \exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \notin \{\bar v, \bar x\}$, то $\dashv \exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR∃∃) Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \{\bar v, \bar x\}$, то $\vdash \exists z R^{\bar v}_{\bar x} \circ R^{y}_{z}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \{\bar v, \bar x\}$, то $\dashv \exists z R^{\bar v}_{\bar x} \circ R^{y}_{z}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

Тут z тотально неістотне та $z \notin nm(R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi))$

H∃) Якщо $\vdash \exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$, то існує $y \in W$ таке, що $\vdash R^{x}_{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv \exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$, то для всіх $y \in W$ маємо $\dashv R^{x}_{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

Теорема. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях в секвенційному дереві,* $\boldsymbol{H}$ *– множина всіх відмічених формул секвенцій цього шляху. Тоді* $\boldsymbol{H}$ *– модельна множина.*

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм. Переходи згідно таких форм точно відповідають визначенню модельної множини. Кожна непримітивна формула шляху $\wp$ рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно відповідної секвенційної форми. Всі секвенції шляху $\wp$ незамкнені.

Отже, $\boldsymbol{H}$ − модельна множина

Теорема (про контрмодель). *Нехай* $\boldsymbol{H}$ *– модельна множина, нехай* $W=nm(\boldsymbol{H})$. *Тоді існують АС* $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$ *з* $|A|=|W|$ *та ін'єктивна* $\delta\in{}^{V}\!A$ *з* $im(\delta)=W$ *такі*:

1) *з умови* $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ *випливає* $\Phi_A(\delta)=T$;

2) *з умови* $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ *випливає* $\Phi_A(\delta)=F$.

Візьмемо деяку A таку, що $|A|=|W|$, та ін'єктивну $\delta\in{}^{V}\!A$ з $im(\delta)=W$.

Доведення – індукцією за складністю формули згідно визначення модельної множини.

Спочатку задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо $\vdash p \in H$, то $p_A(\delta)=T$; якщо $\dashv p \in H$, то $p_A(\delta)=F$.

Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H$, то візьмемо $p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$

Якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H$, то візьмемо $p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = F$

Так задані значення базових предикатів продовжимо, враховуючи умови неістотності імен, за еквітонністю на відповідні $h \in {}^V A$.

Для всіх інших $d \in {}^V A$ значення $p_A(d)$ задаємо довільним чином, враховуючи еквітонність та обмеження стосовно неістотності:

$\forall\, d, h \in {}^V A$ таких, що $d \| \text{-}\mu(p) = h \| \text{-}\mu(p)$, необхідно $p_A(d)=p_A(h)$.

Для атомарних та формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ твердження теореми випливають з визначення значень базових предикатів.

Доведемо крок індукції.

Нехай $\vdash\neg\Phi\in \boldsymbol{H}$. За визначенням $\boldsymbol{H}$ маємо $\dashv\Phi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta)=F$, звідки $(\neg\Phi)_A(\delta)=T$.

Нехай $\dashv\neg\Phi\in \boldsymbol{H}$. За визначенням $\boldsymbol{H}$ маємо $\vdash\Phi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta)=T$, звідки $(\neg\Phi)_A(\delta)=F$.

Нехай $\vdash\Phi\vee\Psi\in \boldsymbol{H}$. За визначенням $\boldsymbol{H}$ маємо $\vdash\Phi\in \boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta)=T$ або $\Psi_A(\delta)=T$, звідки $(\Phi\vee\Psi)_A(\delta)=T$.

Нехай $\dashv\Phi\vee\Psi\in \boldsymbol{H}$. За визначенням $\boldsymbol{H}$ маємо $\dashv\Phi\in \boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $\Phi_A(\delta)=F$ та $\Psi_A(\delta)=F$, звідки $(\Phi\vee\Psi)_A(\delta)=F$.

Нехай $\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in H$. За визначенням $\boldsymbol{H}$ маємо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in H$. За припущенням індукції $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A)(\delta)=T$, звідки $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_A)(\delta)=T$.

