НЕТРАДИЦІЙНІ СЕМАНТИКИ ЛОГІК КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Характерним для програмування й моделювання є використання часткових необов′язково однозначних відображень над складними даними.

Тому постає проблема дослідження КНЛ із нетрадиційними семантиками.

Класична логіка – це логіка тотальних однозначних предикатів

Логіки часткових однозначних предикатів – із *неокласичною* семантикою.

Логіки тотальних неоднозначних предикатів – із *пересиченою* семантикою.

Логіки часткових неоднозначних предикатів – із *загальною* семантикою.

Центральним поняттям логіки є поняття логічного слідування.

Воно може бути формалізованим за допомогою відношень логічного наслідку.

Дослідимо відношення логічного наслідку для КНЛ

– часткових однозначних

– тотальних неоднозначних

– часткових неоднозначних квазіарних предикатів.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення еквівалентності, вони поширюються на множини формул.

В різних семантиках такі відношення мають різні властивості, а в класичній логіці усі вони збігаються.

Різновиди квазіарних предикатів

V-квазіарний предикат на A – це функція вигляду $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$

Область істинності та область хибності предиката P:

$\boldsymbol{T}(P) = P^{-1}(T) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in P(d)\}$;

$\boldsymbol{F}(P) = P^{-1}(F) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in P(d)\}$.

Якщо P однозначний, то $\boldsymbol{T}(P) \cap \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Якщо P тотальний, то $\boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{F}(P) = {}^{V}A$.

Предикат $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ назвемо:

– тотально істинним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = {}^{V}A$;

– тотально хибним, якщо $\boldsymbol{F}(P) = {}^{V}A$;

– тотожно істинним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = {}^{V}A$ і $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

– тотожно хибним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \varnothing$ і $\boldsymbol{F}(P) = {}^{V}A$;

– тотально насиченим, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{F}(P) = {}^{V}A$;

– неспростовним, або частково істинним, якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

– виконуваним, якщо $\boldsymbol{T}(P) \neq \varnothing$.

Предикат $P: D \to \{T, F\}$ *монотонний*, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \subseteq P(d')$.

Окремим випадком монотонності є еквітонність – збереження прийнятого значення при розширенні даних.

Предикат $P: D \to \{T, F\}$ *еквітонний*, якщо із $P(d) \neq \varnothing$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d') = P(d)$.

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

Традиційне визначення еквітонного предиката:

Однозначний предикат $P: D \to \{T, F\}$ еквітонний, якщо із $P(d)\downarrow$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Монотонність предиката означає, що прийняте ним значення зберігається при розширенні даних. Для однозначних часткових предикатів це може трактуватися як збереження "інформативності" предиката при збільшенні "інформативності" вхідних даних.

Для тотальних монотонних предикатів ситуація протилежна: при розширенні вхідних даних "інформативність" може тільки зменшуватися. Тому поняття монотонності малозмістовне для тотальних неоднозначних предикатів. Для них адекватним є дуальне поняття антитонності.

Предикат $P : D \to \{T, F\}$ *антитонний*, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \supseteq P(d')$.

Якщо P антитонний, то $P(\varnothing)$ складається з усіх значень, які предикат може приймати на D, тобто $P(\varnothing) = E_P$.

Для тотальних неоднозначних предикатів антитонність означає: "інформативність" предиката не зменшується при збільшенні "інформативності" вхідних даних.

В класі однозначних предикатів антитонними можуть бути лише майже константні предикати: $P(d) \cong T$ для всіх $d \in D$ або $P(d) \cong F$ для всіх $d \in D$.

В класі однозначних предикатів поняття антитонності малозмістовне.

Теорема 1. Композиції $\neg, \vee, \&, \to, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x, \forall x$ зберігають властивості еквітонності та антитонності.

Приклад. Розглянемо наступні предикати.

$$P_1(d)=\begin{cases}\{F\}, & \text{якщо } x\in asn(d)\\ \{T\}, & \text{якщо } x\notin asn(d)\end{cases}\qquad P_2(d)=\begin{cases}\{T\}, & \text{якщо } x\in asn(d)\\ \{F\}, & \text{якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_3(d)=\begin{cases}\{F\}, & \text{якщо } x\in asn(d)\\ \varnothing, & \text{якщо } x\notin asn(d).\end{cases}\qquad P_4(d)=\begin{cases}\{T,F\}, & \text{якщо } x\in asn(d)\\ \{T\}, & \text{якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_5(d)=\begin{cases}\{T\}, & \text{якщо } x\in asn(d)\\ \varnothing, & \text{якщо } x\notin asn(d).\end{cases}\qquad P_6(d)=\begin{cases}\{T,F\}, & \text{якщо } x\in asn(d)\\ \{F\}, & \text{якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_7(d)=\begin{cases}F, & \text{якщо } x\notin asn(d),\\ \varnothing, & \text{якщо } x\in asn(d).\end{cases}\qquad P_8(d)=\begin{cases}\{T,F\}, & \text{якщо } x\notin asn(d)\\ \{T\}, & \text{якщо } x\in asn(d)\end{cases}$$

$$P_9(d)=\begin{cases}\{T\}, & \text{якщо } x\notin asn(d)\\ \varnothing, & \text{якщо } x\in asn(d).\end{cases}\qquad P_{10}(d)=\begin{cases}\{T,F\}, & \text{якщо } x\notin asn(d)\\ \{F\}, & \text{якщо } x\in asn(d)\end{cases}$$

