

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК ЧАСТКОВИХ ТА НЕОДНОЗНАЧНИХ ПРЕДИКАТІВ

Розробка систем пошуку виведень належить до найважливіших завдань математичної логіки.

Ефективним апаратом побудови виведень є секвенційні числення.

Різноманітність семантик та відношень логічного наслідку в КНЛ індукує побудову для них низки різновидностей секвенційних числень.

Ми розглянули такі числення, побудовані для традиційного відношення \models_{Cl} ЧКНЛ еквітонних квазіарних предикатів

Розглянемо секвенційні числення, які формалізують відношення

$\models_{Cl}, \models_{Cm}, \models_T, \models_F, \models_{TF}$, для ЧКНЛ :

- часткових однозначних предикатів,
- тотальних неоднозначних предикатів,
- часткових неоднозначних предикатів.

Умови замкненості секвенції в різних численнях

Нехай Ξ – множина специфікованих формул.

Введемо для Ξ множини *означених* та *неозначених* квазівільних предметних імен, або множини *val*-змінних та *inv*-змінних:

$$val(\Xi) = \{x \in V \mid \vdash_{-} \varepsilon x \in \Xi\};$$

$$inv(\Xi) = \{x \in V \mid \vdash_{-} \varepsilon x \in \Xi\}.$$

Множину *нерозподілених* для Ξ імен введемо так:

$$ud(\Xi) = free(\Xi) \setminus (val(\Xi) \cup inv(\Xi)).$$

Базова умови замкненості секвенції $\vdash_{-} \Gamma \vdash_{-} \Delta$ (індукована властивістю *C*):
C) існує формула Φ : $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Властивості *CL*, *CR*, *CLR*, які істотні для відношень \models_T , \models_F , \models_{TF} , індукують додаткові умови *CL*, *CR*, *CLR* замкненості секвенції $\vdash_{-} \Gamma \vdash_{-} \Delta$:

CL) існує формула Φ : $\Phi \in \Gamma$ та $\neg \Phi \in \Gamma$;

CR) існує формула Ψ : $\Psi \in \Delta$ та $\neg \Psi \in \Delta$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі: $\Phi \in \Gamma$, $\neg \Phi \in \Gamma$, $\Psi \in \Delta$, $\neg \Psi \in \Delta$.

Зрозуміло, що $CLR \Leftrightarrow CL$ та CR .

Додаткова умова замкненості секвенції – *inv*-замкненість (*unvalued*).

Множиною *inv*-змінних секвенції $\vdash \Gamma \dashv$ назвемо $Un = \{u \in V \mid \varepsilon u \in \Gamma\}$.

При інтерпретаціях змінні множини Un трактуються як неозначені.

Вводимо *Un-inv*-форми (*inv*-форми відносно заданої множини *inv*-змінних Un)

Нехай R -формула $R^{r_1, \dots, r_k, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m} \Phi$ така:

$$\{r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k, y_1, \dots, y_n\} \subseteq Un, \quad \{x_1, \dots, x_n\} \cap Un = \emptyset, \quad \{v_1, \dots, v_m\} \cap Un = \emptyset.$$

Un-inv-форма формули $R^{r_1, \dots, r_k, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m} \Phi$ – це вираз вигляду $R_{\varepsilon, \dots, \varepsilon, v_1, \dots, v_m}^{x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m} \Phi$, де ε позначає невизначене значення.

R -формули Φ та Ψ *Un-inv*-еквівалентні: Φ та Ψ мають однакові *Un-inv*-форми.

Якщо R -формули Φ та Ψ *Un-inv*-еквівалентні, то $\Phi_A(d) = \Psi_A(d)$ для кожних моделі мови A та $d \in {}^V A$, для яких $\varepsilon u(d) = T$ для всіх $u \in Un$.

Секвенція $\vdash \Gamma \dashv$ із множиною *inv*-змінних Un *inv*-замкнена:

UnC) існує пара *Un-inv*-еквівалентних R -формул Φ та Ψ таких, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Psi \in \Delta$.

Теорема. Якщо секвенція $\vdash \Gamma \dashv$ *inv*-замкнена, то $\Gamma \models \Delta$.

Числення QG

Формалізує відношення \models_{TF} (загальна семантика)

Замкненість секвенції визначається умовою $C \vee UnC$.