Нехай $\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in H$. За визначенням $\boldsymbol{H}$ маємо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in H$. За припущенням індукції $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A)(\delta)=F$, звідки $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_A)(\delta)=F$.

Нехай $\vdash\exists x\Phi\in \boldsymbol{H}$. За визначенням $\boldsymbol{H}$ існує $y\in W$: $\vdash R_y^x(\Phi)\in H$.

За припущенням індукції $R_y^x(\Phi)_A(\delta)=T$, звідси $\Phi_A(\delta\nabla x\mapsto\delta(y))=T$. Але $\delta(y)\downarrow$ згідно $\delta\in {}^W A$ та $y\in W$, тому для $a=\delta(y)$ маємо $\Phi_A(\delta\nabla x\mapsto a)=T$, звідки $(\exists x\Phi)_A(\delta)=T$.

Нехай $\dashv\exists x\Phi\in \boldsymbol{H}$. За визначенням $\boldsymbol{H}$ $\dashv R_y^x(\Phi)\in H$ $\forall y\in W$. За припущенням індукції $R_y^x(\Phi)_A(\delta)=F$ $\forall y\in W$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla x\mapsto\delta(y))=F$ $\forall y\in W$. Згідно $\delta\in {}^W A$ маємо $\delta(y)\downarrow$ $\forall y\in W$. Але δ – бієкція $W\to A$, кожне $b\in A$ має вигляд $b=\delta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\Phi_A(\delta\nabla x\mapsto b)=F$ $\forall b\in A$, звідки $(\exists x\Phi)_A(\delta)=F$.

Теорема повноти. *Нехай* $\boldsymbol{\Gamma}\models\boldsymbol{\Delta}$. *Тоді секвенція* $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ *вивідна.*

Прип. супротивне: $\boldsymbol{\Gamma}\models\boldsymbol{\Delta}$ та $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ невивідна. Тоді секв. дерево $\boldsymbol{\delta}$ для $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ незамкнене $\Rightarrow$ в $\boldsymbol{\delta}$ існує незамкнений шлях $\wp$.

Нехай $\boldsymbol{H}$ − множина всіх відмічених формул шляху $\wp$. Така $\boldsymbol{H}$ − модельна множина. Звідси існують AC $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$ та $\delta\in {}^V A$ такі:

$\vdash\Phi\in \boldsymbol{H}\Rightarrow\Phi_A(\delta)=T$ та $\dashv\Phi\in \boldsymbol{H}\Rightarrow\Phi_A(\delta)=F$. Згідно з $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}\subseteq \boldsymbol{H}$ тоді $\Phi\in\boldsymbol{\Gamma}\Rightarrow\Phi_A(\delta)=T$ та $\Phi\in\boldsymbol{\Delta}\Rightarrow\Phi_A(\delta)=F$. Це суперечить $\boldsymbol{\Gamma}\models\boldsymbol{\Delta}$

Теорема компактності. Суперечливість та несуперечливість множин формул

Теорема 1 (ПК_1). *Нехай* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$. *Тоді існують скінченні* $\mathbf{\Gamma_0} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ *та* $\mathbf{\Delta_0} \subseteq \mathbf{\Delta}$ *такі, що* $\mathbf{\Gamma_0} \models \mathbf{\Delta_0}$.

$\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Rightarrow \mathbf{\Sigma} = {}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\mathbf{\Delta}$ вивідна $\Rightarrow$ $\mathbf{\Sigma}$ має скінченне замкнене секв.дерево $\boldsymbol{\delta}$, але в кожній вершині $\boldsymbol{\delta}$ доступні скінченна к-ть формул секвенції.