P_1 та P_2 тотальні однозначні немонотонні (нееквітонні) й неантитонні,

P_3 та P_5 монотонні (еквітонні) однозначні,

P_4 та P_6 монотонні тотальні неоднозначні,

P_7 та P_9 антитонні часткові однозначні,

P_8 та P_{10} антитонні тотальні неоднозначні.

Φ *неспростовна при інтерпретації на* моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\boldsymbol{A} \models \Phi$), якщо Φ_A – неспростовний (частково істинний) предикат.

Φ усюди (частково) істинна, або *неспростовна* (позн. $\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{A} \models \Phi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Φ *тотально істинна при інтерпретації на* $\boldsymbol{A}$ (позн. $\boldsymbol{A} \models\!\equiv \Phi$), якщо Φ_A – тотально істинний предикат.

Φ *тотально істинна* (позн. $\models\!\equiv \Phi$), якщо $\boldsymbol{A} \models\!\equiv \Phi$ $\forall$ моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Аналогічно даємо визначення тотожно істинної формули та виконуваної формули

Ім'я $x \in V$ строго неістотне для формули Φ:

x строго неістотне для Φ_A $\forall$ моделі мови $\boldsymbol{A}$

Для кожного $p \in Ps$ множину синтетично строго неістотних предметних імен задамо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps \rightarrow 2^V$,

Така функція продовжується до $\nu : Fr \rightarrow 2^V$.

Для семантичних моделей ЧКНЛ постулюється нескінченність множини $V_T = \bigcap_{p \in Ps} \nu(p)$ тотально строго неістотних імен.

Модель мови АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$: $\forall\ \Phi \in Ps$

$T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$

Тоді $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ дуальна до $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$.

$\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ – АС з частковими однозначними предикатами $\Rightarrow$ дуальна $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ – із тотальними неоднозначними предикатами, та навпаки.

Теорема. Нехай $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді $\forall\ \Phi \in Fr$:

1) $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$

2) Φ_A еквітонний $\Rightarrow$ Φ_B антитонний; Φ_A антитонний $\Rightarrow$ Φ_B еквітонний.

Наслідок. Φ_A неспростовний на АС $\boldsymbol{A}$ із частковими однозначними предикатами (неокласична семантика) $\Leftrightarrow$ Φ_B тотально істинний на дуальній АС $\boldsymbol{B}$ із тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика).

Таким чином, неокласична семантика та пересичена семантика дуальні.

Теорема. 1. Для неокласичної семантики множина тотально істинних формул порожня.

2. Для пересиченої семантики множина неспростовних формул порожня.

3. Для загальної семантики множини тотально істинних і неспростовних формул порожні.

Неокласична семантика. Беремо модель мови ***A*** таку: кожний ПС інтерпретуємо як всюди невизначений предикат, на такій ***A*** кожна формула теж проінтерпретується як всюди невизначений предикат.

Пересичена семантика. Беремо модель мови ***B*** таку: кожний ПС інтерпретуємо як тотально насичений предикат, на такій ***B*** кожна формула теж проінтерпретується як тотально насичений предикат.

Загальна семантика. Беремо модель мови ***A*** і дуальну модель мови ***B***.

Відношення логічного наслідку

Введемо 5 "природних" відношень логічного наслідку.

В різних семантиках вони мають різні властивості.

Задамо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови АС $\boldsymbol{A}$.

1) "Істиннісний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|=_T$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_T \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$.

2) "Хибнісний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|=_F$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_F \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

3) "Сильний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|=_{TF}$:

$$\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A) \text{ та } \boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A).$$

4) "Неспростовнісний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|=_{Cl}$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$.

5) "Насичений" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|=_{Cm}$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}(\Psi_A) = {}^V A$.

Відповідні відношення логічного наслідку: $|=_T, |=_F, |=_{TF}, |=_{Cl}, |=_{Cm}$.

Їх визначаємо за такою схемою:

$$\Phi |=_* \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_* \Psi \text{ для кожної моделі мови } \boldsymbol{A}.$$

Відношення слабких наслідків

Ψ – слабкий логічний наслідок Φ (позн. $\Phi \,||\!=\Psi$), якщо

$\forall$ моделі мови $\boldsymbol{A}$ маємо $\boldsymbol{A} \models \Phi \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A} \models \Psi$.