Вводимо такі базові секвенційні форми:

$$\vdash_{RT} \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}} (\Sigma A),}$$

$$\vdash_{RT} \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}} (\Sigma A),}$$

$$\vdash_{\forall(U)} \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}} (\Sigma A),}, \quad y \in A$$

$$\vdash_{\forall(U)} \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}} (\Sigma A),}, \quad y \in A$$

$$\vdash_{\exists R} \frac{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}} (\exists x A),}{\vdash R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x} (\exists x A),}, \quad x \notin \bar{u}$$

$$\vdash_{\exists R} \frac{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}} (\exists x A),}{\vdash R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x} (\exists x A),}, \quad x \notin \bar{u}$$

$$\vdash_{R\exists p} \frac{\vdash \exists x A \Sigma}{\vdash R_y^x (\exists x A),}$$

$$\vdash_{R\exists p} \frac{\vdash \exists x A \Sigma}{\vdash R_y^x (\exists x A),}.$$

$$\vdash \neg \text{RT} \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash \neg R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}} (\Sigma A),}$$

$$\vdash \neg \text{RT} \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash \neg R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}} (\Sigma A),}$$

$$\vdash \neg \text{a(U)}; \frac{\vdash \neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash \neg R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}} (\Sigma A),}, \quad y \in A$$

$$\vdash \neg \text{a(U)}; \frac{\vdash \neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash \neg R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}} (\Sigma A),}, \quad y \in A$$

$$\vdash \neg \text{ReR} \frac{\left\{ \begin{array}{l} \vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}} (\exists x A), \\ \vdash \neg R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x} (\exists x A), \end{array} \right\}}{\vdash \neg R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x} (\exists x A),}, \quad x \notin \bar{u}$$

$$\vdash \neg \text{ReR} \frac{\left\{ \begin{array}{l} \vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}} (\exists x A), \\ \vdash \neg R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x} (\exists x A), \end{array} \right\}}{\vdash \neg R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x} (\exists x A),}, \quad x \notin \bar{u}$$

$$\vdash \neg \text{R}\exists\text{p} \frac{\vdash \neg \exists x A \Sigma}{\vdash \neg R_y^x (\exists x A),}$$

$$\vdash \neg \text{R}\exists\text{p} \frac{\vdash \neg \exists x A \Sigma}{\vdash \neg R_y^x (\exists x A),}.$$

$$\vdash_{\text{RR}} \frac{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}} \Sigma A),}{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma R_{\bar{y}}^{\bar{w}} (A)},$$

$$\vdash_{\text{RR}} \frac{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}} \Sigma A),}{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma R_{\bar{y}}^{\bar{w}} (A)},$$

$$\vdash_{\text{R}\neg} \frac{\vdash_{\text{R}\bar{x}} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma A),}{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma \neg A),}$$

$$\vdash_{\text{R}\neg} \frac{\vdash_{\text{R}\bar{x}} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma A),}{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma \neg A),}$$

$$\vdash_{\text{R}\vee} \frac{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma A) \quad \vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (B),}{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma A \vee B),}$$

$$\vdash_{\text{R}\vee} \frac{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma A), \quad \vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (B),}{\vdash_{\text{R}\bar{x}} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Sigma A \vee B),}$$

$$\vdash_{\vee} \frac{\vdash_{\Sigma} A \quad \vdash_{\Sigma} B}{\vdash_{\Sigma} A \vee B};$$

$$\vdash_{\vee} \frac{\vdash_{\Sigma} A, \quad \vdash_{\Sigma} B}{\vdash_{\Sigma} A \vee B};$$

$$\vdash \neg \text{RR} \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes \bar{w}_y (\Sigma A),}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma R_{\bar{y}}^{\bar{w}} (A))};$$

$$\vdash \neg \text{RR} \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes \bar{w}_y (\Sigma A),}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma R_{\bar{y}}^{\bar{w}} (A))};$$

$$\vdash \neg \text{R}\neg \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma \neg A)};$$

$$\vdash \neg \text{R}\neg \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A),}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma \neg A)};$$

$$\vdash \neg \text{R}\vee \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A), \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (B),}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A \vee B)};$$

$$\vdash \neg \text{R}\vee \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A) \quad \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (B),}{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\Sigma A \vee B)};$$

$$\vdash \neg \neg \neg \frac{\vdash A\Sigma}{\vdash \neg \neg \neg A\Sigma};$$

$$\vdash \neg \neg \neg \frac{\vdash A\Sigma}{\vdash \neg \neg \neg A\Sigma};$$

$$\vdash \neg \neg \vee \frac{\vdash \neg A\Sigma, \vdash \neg B,}{\vdash \neg (\Sigma A \vee B)};$$

$$\vdash \neg \neg \vee \frac{\vdash \neg A\Sigma \quad \vdash \neg B\Sigma}{\vdash \neg (\Sigma A \vee B)}.$$

Ми вводимо дві різновидності форм для елімінації кванторів:

– елімінації квантора під реномінацією (\exists R-форми)

– елімінації зовнішнього квантора (\exists -форми).

$$\exists \varepsilon \left(\frac{R_z^x(\varepsilon A) \Sigma}{\exists x A \Sigma} \right), \quad z \in V_T \quad z \notin nm \quad \exists x A$$

$$\exists \bar{u} \left(\frac{R_{\bar{v}, z}^{\bar{u}, x}(\varepsilon A) \Sigma}{R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x A)} \right), \quad z \in V_T \quad z \notin nm \quad R_{\bar{v}}^{\bar{u}} \exists x A \quad df \quad x \notin \bar{u}$$

$$\forall \varepsilon \left(\frac{R_z^x(\varepsilon A) \Sigma}{\exists x A \Sigma} \right), \quad z \in V_T \quad z \notin nm \quad \exists x A$$

$$\forall \bar{u} \left(\frac{R_{\bar{v}, z}^{\bar{u}, x}(\varepsilon A) \Sigma}{R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x A)} \right), \quad z \in V_T \quad z \notin nm \quad R_{\bar{v}}^{\bar{u}} \exists x A \quad df \quad x \notin \bar{u}$$