Нехай ${}^{нд}\mathbf{\Sigma}$ − множина всіх формул $\mathbf{\Sigma}$, недоступних у вершинах $\boldsymbol{\delta}$. При побудові $\boldsymbol{\delta}$ використовуються лише формули *скінченної* $\mathbf{\Sigma_0} = \mathbf{\Sigma} \setminus {}^{нд}\mathbf{\Sigma}$. Відкинемо з кожної вершини $\boldsymbol{\delta}$ всі формули ${}^{нд}\mathbf{\Sigma} \Rightarrow$ дістанемо дерево $\boldsymbol{\delta_0}$ з коренем $\mathbf{\Sigma_0} = {}_{\vdash}\mathbf{\Gamma_0}_{\dashv}\mathbf{\Delta_0}$, всі вершини якого − скінченні секвенції. Отже, $\mathbf{\Sigma_0} = {}_{\vdash}\mathbf{\Gamma_0}_{\dashv}\mathbf{\Delta_0}$ вивідна $\Rightarrow \mathbf{\Gamma_0} \models \mathbf{\Delta_0}$

$\mathbf{\Gamma}$ *синтаксично несуперечлива*, якщо $\forall\ \Phi$ ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}(\Phi\&\neg\Phi)$ невивідна.

$\mathbf{\Gamma}$ семантично несуперечлива (сумісна), якщо існують $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ та $d \in {}^{V}\!A$ такі: $\Phi_A(d)=T\ \forall\ \Phi \in \mathbf{\Gamma}$.

Модель сумісності для $\mathbf{\Gamma}$ – АС $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ така: $\exists\ d \in {}^{V}\!A$: $\Phi_A(d)=T\ \forall \Phi \in \mathbf{\Gamma}$.

$\mathbf{\Gamma}$ семантично несуперечлива $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}$ має модель сумісності.

$\mathbf{\Gamma}$ семантично несуперечлива $\Leftrightarrow$ $\forall\ \Phi$ маємо $\mathbf{\Gamma} \not\models \Phi\&\neg\Phi$

Теорема 2 (про існування моделі)**.** *Нехай* **Г** *синтакс. несуперечлива. Тоді* **Г** *має зліченну або скінченну модель сумісності*.

Г синт. несуперечлива $\Rightarrow$ $\forall$ Φ секвенція $\mathbf{\Sigma} = {}_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}(\Phi\&\neg\Phi)$ невивідна $\Rightarrow$ секв. дерево для ${}_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}(\Phi\&\neg\Phi)$ незамкнене $\Rightarrow$ в ньому існує незамкнений шлях ℘. Нехай ***H*** − множина всіх формул секвенцій цього шляху $\Rightarrow$ ***H*** − модельна $\Rightarrow$ існують АС $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$ із скінченною або зліченною A та $\delta \in {}^{V}A$ такі: ${}_{|-}\Psi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Psi_A(\delta)=T$ та ${}_{-|}\Psi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Psi_A(\delta)=F$. В силу $\mathbf{\Sigma} \subseteq \boldsymbol{H}$ це вірно і для формул з $\mathbf{\Sigma} = {}_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}(\Phi\&\neg\Phi) \Rightarrow \Psi_A(\delta)=T$ $\forall$ $\Psi \in \mathbf{\Gamma} \Rightarrow A=(A, I)$ − модель сумісності для **Г**

Наслідок. **Г** *синтаксично несуп.* $\Rightarrow$ **Г** *семантично несуп.*

Теорема 3. **Г** *семантично несуп.* $\Rightarrow$ **Г** *синтаксично несуп.*

Прип. супротивне: **Г** семант. несуп. та **Г** синт. суп. $\Rightarrow$ **Г** $\not\models \Psi\&\neg\Psi$ $\forall$ Ψ та ${}_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}(\Phi\&\neg\Phi)$ вивідна для деякої Φ $\Rightarrow$ **Г** $\models \Phi\&\neg\Phi$ − суперечність

Наслідок 1. **Г** *синтаксично несуп.* $\Leftrightarrow$ **Г** *семантично несуп.*

Надалі можна просто говорити про несуперечливість мн-ни формул **Г**, не конкретизуючи, семантичну чи синтаксичну несуперечливість.