Ψ – слабкий тотальний наслідок Φ (позн. $\Phi \,||\!\equiv \Psi$), якщо

$\forall$ моделі мови $\boldsymbol{A}$ маємо $\boldsymbol{A} \,|\!\equiv \Phi \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A} \,|\!\equiv \Psi$.

Відношення $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$, $||\!=$, $||\!\equiv$ рефлексивні й транзитивні.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності. Такі відношення рефлексивні, транзитивні й симетричні.

Відношення еквівалентності в АС $\boldsymbol{A}$: ${}_A\!\sim_T$, ${}_A\!\sim_F$, ${}_A\!\sim_{TF}$, ${}_A\!\sim_{Cl}$, ${}_A\!\sim_{Cm}$

Відношення логічної еквівалентності: $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$

Визначаємо їх за такою схемою:

$\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}\!\sim_* \Psi$, якщо $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_* \Psi$ та $\Psi \;{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_* \Phi$;

$\Phi \sim_* \Psi$, якщо $\Phi \models_* \Psi$ та $\Psi \models_* \Phi$.

$\Phi \sim_{TF} \Psi$ означає, що Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат. Справді, для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$

$$\Phi \;{}_A\!\sim_{TF} \Psi \;\;\Leftrightarrow\;\; \boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A) \text{ та } \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \boldsymbol{F}(\Phi_A)$$

Теорема. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді:

1) $\Phi\ {}_A\!\models_T \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_B\!\models_F \Psi$ та $\Phi\ {}_A\!\models_F \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_B\!\models_T \Psi$;

2) $\Phi\ {}_A\!\models_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_B\!\models_{Cm} \Psi$ та $\Phi\ {}_A\!\models_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_B\!\models_{Cl} \Psi$.

Наслідок. У випадку загальної семантики $\Phi \models_T \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_F \Psi \Leftrightarrow \models_{TF} \Psi$.

В загальній семантиці кожна АС $\boldsymbol{B}$ є дуальною до деякої АС $\boldsymbol{A}$.

Теорема. Для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ маємо:

1) $\Phi\ {}_A\!\models_T \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}_A\!\models_F \neg\Phi$ та $\Phi\ {}_A\!\models_F \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}_A\!\models_T \neg\Phi$;

2) $\Phi\ {}_A\!\sim_T \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}_A\!\sim_F \neg\Phi$ та $\Phi\ {}_A\!\sim_F \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}_A\!\sim_T \neg\Phi$.

У випадку неокласичної семантики немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $|=_{Cm}$. Розглядаємо таку модель мови ***A***, на якій усі ПС інтерпретуються як усюди невизначені предикати, тоді й усі формули на ***A*** інтерпретуються як усюди невизначені предикати.

У випадку пересиченої семантики немає жодної пари, які перебувають у відношенні $|=_{Cl}$. Розглядаємо таку модель мови ***B***, на якій усі ПС інтерпретуються як тотально насичені предикати, тоді й усі формули на ***B*** інтерпретуються як тотально насичені предикати.

У випадку загальної семантики немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $|=_{Cl}$ чи у відношенні $|=_{Cm}$.

Загальна семантика. Маємо єдине природне змістовне відношення $|=_{TF}$.

Неокласична семантика. Можна розглядати відношення $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$.

Пересичена семантика. Можна розглядати відношення $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cm}$.

Поведінка введених відношень логічного наслідку вельми специфічна.

Теорема. У випадку неокласичної семантики маємо:

1) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \parallel\!\equiv \Psi$; $\Phi \parallel\!= \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$,

невірно $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \parallel\!= \Psi$, невірно $\Phi \parallel\!\equiv \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

1) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \models_{Cl} \Psi$, $\Phi \models_{Cl} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

2) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \models_{T} \Psi$, $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \not\models_{F} \Psi$;

3) $\Phi \not\models_{T} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\Phi \models_{F} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

4) $\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_{T} \Phi$ та невірно $\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_{F} \Phi$;

5) $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_{F} \Phi$ та невірно $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_{T} \Phi$.

6) $\Phi\&\neg\Phi \models_{TF} \Psi\vee\neg\Psi$; $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \models_{TF} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$.

Теорема. У випадку пересиченої семантики маємо:

1) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \parallel\!= \Psi$, $\Phi \parallel\!\equiv \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

невірно $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \parallel\!\equiv \Psi$; невірно $\Phi \parallel\!= \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

2) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \models_{Cm} \Psi$, $\Phi \models_{Cm} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

3) $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \not\models_{T} \Psi$, $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \models_{F} \Psi$;

4) $\Phi \models_{T} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\Phi \not\models_{F} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

5) $\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_{F} \Phi$ та невірно $\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_{T} \Phi$;

6) $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_{T} \Phi$ та невірно $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_{F} \Phi$.

7) $\Phi\&\neg\Phi \models_{TF} \Psi\vee\neg\Psi$; $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \models_{TF} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$.