Форми $\exists \varepsilon$, $\forall \varepsilon$, $\exists \bar{u}$, $\forall \bar{u}$ назвемо \exists_T -формами.

$$\frac{\neg \exists v \frac{\neg \exists x A \xi, \bar{R}_y^x(A), \neg y}{\neg \exists x A \xi, \Sigma}}{\neg \exists v \frac{\neg \exists x A \xi, \bar{R}_y^x(A), \neg y}{\neg \exists x A \xi, \Sigma}};$$

$$\frac{\neg \exists Rv \frac{\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Sigma), \neg R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x}(A), \neg y}{\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Sigma), \neg y}}{\neg \exists Rv \frac{\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Sigma), \neg R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x}(A), \neg y}{\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Sigma), \neg y}}, (\text{òòò } x \notin \{\bar{u}\}).$$

$$\frac{\neg \exists v \frac{\neg \exists x A \xi, \bar{R}_y^x(A), \neg y}{\neg \exists x A \xi, \Sigma}}{\neg \exists v \frac{\neg \exists x A \xi, \bar{R}_y^x(A), \neg y}{\neg \exists x A \xi, \Sigma}};$$

$$\frac{\neg \exists Rv \frac{\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Sigma), \neg R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x}(A), \neg y}{\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Sigma), \neg y}}{\neg \exists Rv \frac{\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Sigma), \neg R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x}(A), \neg y}{\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Sigma), \neg y}} (\text{òòò } x \notin \{\bar{u}\}).$$

Форми $\neg \exists v$, $\neg \exists v$, $\neg \exists Rv$, $\neg \exists Rv$ назвемо \exists_F -формами.

Для \exists_F -форм умова: $\neg \epsilon y$ не входит до Σ .

Формули вигляду $\vdash \exists x\Phi, \vdash \neg\exists x\Phi, \vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ — \exists_T^-
 формули $\vdash \exists x\Phi, \vdash \neg\exists x\Phi, \vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$
 Формули вигляду — \exists_F^-
 формули

При елімінації кванторів $\exists x, \Sigma$ додатково застосовуються форми ε -розподілу.

$\varepsilon d \frac{\vdash \varepsilon z, \Sigma}{\Sigma}$ за умови: εx не входить до Σ .

εv за умови: $z \in V_T$ та $z \notin \text{nt}(\Sigma)$.

Маємо три різновидності базових секвенційних форм.

- **допоміжні** – форми типів $RT, \neg RT, \Phi U, \neg \Phi U, R \exists R, \neg R \exists R, R \exists p, \neg R \exists p$;
- форми **ε -розподілу** – це εd та εv ;
- **основні** – всі інші базові секвенційні форми

Числення QL формалізує:

- відношення \models_T для неокласичної семантики ЧКНЛ;
- відношення \models_F для пересиченої семантики ЧКНЛ.

Умова замкненості секвенції: $C \vee CL \vee UnC$.

Базові секвенційні форми такі ж, як форми числення QG .

Числення QR формалізує:

- відношення \models_F для неокласичної семантики ЧКНЛ;
- відношення \models_T для пересиченої семантики ЧКНЛ.

Умова замкненості секвенції: $C \vee CR \vee UnC$.

Базові секвенційні форми такі ж, як форми числення QG .

Числення QLR формалізує відношення \models_{TF} для випадку неокласичної семантики та для випадку пересиченої семантики.

Умова замкненості секвенції: $C \vee CLR \vee UnC$.

Базові секвенційні форми такі ж, як форми числення QG .

Числення QC

Формалізує \models_{cl} (неокласична семантика) та \models_{cm} (пересичена семантика)

Замкненість секвенції визначається умовою $C \vee UnC$.

Базові секвенційні форми числення QC :

$$\vdash RT, \neg \vdash RT, \vdash \Phi U, \neg \vdash \Phi U, \vdash R \exists R, \neg \vdash R \exists R, \vdash R \exists p, \neg \vdash R \exists p,$$

$$\vdash \neg, \neg \vdash \neg, \vdash \vee, \neg \vdash \vee, \vdash RR, \neg \vdash RR, \vdash R\neg, \neg \vdash R\neg, \vdash R\vee, \neg \vdash R\vee,$$

$$\vdash \exists \varepsilon, \vdash \exists R\varepsilon, \neg \vdash \exists v, \neg \vdash \exists Rv, \text{ а також форми } \varepsilon\text{-розподілу } \varepsilon d \text{ та } \varepsilon v$$