Наслідок 2. **Г** *синтаксично несуп.* $\Leftrightarrow$ **Г** *має модель сумісності*.

Теорема 4 (аналог теореми Левенгейма Сколема↓). Γ *має модель сумісності* $\Rightarrow$ Γ *має зліченну або скінченну модель сумісності*.

Γ має модель сумісності $\Rightarrow$ Γ семан. несуп. $\Rightarrow$ Γ синт. несуп. За теоремою 2 Γ має зліченну або скінченну модель сумісності

Теорема (ПК_2). *Кожна скінченна* $\mathbf{\Gamma_0} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ *несуп.* $\Rightarrow$ Γ *несуп.*

Супротивне: кожна скінченна $\mathbf{\Gamma_0} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ несуп. та Γ суп. Тоді $\forall$ Φ $_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}(\Phi\&\neg\Phi)$ вивідна $\Rightarrow$ вона має скінченне замкнене секв. дерево $\boldsymbol{\delta}$. В кожній вершині дерева доступні тільки скінченна кількість формул секвенції, тому при побудові $\boldsymbol{\delta}$ використані формули деякої скінченної $\mathbf{\Gamma_1} \subseteq \mathbf{\Gamma}$. Дістаємо дерево $\boldsymbol{\delta_1}$ з коренем $_{\vdash}\mathbf{\Gamma_1}_{\dashv}(\Phi\&\neg\Phi)$, всі вершини якого − скінченні секвенції $\Rightarrow$ $_{\vdash}\mathbf{\Gamma_1}_{\dashv}(\Phi\&\neg\Phi)$ вивідна $\Rightarrow$ скінченна $\mathbf{\Gamma_1} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ суперечлива – отримали суперечність

Теорема (ПК_3). *Кожна скінченна* $\mathbf{\Gamma_0} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ *має модель сумісності* $\Rightarrow$ Γ *має модель сумісності*.

Кожна скінченна $\mathbf{\Gamma_0} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ має модель сумісності $\Rightarrow$ кожна така $\mathbf{\Gamma_0}$ несуп. За ПК_2 $\mathbf{\Gamma}$ несуперечлива $\Rightarrow$ Γ має модель сумісності

Теорема (про взаємну суперечливість). *Нехай* $\mathbf{\Gamma_1}$ і $\mathbf{\Gamma_2}$ *несуп. та* $\mathbf{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ *суп. Тоді існують скінченні* $\mathbf{\Gamma_{01} \subseteq \Gamma_1}$ *та* $\mathbf{\Gamma_{02} \subseteq \Gamma_2}$ *такі, що* $\mathbf{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}}$ *суперечлива.*

$\mathbf{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ суп. $\Rightarrow$ існує скінченна суп. $\mathbf{\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ (кожна скінченна $\mathbf{\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ несуп. $\Rightarrow$ $\mathbf{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ несуп.). В силу несуп. $\mathbf{\Gamma_1}$ і $\mathbf{\Gamma_2}$ неможливо $\mathbf{\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1}$ і $\mathbf{\Gamma_0 \subseteq \Gamma_2}$. Отже, $\mathbf{\Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}}$ для деяких скінченних непорожніх $\mathbf{\Gamma_{01} \subseteq \Gamma_1}$ та $\mathbf{\Gamma_{02} \subseteq \Gamma_2}$

Теорема (про взаємну несуперечливість). *Нехай* $\mathbf{\Gamma_1}$ і $\mathbf{\Gamma_2}$ *несуп. та для довільних* $\mathbf{\Gamma_{01} \subseteq \Gamma_1}$ *і* $\mathbf{\Gamma_{02} \subseteq \Gamma_2}$ $\mathbf{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}}$ *несуп. Тоді* $\mathbf{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ *несуперечлива.*