Теорема. У випадку загальної семантики:

1) $\Phi \,\|\!= \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \,\|\!\equiv \Psi$;

2) $\Phi \,\&\, \neg\Phi \;|\!\neq_{TF}\; \Psi \vee \neg\Psi$;

$\Phi \,\&\, (\Phi \rightarrow \Psi) \;|\!\neq_{TF}\; \Psi \vee \Phi \& \neg\Psi$.

Невірними будуть такі співвідношення:

$\Phi \;{}_A|\!=_T\; \Psi \Rightarrow \neg\Psi \;{}_A|\!=_T\; \neg\Phi, \;\; \neg\Psi \;{}_A|\!=_T\; \neg\Phi \Rightarrow \Phi \;{}_A|\!=_T\; \Psi,$

$\Phi \;{}_A|\!=_F\; \Psi \Rightarrow \neg\Psi \;{}_A|\!=_F\; \neg\Phi, \;\; \neg\Psi \;{}_A|\!=_F\; \neg\Phi \Rightarrow \Phi \;{}_A|\!=_F\; \Psi.$

$\Phi \;{}_A\!\sim_T\; \Psi \Rightarrow \neg\Psi \;{}_A\!\sim_T\; \neg\Phi, \;\; \neg\Psi \;{}_A\!\sim_T\; \neg\Phi \Rightarrow \Phi \;{}_A\!\sim_T\; \Psi,$

$\Phi \;{}_A\!\sim_F\; \Psi \Rightarrow \neg\Psi \;{}_A\!\sim_F\; \neg\Phi, \;\; \neg\Psi \;{}_A\!\sim_F\; \neg\Phi \Rightarrow \Phi \;{}_A\!\sim_F\; \Psi.$

Таким чином:

– для $|\!=_T$ та $|\!=_F$ закон контрапозиції невірний,

– для $\sim_T$ та $\sim_F$ не можна знімати заперечення в обох частинах еквівалентності.

Семантичні властивості логіки квазіарних предикатів

Використовуючи $\sim_{TF}$, можна описати властивості пропозиційних композицій та властивості, пов'язані з композицією реномінації й пропозиційними композиціями.

Наведемо для прикладу закони де Моргана:

$$\neg(P \vee Q) \sim_{TF} \neg P \& \neg Q; \;\; \neg(P \& Q) \sim_{TF} \neg P \vee \neg Q.$$

Приклад. Існують АС $\boldsymbol{A}$ та формула Φ:

$$\Phi \;{}_A\!\models_{TF} \forall x \Phi \text{ та } \exists x \Phi \;{}_A\!\not\models_{Cl} \Phi, \;\; \exists x \Phi \;{}_A\!\not\models_{Cm} \Phi.$$

Нехай Φ – це формула $\forall x\, p \to p$ для ПС p. Інтерпретуємо p на АС $\boldsymbol{A}$ так:

$$p_A(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } x \in asn(d); \\ F, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

Маємо $\varnothing \subset \boldsymbol{T}(p_A) \subset {}^V\!A$, $\varnothing \subset \boldsymbol{F}(p_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{T}(\forall x\, p_A) = {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(\forall x\, p_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{T}(\exists x(\forall x\, p \to p)_A) = {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(\exists x(\forall x\, p \to p)_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{T}(\forall x(\forall x\, p \to p)_A) = {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(\forall x(\forall x\, p \to p)_A) = \varnothing$, $\varnothing \subset \boldsymbol{T}((\forall x\, p \to p)_A) \subset {}^V\!A$, $\varnothing \subset \boldsymbol{F}((\forall x\, p \to p)_A) \subset {}^V\!A$.

Звідси $\Phi \;{}_A\!\models_{TF} \forall x \Phi$, $\exists x \Phi \;{}_A\!\not\models_{Cl} \Phi$, $\exists x \Phi \;{}_A\!\not\models_{Cm} \Phi$.

Основні властивості, пов'язані з композиціями квантифікації.

Q1) $\exists x \exists y \Phi \sim_{TF} \exists y \exists x \Phi$ та $\forall x \forall y \Phi \sim_{TF} \forall y \forall x \Phi$.

Q2) $\neg \forall x \Phi \sim_{TF} \exists x \neg \Phi$ та $\neg \exists x \Phi \sim_{TF} \forall x \neg \Phi$.

Q3) $\exists x \Phi \sim_{TF} \forall x \exists x \Phi$, $\exists x \Phi \sim_{TF} \exists x \exists x \Phi$;

$\forall x \Phi \sim_{TF} \forall x \forall x \Phi$, $\forall x \Phi \sim_{TF} \exists x \forall x \Phi$.

Q4) $\exists x \Phi \vee \exists x \Psi \sim_{TF} \exists x(\Phi \vee \Psi)$ та $\forall x \Phi \& \forall x \Psi \sim_{TF} \forall x(\Phi \& \Psi)$.