Для \models_{cl} та \models_{cm} можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини наслідку в праву і навпаки, тому в численні QC форми для зовнішнього заперечення не потрібні. Форми $\vdash \neg$ та $\neg \vdash$ традиційні:

$$\vdash \neg \frac{\neg \vdash A\Sigma}{\vdash \neg A\Sigma};$$

$$\neg \vdash \frac{\vdash A\Sigma}{\neg \vdash \neg A\Sigma};$$

Спектр секвенційних числень чистих першопорядкових КНЛ

	\models_{cl}	\models_{cm}	\models_T	\models_F	\models_{TF}
Неокласична	QC	–	QL	QR	QLR
Пересичена	–	QC	QR	QL	QLR
Загальна	–	–	QG	QG	QG

На основі властивостей відношень \models отримуємо основну властивість секвенційних форм:

Теорема 1. Нехай $\frac{\Gamma \vdash \Lambda \vdash K}{\Gamma \vdash \Delta}$ òà $\frac{\Gamma \vdash \Lambda \vdash K \quad \Gamma \vdash X \vdash Z}{\Gamma \vdash \Delta}$ – базові секвенційні форми

Тоді: 1) $\Lambda \models K \Rightarrow \Gamma \models \Delta$; $\Lambda \models K$ та $X \models Z \Rightarrow \Gamma \models \Delta$;

2) $\Gamma \not\models \Delta \Rightarrow \Lambda \not\models K$; $\Gamma \not\models \Delta \Rightarrow \Lambda \not\models K$ або $X \not\models Z$

Процедура побудова секвенційного дерева

Процедура побудови дерева розбита на етапи. Вона починається з кореня дерева. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул.

Перед побудовою дерева для секвенції Σ зафіксуємо нескінченний список TN "нових" тотально неістотних імен такий, що $nm(\Sigma) \cap TN = \emptyset$.

Це означає, що імена із TN не зустрічаються у формулах секвенції Σ .

Виділимо деяке $f \in TN$ (використовується формою εv).

Специфіковані формули вигляду $_ \varepsilon x$ та $_ \varepsilon x$ індукуються формами елімінації кванторів, вони не можуть бути в складі секвенції Σ .

На початку кожного етапу – *крок доступу*: до списку доступних додаємо по одній формулі зі списків T -формул та F -формул.

На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (єдина T -формула чи F -формула, якщо один зі списків порожній).

Після додавання до секвенції пари нових доступних формул перевіряємо умову $ud(\Xi) = \emptyset$,

де Ξ – множина доступних формул секвенцій на шляху від Σ до цієї η .

$ud(\Xi) = free(\Xi) \setminus val(\Xi) \neq \emptyset$ та η має \exists_F -формули \Rightarrow виконуємо *крок розподілу*: за допомогою εd -форм розподілюємо усі імена $ud(\Xi)$ на означені та неозначені.

Це веде до побудови піддерева висоти $m = |ud(\Xi)|$ з вершиною η : маємо $k = 2^m$ наступників секвенції $\eta: \eta_1, \dots, \eta_k$.

Якщо було $val(\Xi) = \emptyset$, то для одного наступника (нехай η_1) маємо $val(\eta_1) = \emptyset$; для такої секвенції η_1 застосовуємо εv -форму для виділеного $f \in TN$.

Після цього $val(\xi) \neq \emptyset$ для кожного із наступників ξ секвенцій η_1, \dots, η_k .

Отже, εv -форма застосовується ≤ 1 разу на шляху

Перед кожним етапом перевіряємо, чи усі листи дерева – *замкнені* секвенції.

– *так* \Rightarrow отримано замкнене секвенційне дерево, процедура виведення завершена позитивно.

– *ні* \Rightarrow у випадку виведення скінченної секвенції додатково перевіряємо, чи буде хоч один із листів *фінальною* секвенцією.

Незамкнена вершина Ω виведення секвенції Σ – *фінальна*, якщо до неї вже незастосовна жодна секвенційна форма, або якщо кожне застосування форми до Ω не вводить *нових* формул, відмінних від формул на шляху від Σ до Ω .

Поява фінальної секвенції \Rightarrow *повторення* незамкненої секвенції на даному шляху \Rightarrow є незамкнений шлях \Rightarrow процедура виведення завершена негативно

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, далі добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ :

- активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ .
- до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму.

Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі *пасивні*, до таких формул на цьому етапі основні форми не застосовуються.

При виконанні основних форм за можливості робимо спрощення, застосовуючи допоміжні форми типів $RT, \neg RT, \Phi N, \neg \Phi N, R \exists R, \neg R \exists R, R \exists p, \neg R \exists p$.

Застосування на етапі основних форм проводимо так.

- спочатку виконуємо всі \exists_T -форми. При кожному її застосуванні беремо зі списку TN нове z як перше незадіяне на даному шляху від кореня.