Супротивне: $\mathbf{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ суп. Тоді існує скінченна суперечлива $\mathbf{\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2}$. Така $\mathbf{\Gamma_0}$ має вигляд $\mathbf{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}}$ для деяких скінченних $\mathbf{\Gamma_{01} \subseteq \Gamma_1}$ та $\mathbf{\Gamma_{02} \subseteq \Gamma_2}$

Інтерполяційна теорема

Це олин із найважливіших результатів математичної логіки

Інтерполяційна теорема. *Нехай секвенція* $_{\dashv}\Psi\to\Xi$ *має виведення. Тоді існує* Φ *сигнатури* $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(\Psi)\cap\sigma(\Xi)$ *така*: $_{\dashv}\Psi\to\Phi$ *та* $_{\dashv}\Phi\to\Xi$ *мають виведення.*

Таку Φ називають інтерполяційною формулою, або інтерполянтом.

При $\sigma(\Psi)\cap\sigma(\Xi)=\varnothing$ твердження теореми може бути невірним:

Нехай Ψ та Ξ – це $\neg p\vee p$ та $\neg q\vee q$, де $p, q\in Ps$. Тоді інтерполянтом Φ буде всюди істинна формула, але при умові $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(\Psi)\cap\sigma(\Xi)=\varnothing$ такої Φ не існує, бо її просто немає з чого будувати.

Доводиться загальніше твердження (індукцією за довжиною виведення):

Теорема. *Нехай* $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2}$ *має виведення* $\boldsymbol{\delta}\Rightarrow$ *існує формула* Φ *сигнатури* $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(\mathbf{\Sigma_1})\cap\sigma(\mathbf{\Sigma_2})$ *така, що за* $\boldsymbol{\delta}$ *можна збудувати виведення* $\boldsymbol{\delta_1}$ *для* $_{\dashv}\Phi, \mathbf{\Sigma_1}$ *та виведення* $\boldsymbol{\delta_2}$ *для* $_{\vdash}\Phi, \mathbf{\Sigma_2}$.

Виведемо звідси інтерполяційну теорему

$_{\dashv}\Psi\to\Xi$ має виведення $\Rightarrow$ $_{\vdash}\Psi, {}_{\dashv}\Xi$ має виведення. Візьмемо як $\mathbf{\Sigma_1}$ і $\mathbf{\Sigma_2}$ секвенції $_{\vdash}\Psi$ і $_{\dashv}\Xi$. За теоремою існує Φ сигнатури $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(\Psi)\cap\sigma(\Xi)$: $_{\dashv}\Phi, {}_{\vdash}\Psi$ та $_{\vdash}\Phi, {}_{\dashv}\Xi$ мають виведення. Звідси $_{\dashv}\Psi\to\Phi$ та $_{\dashv}\Phi\to\Xi$ мають виведення

Теореми про визначність

Розглянемо співвідношення між двома різними уточненнями визначення одного поняття в термінах інших понять.

Одне уточнення – семантичне, або неявне. Його суть: поняття (ПС) q *неявно* визначається через поняття $p_1,\ldots,p_n$ в теорії (множині формул) **Г**, якщо для кожних моделей істинності **Г**, узгоджених у тому розумінні, що в них $p_1,\ldots,p_n$ інтерпретуються однаково, маємо однакові інтерпретації для q.

Друге – синтаксичне, або явне. Його суть: поняття q *явно* визначається в **Г** через $p_1,\ldots,p_n$, якщо таке визначення є логічним наслідком **Г**.

Для класичної логіки еквівалентність явного та неявного визначення одного поняття в термінах інших – це теорема Бета про визначність.

Нехай $\pi \subseteq Ps$ – деяка множина предикатних символів мови.

Модель істинності для **Г** – це $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ така: $\forall d \in {}^{V}\!A\ \forall \Phi \in \mathbf{\Gamma}\ \ \Phi_A(d) \cong T$.