Q5) $\exists x(\Phi \& \Psi) |=_{TF} \exists x \Phi \& \exists x \Psi$ та $\forall x \Phi \vee \forall x \Psi |=_{TF} \forall x(\Phi \vee \Psi)$.

Q6) $\exists y \forall x \Phi |=_{TF} \forall x \exists y \Phi$; водночас $\forall x \exists y \Phi | \neq_{*} \exists y \forall x \Phi$.

Q7) $\forall x \Phi |=_{*} \exists x \Phi$; водночас $\forall x \Phi | \neq_{*} \Phi$, $\Phi | \neq_{*} \forall x \Phi$, $\Phi | \neq_{*} \exists x \Phi$.

Тут * – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Q8) $\Phi \| = \exists x \Phi$, $\Phi \| = \forall x \Phi$, $\forall x \Phi \| = \exists x \Phi$ та $\Phi \| \equiv \exists x \Phi$, $\Phi \| \equiv \forall x \Phi$, $\forall x \Phi \| \equiv \exists x \Phi$.

Для логік часткових однозначних предикатів додаємо властивості:

Q9P) $|= \forall x\,(\forall x\Phi\rightarrow\Phi)$ та $|= \exists x\,(\forall x\Phi\rightarrow\Phi)$;

$|= \forall x\,(\Phi\rightarrow\exists x\Phi)$ та $|= \exists x\,(\Phi\rightarrow\exists x\Phi)$;

Q10P) не завжди вірні $|= \Phi\rightarrow\exists x\Phi$, $|= \forall x\Phi\rightarrow\Phi$, $\forall x\Phi\ ||= \Phi$;

Q11P) для деяких формул Φ можливо: $|= \Phi\rightarrow\forall x\Phi$ та невірно $|= \exists x\Phi\rightarrow\Phi$.

Для логік тотальних неоднозначних предикатів додаємо властивості:

Q9) $|\equiv \forall x\,(\forall x\Phi\rightarrow\Phi)$ та $|\equiv \exists x\,(\forall x\Phi\rightarrow\Phi)$;

$|\equiv \forall x\,(\Phi\rightarrow\exists x\Phi)$ та $|\equiv \exists x\,(\Phi\rightarrow\exists x\Phi)$;

Q10T) не завжди вірні $|\equiv \Phi\rightarrow\exists x\Phi$, $|\equiv \forall x\Phi\rightarrow\Phi$, $\forall x\Phi\ ||\equiv \Phi$;

Q11T) для деяких формул Φ можливо:

$|\equiv \Phi\rightarrow\forall x\Phi$ та невірно $|\equiv \exists x\Phi\rightarrow\Phi$.

Теорема. 1) Для логік еквітонних предикатів

$R_z^x(\Phi)\ {}_A\models_{Cl} \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi\ {}_A\models_{Cl} R_z^x(\Phi)$;

2) для логік антитонних предикатів

$R_z^x(\Phi)\ {}_A\models_{Cm} \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi\ {}_A\models_{Cm} R_z^x(\Phi)$;

3) для логік еквітонних предикатів

$R_z^x(\Phi)\ {}_A\models_{T} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A\models_{T} R_z^x(\Phi)$ та $\forall x\Phi \Vert\!= R_z^x(\Phi)$,

але вони не завжди вірні для логік антитонних предикатів;

4) для логік антитонних предикатів

$R_z^x(\Phi)\ {}_A\models_{F} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A\models_{F} R_z^x(\Phi)$ та $\forall x\Phi \Vert\!\equiv R_z^x(\Phi)$,

але вони не завжди вірні для логік еквітонних предикатів;

5) $R_z^x(\Phi)\ {}_A\models_{TF} \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi\ {}_A\models_{TF} R_z^x(\Phi)$ не завжди вірні для логік еквітонних, так і для логік антитонних предикатів.

Для відношень $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$, $\sim_{TF}$ справджується теорема семантичної еквівалентності (тут * – одне з *Cl*, *Cm*, *TF*).

Теорема. Нехай формула Ф' отримана з Ф заміною деяких входжень формул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$ відповідно.

Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1, ..., \Phi_n \sim_* \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Для відношень $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема невірна.

Справді, можливі ситуації:

– вірно $\Xi \sim_T \Phi$ та невірно $\neg\Xi \sim_T \neg\Phi$, адже $\neg\Xi \sim_T \neg\Phi \Leftrightarrow \Xi \sim_F \Phi$;

– вірно $\Xi \sim_F \Phi$ та невірно $\neg\Xi \sim_F \neg\Phi$.

Співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку у відповідних семантиках

1. Неокласична семантика:

$\models_{TF} \subset \models_{T}$, $\models_{TF} \subset \models_{F}$, $\models_{T} \subset \models_{Cl}$, $\models_{F} \subset \models_{Cl}$;

$\models_{t} \subset \models_{Cl}$, $\models_{F} \subset \|\!=$, $\models_{T} \subset \|\!\equiv$; $\models_{Cm} = \varnothing$;

$\models_{t} \not\subset \models_{T}$, $\models_{t} \not\subset \models_{F}$, $\models_{TF} \not\subset \models_{t}$;

$\models_{T} \not\subset \|\!=$, $\models_{F} \not\subset \|\!\equiv$, $\|\!= \not\subset \models_{Cl}$, $\|\!\equiv \not\subset \models_{Cl}$.

2. Пересичена семантика:

$\models_{TF} \subset \models_{T}$, $\models_{TF} \subset \models_{F}$, $\models_{T} \subset \models_{Cm}$, $\models_{F} \subset \models_{Cm}$;

$\models_{t} \subset \models_{Cm}$, $\models_{F} \subset \|\!=$, $\models_{T} \subset \|\!\equiv$; $\models_{Cl} = \varnothing$;

$\models_{t} \not\subset \models_{T}$, $\models_{t} \not\subset \models_{F}$, $\models_{TF} \not\subset \models_{t}$;

$\models_{T} \not\subset \|\!=$, $\models_{F} \not\subset \|\!\equiv$, $\|\!= \not\subset \models_{Cm}$, $\|\!\equiv \not\subset \models_{Cm}$.

3. Загальна семантика:

$\models_{TF} = \models_{T} = \models_{F}$; $\models_{t} \not\subset \models_{TF}$, $\models_{TF} \not\subset \models_{t}$;

$\models_{TF} \subset \|\!\equiv = \|\!=$; $\models_{Cl} = \varnothing$, $\models_{Cm} = \varnothing$.

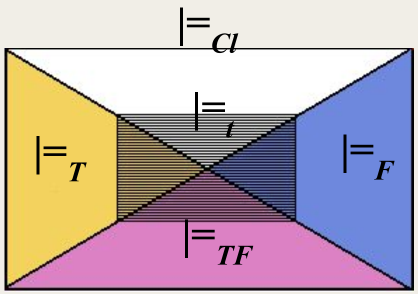
4. Загальна семантика еквітонних чи загальна семантика антитонних:

$\models_{TF} \subset \models_{T}$, $\models_{TF} \subset \models_{F}$; $\models_{t} \not\subset \models_{TF}$, $\models_{TF} \not\subset \models_{t}$;

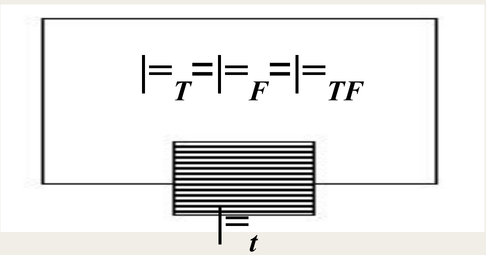
$\models_{T} \subset \|\!\equiv$, $\models_{F} \subset \|\!=$; $\models_{Cl} = \varnothing$, $\models_{Cm} = \varnothing$.

Співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку

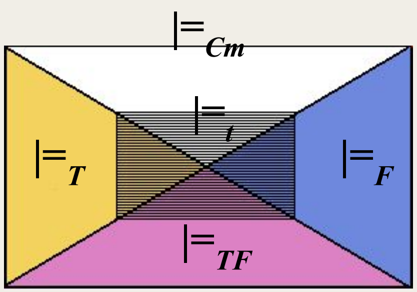
1. Неокласична семантика:



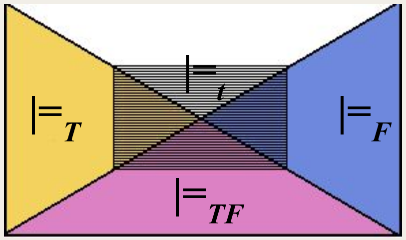
3. Загальна семантика:



2. Пересичена семантика:



4. Загальна семантика еквітонних чи антитонних предикатів:



Відношення логічного наслідку для множин формул

Спочатку задамо відношення наслідку для множин формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови АС $\boldsymbol{A}$.

Нехай $\mathbf{\Gamma} \subseteq Fr$ та $\mathbf{\Delta} \subseteq Fr$.

$\mathbf{\Gamma}\ {}_{A}|\!=_{Cl} \mathbf{\Delta}$, якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$

$\mathbf{\Gamma}\ {}_{A}|\!=_{Cm} \mathbf{\Delta}$, якщо $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A) = V_A$

$\mathbf{\Gamma}\ {}_{A}|\!=_{T} \mathbf{\Delta}$, якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$

$\mathbf{\Gamma}\ {}_{A}|\!=_{F} \mathbf{\Delta}$, якщо $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$

$\mathbf{\Gamma}\ {}_{A}|\!=_{TF} \mathbf{\Delta}$, якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$ та $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$

Відношення логічного наслідку для множин формул $|\!=_{T}$, $|\!=_{F}$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ визначаємо за такою схемою:

$\mathbf{\Gamma}\ |\!=_{*} \mathbf{\Delta}$, якщо $\mathbf{\Gamma}\ {}_{A}|\!=_{*} \mathbf{\Delta}$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Відношення $|\!=_{T}$, $|\!=_{F}$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ рефлексивні, але не транзитивні.