- виконуємо форми типу $RR, \neg RR, R\neg, \neg R\neg, R\vee, \neg R\vee, \neg\neg, \vee, \neg\vee$;

- виконуємо \exists_F -форми; кожну \exists_F -форму – $\forall y \in val(\Theta)$; Θ – множина доступних формул на шляху від Σ до секвенції, в якій починаємо виконання цих \exists_F -форм.

Після виконання кожної форми в секвенції перевіряємо її на замкненість.

Повтори формул у секвенціях усуваємо

Таким чином, при побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

- 1) Процедуру завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево.
- 2) Процедуру завершено негативно, в дереві є скінченний незамкнений шлях.

3) Процедура не завершується, маємо нескінченне дерево. Нескінченне дерево зі скінченим розгалуженням має хоч один нескінченний шлях (лема Кеніга)

У випадках 2) і 3) у дереві існує незамкнений шлях \wp , всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на \wp і стане доступною.

Теорема 2 (коректності). Нехай секвенція $\Gamma \vdash \Delta$ вивідна в численні β . Тоді $\Gamma \models_* \Delta$ в семантиці α .

Назву β числення читаємо на перетині стовпця \models_* та рядка α (див. табл.).

Якщо секвенція $\Gamma \vdash \Delta$ вивідна, то для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Із процедури побудови дерева випливає:

$\Lambda \models_* K$ для кожної його вершини $\Gamma \vdash K$.

Для листів дерева це випливає з визначень замкненої та *inv*-замкненої секвенцій. Збереження секвенційними формами відношення \models_* (від засновків до висновку) випливає з теореми 1. Тому для кореня дерева $\Gamma \vdash \Delta$ – теж $\Gamma \models_* \Delta$.

Побудова виведення для скінченної секвенції

Опишемо модифіковану процедуру побудови виведення для скінченної Σ .

Процедура побудови дерева розбита на етапи. Вона починається з кореня Σ .

На кожному етапі – *1-кратне* застосування сек. форми до формул секвенції.

Перед побудовою дерева зафіксуємо нескінченний список TN "нових" тотально строго неістотних імен такий, що $nm(\Sigma) \cap TN = \emptyset$.

Виділимо деяке $f \in TN$ (використовується формою $\varepsilon\nu$).

Початок побудови дерева. Перевіряємо умову $ud(\Sigma) = \emptyset$.

Якщо $ud(\Sigma) = free(\Sigma) = \emptyset$, то застосовуємо $\varepsilon\nu$ -форму для виділеного $f \in TN$.

Якщо $ud(\Sigma) = free(\Sigma) \neq \emptyset$, то виконуємо *крок розподілу*: за допомогою εd -форм робимо розподіл усіх імен із $ud(\Sigma)$ на означені та неозначені.

Це веде до побудови піддерева висоти $m = |ud(\Sigma)|$ з вершиною η : отримуємо $k = 2^m$ наступників секвенції η : η_1, \dots, η_k .

Для одного наступника, нехай це η_1 , маємо $val(\eta_1) = \emptyset$;

Для такої η_1 застосовуємо $\varepsilon\nu$ -форму для виділеного $f \in TN$.

Після цього $val(\xi) \neq \emptyset$ для кожного із наступників ξ секвенцій η_1, \dots, η_k .

При побудові дерева $\varepsilon\nu$ -форма застосовується не більше 1 разу.

Зауваження. Якщо формули початкової секвенції не містять символів квантифікації, то крок розподілу *не виконуємо*. Зрозуміло, що тоді форми, де фігурують символи квантифікації, також незастосовні.

Перед кожним етапом перевіряємо, чи усі листи дерева – *замкнені* секвенції.

– *так* \Rightarrow отримано замкнене секвенційне дерево, процедура виведення завершена позитивно.

– *ні* \Rightarrow у випадку виведення скінченної секвенції додатково перевіряємо, чи буде хоч один із листів *фінальною* секвенцією.

Поява фінальної секвенції \Rightarrow поява незамкненого шляху \Rightarrow процедура виведення завершена негативно.

Кроки етапу. Процедура не завершена \Rightarrow добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ .

– активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ .

– до кожної активної формули застосовуємо відповідну форму.

Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні, до них на цьому етапі основні форми не застосовуються.

При виконанні основних форм за можливості робимо спрощення, застосовуючи допоміжні форми типів RT , $\neg RT$, ΦN , $\neg \Phi N$, $R \exists R$, $\neg R \exists R$, $R \exists p$, $\neg R \exists p$

Застосування на етапі основних форм до формул секвенції проводимо так.

– виконуємо всі \exists_T -форми та форми типу $RR, \neg RR, R\neg, \neg R\neg, R\vee, \neg R\vee, \neg\neg, \vee, \neg\vee$. При застосуванні \exists_T -форми беремо зі списку TN *нове* z як перше незадіяне на даному шляху від кореня до даної вершини.

– виконуємо \exists_F -форми; кожну з них – $\forall y \in val(\Theta)$, де Θ – множина доступних формул на шляху від Σ до секвенції, в якій починаємо виконання цих \exists_F -форм.

Після виконання кожної форми в секвенції перевіряємо її на замкненість.