Для логік ПЕП кожна модель істинності є моделлю сумісності. Для логік ЕП це невірно: розгл. АС, де кожний ПС інтерпретується як усюди невизначений предикат

Моделі істинності $\boldsymbol{A}=(M,\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{A}})$ та $\boldsymbol{B}=(M,\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{B}})$ мн-ни формул **Г** π-*тотожні*, якщо $\forall\ p \in \pi$ маємо $p_{\boldsymbol{A}} \cong p_{\boldsymbol{B}}$.

ПС q *семантично визначний через ПС* $\{p_1,\ldots,p_n\}$, де $q\notin\{p_1,\ldots,p_n\}$, якщо $\forall$ $\{p_1,\ldots,p_n\}$-тотожних *еквітонних* моделей істинності $\boldsymbol{A}=(M,\boldsymbol{I_A})$ та $\boldsymbol{B}=(M,\boldsymbol{I_B})$ множини формул $\mathbf{\Gamma}$ маємо $q_{\boldsymbol{A}}\cong q_{\boldsymbol{B}}$.

ПС q *синтаксично визначний через ПС* $\{p_1,\ldots,p_n\}$ *в множині формул* $\mathbf{\Gamma}$, якщо існує формула Φ із $\sigma(\Phi)=\{p_1,\ldots,p_n\}$ така, що $\mathbf{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$.

Теорема 1. *Нехай ПС q синтаксично визначний через $\{p_1,\ldots,p_n\}$ в множині формул* $\mathbf{\Gamma}$. *Тоді q семантично визначний через* $\{p_1,\ldots,p_n\}$.

Нехай Φ із $\sigma(\Phi)=\{p_1,\ldots,p_n\}$ така, що $\mathbf{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$. Прип. супротивне: q не є сем. визн. через $\{p_1,\ldots,p_n\}$ $\Rightarrow$ існують $\{p_1,\ldots,p_n\}$-тотожні еквітонні моделі іст-ті $\boldsymbol{A}=(M,\boldsymbol{I_A})$ та $\boldsymbol{B}=(M,\boldsymbol{I_B})$ для $\mathbf{\Gamma}$ та $d\in{}^VM$: $q_{\boldsymbol{A}}(d)\neq q_{\boldsymbol{B}}(d)$.

Візьмемо для $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ АС повнототальних розширень $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$, візьмемо $\delta\in M^V$ таке, що $\delta\supseteq d$. За еквітонністю $q_{\boldsymbol{A'}}(\delta)=q_{\boldsymbol{A}}(d)$ та $q_{\boldsymbol{B'}}(\delta)=q_{\boldsymbol{B}}(d)$, тому $q_{\boldsymbol{A'}}(\delta)\neq q_{\boldsymbol{B'}}(\delta)$. Але $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$ – моделі істинності для $\mathbf{\Gamma}$, тому $\forall\ \Psi\in\mathbf{\Gamma}$ $\Psi_{\boldsymbol{A'}}(\delta)=T$ та $\Psi_{\boldsymbol{B'}}(\delta)=T$. Враховуючи $\mathbf{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$, тоді $(q\leftrightarrow\Phi)_{\boldsymbol{A'}}(\delta)=T$ та $(q\leftrightarrow\Phi)_{\boldsymbol{B'}}(\delta)=T$, але згідно $q_{\boldsymbol{A'}}(\delta)\neq q_{\boldsymbol{B'}}(\delta)$ маємо $\Phi_{\boldsymbol{A'}}(\delta)\neq\Phi_{\boldsymbol{B'}}(\delta)$. Проте $\sigma(\Phi)=\{p_1,\ldots,p_n\}$, $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$ – $\{p_1,\ldots,p_n\}$-тотожні, тому $\Phi_{\boldsymbol{A'}}(\delta)=\Phi_{\boldsymbol{B'}}(\delta)$. Отримали суперечність

Теорема 2. *Нехай ПС q семантично визначний через $\{p_1,\ldots,p_n\}$. Тоді q синтаксично визначний через $\{p_1,\ldots,p_n\}$ в множині формул* $\mathbf{\Gamma}$.