Теорема. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді

1) $\boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{B}}|\!=_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{B}}|\!=_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta}$;

2) $\boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cl} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{B}}|\!=_{\boldsymbol{Cm}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{\boldsymbol{Cm}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{B}}|\!=_{\boldsymbol{Cl}} \boldsymbol{\Delta}$.

Наслідок. У випадку загальної семантики

$$\boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma}\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}.$$

У випадку загальної семантики природно розглядати лише $|\!=_{\boldsymbol{TF}}$.

Для неокласичної семантики можна розглядати $|\!=_{\boldsymbol{T}}$, $|\!=_{\boldsymbol{F}}$, $|\!=_{\boldsymbol{TF}}$, $|\!=_{\boldsymbol{Cl}}$;

Для пересиченої семантики можна розглядати $|\!=_{\boldsymbol{T}}$, $|\!=_{\boldsymbol{F}}$, $|\!=_{\boldsymbol{TF}}$, $|\!=_{\boldsymbol{Cm}}$.

Теорема (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$. Тоді:

$\Phi, \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{*} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \Psi, \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{*} \boldsymbol{\Delta}$ та $\boldsymbol{\Gamma} |\!=_{*} \boldsymbol{\Delta}, \Phi \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{*} \boldsymbol{\Delta}, \Psi$

Замість $\sim_{TF}$ тут можна брати $\sim_{Cl}$ чи $\sim_{Cm}$.

Тоді $|\!=_{*}$ буде відповідно лише відношенням $|\!=_{\boldsymbol{Cl}}$ чи $|\!=_{\boldsymbol{Cm}}$.

Отримуємо ще дві різновидності теореми заміни еквівалентних

– для логіки часткових однозначних предикатів(із $|\!=_{\boldsymbol{Cl}}$);

– для логіки тотальних неоднозначних предикатів (із $|\!=_{\boldsymbol{Cm}}$).

Основні властивості відношення |=

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models \Delta$.

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$.

$\neg\neg$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$.

$\vee$) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee$) $\neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\Psi$.

Для $\models_{Cl}$ (неокласична семантика) та $\models_{Cm}$ (пересичена семантика):

$\neg$) $\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\Gamma \models \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

RT)

$$R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \quad \Leftrightarrow \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta;$$

$$\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi).$$

ΦU)

$$R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \quad \Leftrightarrow \quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \qquad y \in$$

$$\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \qquad y \in$$

RR) $R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi),\Gamma \models \Delta;$

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi).$

R¬) $R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma \models \Delta;$

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi).$

R∨) $R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi),\Gamma \models \Delta;$

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi).$

R∃R) $R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta;$

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$

Зокрема, $R^{x}_{y}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \exists x\Phi,\Gamma \models \Delta;$

$\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi.$

R∃) $R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma \models \Delta,$ ÿêù î $y \notin \{\bar v, \bar x\}$

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, \exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),$ ÿêù î $y \notin \{\bar v, \bar x\}$

R∃∃) $\Gamma, R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma, \exists z R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{y}_{z}(\Phi) \models \Delta,$ ÿêù î $y \notin \{\bar v, \bar x\},\ z \notin nm(R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi)),\ z \in V_T$

$\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, \exists z R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{y}_{z}(\Phi),$ ÿêù î $y \notin \{\bar v, \bar x\},\ z \notin nm(R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi)),\ z \in V_T$

На відміну від $|=_{Cl}$ та $|=_{Cm}$, для $|=_{T}$, $|=_{F}$ та $|=_{TF}$ не можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки, тому наведені властивості реномінації формулюємо і для зовнішнього заперечення:

¬RT) $\neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi),\Gamma \,|\!=\Delta \;\Leftrightarrow\; \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma \,|\!=\Delta;$

$\Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi);$

¬ΦU) $\neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi),\Gamma \,|\!=\Delta \;\Leftrightarrow\; \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma \,|\!=\Delta, \qquad y \in$

$\Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \qquad y \in$

¬RR) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)),\Gamma \,|\!=\Delta \;\Leftrightarrow\; \neg R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi),\Gamma \,|\!=\Delta;$

$\Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi);$

¬R¬) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi),\Gamma \,|\!=\Delta \;\Leftrightarrow\; R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\Gamma \,|\!=\Delta;$

$\Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!= \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi);$

¬R∨) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi),\Gamma \,|\!=\Delta \;\Leftrightarrow\; \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\; \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi),\Gamma \,|\!=\Delta;$