Повтори формул у секвенціях усуваємо.

Таким чином, при побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

- 1) Процедуру завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево.
- 2) Процедуру завершено негативно, в дереві є скінченний незамкнений шлях.
- 3) Процедура не завершується, маємо нескінченне дерево. За лемою Кеніга в дереві існує хоча б один нескінченний шлях.

У випадках 2) і 3) у дереві існує незамкнений шлях \wp , всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на \wp і стане доступною

Теорема про контрмоделі

Теорема повноти секвенційних числень ЧКНЛ опираються на теорема про існування контрмоделі для множини формул незамкненого шляху.

Для доведення теорема про контрмоделі використовується метод модельних (хіттікківських) множин.

Теорема 3. Нехай \wp – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash \Gamma \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують моделі мови $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta \in {}^V A$ такі:

- 1) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \delta \notin T(\Phi_A)$;
- 2) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B)$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$.

Пари (A, δ) та (B, η) із такими властивостями назовемо T -контрмоделлю та F -контрмоделлю для секвенції $\vdash \Gamma \Delta$.

Доведення. Для H задамо множини означених імен та неозначених імен

$$W = \{y \in V \mid \neg \varepsilon y \in H\} \quad \text{та} \quad Un = \{y \in V \mid \vdash \varepsilon y \in H\}$$

Застосування секвенційних форм до секвенцій шляху \wp відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула чи її заперечення, що зустрічається на шляху \wp , рано чи пізно буде розкладена чи спрощена.

Усі секвенції шляху \wp незамкнені, тому для них не виконується умова замкненості $C \vee \text{UnC}$. Отже, для H виконуються такі умови коректності:

НС) не існує примітивної формули Φ такої, що $\vdash \Phi \in H$ та $\vdash \Phi \in H_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ \Rightarrow $\vdash R_{\bar{y}}^{\bar{u}} \Phi$:

НСU) не існує примітивних Un-priv -еквівалентних формул $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi \in H$ \Rightarrow $\vdash R_{\bar{y}}^{\bar{v}} \Phi \in H$

Переходи від нижчої вершини шляху \wp до вищої відбуваються згідно з відповідною секвенційною формою, тому для H вірні такі умови

НRT) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$

$\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$

Н \neg RT) $\vdash \neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$

$\vdash \neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$

$$\text{H}\Phi\text{U}) \quad \vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H \quad \text{\textcircled{a}} \quad \text{\textcircled{a}} \quad y \in v(\Phi)$$

$$\quad \neg \vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H \quad \text{\textcircled{a}} \quad \text{\textcircled{a}} \quad y \in v(\Phi)$$

$$\text{H}\neg\Phi\text{U}) \quad \vdash \neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H \quad \text{\textcircled{a}} \quad \text{\textcircled{a}} \quad y \in v(\Phi)$$

$$\quad \neg \vdash \neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H \quad \text{\textcircled{a}} \quad \text{\textcircled{a}} \quad y \in v(\Phi)$$

$$\text{HR}\exists\text{R}) \quad \vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H$$

$$\quad \neg \vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H$$

$$\text{H}\neg\text{R}\exists\text{R}) \quad \vdash \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H$$

$$\quad \neg \vdash \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H$$

$$\text{HR}\exists\text{p}) \quad \vdash R_y^x(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \exists x\Phi \in H$$

$$\quad \neg \vdash R_y^x(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \exists x\Phi \in H$$

$$\text{HR}\neg\exists\text{p}) \quad \vdash \neg R_y^x(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg \exists x\Phi \in H$$

$$\quad \neg \vdash \neg R_y^x(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \neg \exists x\Phi \in H$$

$$\text{HRR}) \quad \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H$$

$$\quad \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H \Rightarrow \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H$$

$$\text{H}\neg\text{RR}) \quad \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H$$

$$\quad \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H \Rightarrow \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H$$

$$\text{HR}\neg) \quad \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$$

$$\quad \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$$

$$\text{H}\neg\text{R}\neg) \quad \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$$

$$\quad \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$$

$$\text{HR}\vee) \quad \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H \text{ \grave{a}\grave{a}\hat{=} } \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H$$

$$\quad \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H \text{ \grave{o}\grave{a} } \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H$$

$$\text{H}\neg\text{R}\vee) \quad \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H \text{ \grave{o}\grave{a} } \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H$$

$$\quad \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H \text{ \grave{a}\grave{a}\hat{=} } \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H$$

$$H \neg\neg) \quad \begin{array}{l} \vdash \neg\neg\Phi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H \\ \neg\vdash \neg\neg\Phi \in H \Rightarrow \neg\vdash \Phi \in H \end{array}$$

$$\vdash \neg\neg\Phi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H$$

$$H \vee) \quad \begin{array}{l} \vdash \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H \text{ а } \vee \text{ } \vdash \Psi \in H \\ \neg\vdash \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \neg\vdash \Phi \in H \text{ та } \neg\vdash \Psi \in H \end{array}$$

$$\vdash \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H \text{ та } \vdash \Psi \in H$$

$$H \neg\vee) \quad \begin{array}{l} \vdash \neg(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \vdash \neg\Phi \in H \text{ та } \vdash \neg\Psi \in H \\ \neg\vdash \neg(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \neg\vdash \neg\Phi \in H \text{ а } \vee \text{ } \neg\vdash \neg\Psi \in H \end{array}$$

$$\vdash \neg(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \vdash \neg\Phi \in H \text{ а } \vee \text{ } \vdash \neg\Psi \in H$$

$$H \exists) \quad \begin{array}{l} \vdash \exists x \Phi \in H \Rightarrow \vdash R_y^x(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W \\ \neg\vdash \exists x \Phi \in H \Rightarrow \neg\vdash R_y^x(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W \end{array}$$

$$\vdash \exists x \Phi \in H \Rightarrow \vdash R_y^x(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W$$

$$H \neg\exists) \quad \begin{array}{l} \vdash \neg\exists x \Phi \in H \Rightarrow \vdash \neg R_y^x(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W \\ \neg\vdash \neg\exists x \Phi \in H \Rightarrow \neg\vdash \neg R_y^x(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W \end{array}$$

$$\vdash \neg\exists x \Phi \in H \Rightarrow \vdash \neg R_y^x(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W$$

$$H \exists R) \quad \begin{array}{l} \vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W \\ \neg\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi) \in H \Rightarrow \neg\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W \end{array}$$

$$\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W$$

$$H \neg\exists R) \quad \begin{array}{l} \vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W \\ \neg\vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi) \in H \Rightarrow \neg\vdash \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W \end{array}$$

$$\vdash \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H \text{ ä } \forall y \in W$$

Множину специфікованих формул H , для якої виконуються ці умови, назовемо G -модельною. Побудуємо контрмодель за G -модельною множиною H .

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деякі ін'єктивні $\delta, \eta \in {}^V A$ з $asn(\delta) = W$. Така A дублює множину W . Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ і η та на іменних множинах вигляду $r_x^{\bar{v}}(\delta)$ і $r_x^{\bar{v}}(\eta)$:

- $\vdash \epsilon y \in H \Rightarrow \delta \in T(\epsilon y)$ та $\eta \notin F(\epsilon y)$;
- $\dashv \vdash \epsilon y \in H \Rightarrow \delta \notin T(\epsilon y)$ та $\eta \in F(\epsilon y)$;
- $\vdash p \in H \Rightarrow \delta \in T(p_A)$ та $\eta \notin F(p_B)$;
- $\dashv \vdash p \in H \Rightarrow \delta \notin T(p_A)$ та $\eta \in F(p_B)$;
- $\vdash \neg p \in H \Rightarrow \delta \in T(\neg p_A)$ та $\eta \notin F(\neg p_B)$;
- $\dashv \vdash \neg p \in H \Rightarrow \delta \notin T(\neg p_A)$ та $\eta \in F(\neg p_B)$;

$$\vdash R_x^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow r_x^{\bar{v}}(\delta) \in T(p_A) \text{ \textit{ò}à} r_x^{\bar{v}}(\eta) \notin F(p_B)$$

$$\dashv \vdash R_x^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow r_x^{\bar{v}}(\delta) \notin T(p_A) \text{ \textit{ò}à} r_x^{\bar{v}}(\eta) \in F(p_B)$$

$$\vdash \neg R_x^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow r_x^{\bar{v}}(\delta) \in T(\neg p_A) \text{ \textit{ò}à} r_x^{\bar{v}}(\eta) \notin F(\neg p_B)$$

$$\dashv \vdash \neg R_x^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow r_x^{\bar{v}}(\delta) \notin T(\neg p_A) \text{ \textit{ò}à} r_x^{\bar{v}}(\eta) \in F(\neg p_B)$$

Для атомарних формул і формул вигляду $R_x^{\bar{v}}(p)$ та їх заперечень твердження теореми впливає з визначення базових предикатів. Далі доводимо традиційно: індукцією за складністю формули згідно з пунктами визначення множини H .

Для числень QL , QR , QLR теорема про контрмоделі формулюється аналогічно.

Відмінність – у різних умовах коректності модельної множини. Такі умови HCL, HCR, HCLR отримуємо із умов CL, CR, CLR замкненості секвенції:

HCL) не існує примітивної формули Φ такої, що $\vdash \Phi \in H$ та $\vdash \neg \Phi \in H$;

HCR) не існує примітивної формули Ψ такої, що $\dashv\vdash \Psi \in H$ та $\dashv\vdash \neg \Psi \in H$;

HCLR) не існує примітивних формул Φ та Ψ таких, що виконуються умови:

$$\vdash \Phi \in H, \vdash \neg \Phi \in H, \dashv\vdash \Psi \in H, \dashv\vdash \neg \Psi \in H.$$

Зрозуміло, що $HCLR \Leftrightarrow HCL \vee HCR$.