$\Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!= \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi) \quad = \quad \neg R^{\bar v}_{\bar x}$

¬R ∃ R) $\neg R^{\overline{u},x}_{\overline{v},y}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg R^{\overline{u}}_{\overline{v}}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta,$

$$\Gamma \models \Delta,\neg R^{\overline{u},x}_{\overline{v},y}(\exists x\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta,\neg R^{\overline{u}}_{\overline{v}}(\exists x\Phi)$$

Зокрема, $\neg R^{x}_{y}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg\exists x\Phi,\Gamma \models \Delta,$

$$\Gamma \models \Delta,\neg R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta,\neg\exists x\Phi.$$

¬R ∃)

$$\neg R^{\overline{v}}_{\overline{x}}(\exists y\Phi),\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg\exists y R^{\overline{v}}_{\overline{x}}(\Phi),\Gamma \models \Delta, \text{ ÿêù î } y \notin \{\overline{v},\overline{x}\}$$

$$\Gamma \models \Delta,\neg R^{\overline{v}}_{\overline{x}}(\exists y\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta,\neg\exists y R^{\overline{v}}_{\overline{x}}(\Phi), \text{ ÿêù î } y \notin \{\overline{v},\overline{x}\}$$

¬R ∃ ∃)

$$\Gamma,\neg R^{\overline{v}}_{\overline{x}}(\exists y\Phi) \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma,\neg\exists z R^{\overline{v}}_{\overline{x}} \square^{y}_{z}(\Phi) \models \Delta, \text{ ÿêù î } y \notin \{\overline{v},\overline{x}\},\ z \notin nm(R^{\overline{v}}_{\overline{x}}(\exists y\Phi)),\ z \in V_T$$

$$\Gamma \models \Delta,\neg R^{\overline{v}}_{\overline{x}}(\exists y\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta,\neg\exists z R^{\overline{v}}_{\overline{x}} \square^{y}_{z}(\Phi), \text{ ÿêù î } y \notin \{\overline{v},\overline{x}\},\ z \notin nm(R^{\overline{v}}_{\overline{x}}(\exists y\Phi)),\ z \in V_T$$

Розширення мови індикаторами наявності значення для змінних

Предикати **ε***z* – індикатори наявності в даному $d \in {}^{V}\!A$ значення для предметного імені $z \in V$ – визначаємо так:

$$\varepsilon z(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } d(z)\uparrow, \\ F, \text{якщо } d(z)\downarrow \end{cases}$$

Теорема. Справджуються наступні співвідношення:

$$\boldsymbol{T}(R^{\bar u, x}_{\bar v, y}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{T}(R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xP));$$

$$\boldsymbol{F}(R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar u, x}_{\bar v, y}(P))$$

Як окремі випадки отримуємо:

$$\boldsymbol{T}(R^{x}_{y}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP); \quad \boldsymbol{F}(R^{x}_{y}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{F}(\forall xP)$$

$$\boldsymbol{F}(\exists xP) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{x}_{y}(P)); \quad \boldsymbol{T}(\forall xP) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{T}(R^{x}_{y}(P))$$

Водночас невірними є такі співвідношення:

$$\boldsymbol{T}(R^{x}_{y}(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP); \quad \boldsymbol{F}(R^{x}_{y}(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\forall xP)$$

$$\boldsymbol{F}(\exists xP) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{x}_{y}(P)); \quad \boldsymbol{T}(\forall xP) \subseteq \boldsymbol{T}(R^{x}_{y}(P))$$

Властивості, пов'язані з елімінацією кванторів (використовують εx):

$\exists R\varepsilon_{\vdash}$) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$

за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z \in V_T$, $z \notin nm(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$

$\exists\varepsilon_{\vdash}$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; R_z^x(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$

за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$.

$\exists Rv_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y$ (при $x \notin \bar{u}$)

$\exists v_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \varepsilon y$.

Допоміжні властивості ε-розподілу:

εd) $\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \varepsilon y, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \varepsilon y$.

εv) $\Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Sigma)$.

Для $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$ властивості елімінації дублюються для зовнішнього $\neg$:

$\neg\exists R\varepsilon_{|-}$) $\Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$

за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z \in V_T$, $z \notin nm(\Sigma, R^{\bar{u}}_{\bar{v}} \exists x\Phi)$

$\neg\exists\varepsilon_{|-}$) $\Gamma \models \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R^{x}_{z}(\Phi), \varepsilon z$

за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta}, \exists x\Phi)$.

$\neg\exists Rv_{-|}$) $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow \neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon y$ $(x \notin \{\bar{u}\})$

$\neg\exists v_{-|}$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow \neg R^{x}_{y}(\Phi), \neg\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta, \varepsilon y$.

Наведені вище властивості відношень $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, пов’язані з квантором $\exists x$, можна переформулювати для квантора $\forall x$.