Множина специфікованих формул H , для якої виконуються умови переходу G -модельної множини:

– L -модельна, якщо для H виконуються умови коректності HC, HCL, HCU;

– R -модельна, якщо для H виконуються умови коректності HC, HCR, HCU;

– LR -модельна, якщо для H виконуються умови коректності HC, HCLR, HCU.

Зауваження. Для T -контрмоделі δ невиконання умови HCL, тобто наявність формули Φ такої, що $\vdash \Phi \in H$ та $\vdash \neg \Phi \in H$, дає $\delta \in T(\Phi_A)$ та $\delta \in T(\neg \Phi_A) = F(\Phi_A)$, звідки маємо неоднозначність Φ_A .

Для F -контрмоделі η невиконання умови HCR, тобто наявність Φ такої, що $\dashv\vdash \Phi \in H$ та $\dashv\vdash \neg \Phi \in H$, дає $\eta \in F(\Phi_B)$ та $\eta \in F(\neg \Phi_B) = T(\Phi_B)$, звідки неоднозначність Φ_B .

Сформулюємо теорему про контрмоделі для числення QS .

Теорема 4. Нехай \wp – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash_{\Gamma} \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху \wp . Тоді існують моделі мови $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta \in {}^V A$ такі:

- 1) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \delta \in F(\Phi_A)$;
- 2) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B)$ та $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \eta \notin T(\Phi_B)$.

Пари (A, δ) та (B, η) із такими властивостями будемо називати *Cl-контрмоделлю* та *St-контрмоделлю* для секвенції $\vdash_{\Gamma} \Delta$.

Доведення. Задамо $W = \{y \in V \mid \vdash_{\Gamma} \varepsilon y \in H\}$ та $Un = \{y \in V \mid \vdash_{\Gamma} \varepsilon y \in H\}$.

Усі секвенції шляху \wp незамкнені, тому для них не виконується умова замкненості $C \vee UnC$. Застосування форм до секвенцій шляху \wp відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула на шляху \wp буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою числення QS .

Отже, для H виконуються:

– умови коректності HC і HCU

– умови переходу

$H\neg$, $H\vee$, HRT , $H\Phi N$, $HR \exists R$, $HR \exists p$, HRR , $HR\neg$, $HR\vee$, $H\exists$, $H\exists R$

Тут умова $H \neg$:

$$H \neg) \quad \begin{array}{l} \vdash \neg\Phi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H; \\ \neg \vdash \neg\Phi \in H \Rightarrow \neg \vdash \Phi \in H. \end{array}$$

Множину H із такими властивостями назовемо *C-модельною*.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деякі ін'єктивні $\delta, \eta \in {}^V A$ з $asn(\delta) = W$. Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ і η та на іменних множинах вигляду $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$ і $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)$:

- $\vdash \varepsilon y \in H \Rightarrow \delta \in T(\varepsilon y)$ та $\eta \notin F(\varepsilon y)$;
- $\neg \vdash \varepsilon y \in H \Rightarrow \delta \in F(\varepsilon y)$ та $\eta \notin T(\varepsilon y)$;
- $\vdash p \in H \Rightarrow \delta \in T(p_A)$ та $\eta \notin F(p_B)$;
- $\neg \vdash p \in H \Rightarrow \delta \in F(p_A)$ та $\eta \notin T(p_B)$;
- $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta) \in T(p_A)$ òà $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta) \notin F(p_B)$
- $\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta) \in F(p_A)$ òà $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta) \notin T(p_B)$

Для атомарних формул і формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ та їх заперечень твердження теореми впливає з визначення базових предикатів.

Далі доводимо традиційно: індукцією за складністю формули згідно з пунктами визначення згідно з пунктами визначення *C-модельної* множини.

Теорема повноти

На основі теорем про контрмоделі маємо теорема повноти для числень ЧКНЛ.

Теорема 5. Нехай $\Gamma \models_* \Delta$ в семантиці α . Тоді секвенція $\Gamma \dashv\vdash \Delta$ вивідна в численні β .

Назву β числення читаємо на перетині стовпця \models_* та рядка α (див. табл.).

1. Доведення для \models_{TF} в загальній семантиці та числення QG .

Нехай супротивне: $\Gamma \models_{TF} \Delta$ та секвенція $\Gamma \dashv\vdash \Delta$ невивідна. Якщо $\Gamma \dashv\vdash \Delta$ невивідна, то секвенційне дерево для $\Gamma \dashv\vdash \Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях \wp .

Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху \wp . Тоді $\Gamma \dashv\vdash \Delta \subseteq H$

За теоремою 3 існують T -контрмодель (A, δ) та F -контрмодель (B, η) такі:

$\Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та $\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin T(\Phi_A)$;

$\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B)$ та $\Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$.

Враховуючи $\Gamma \dashv\vdash \Delta \subseteq H$, отримуємо:

T -контрмодель: для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\delta \in T(\Phi_A)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\delta \notin T(\Psi_A)$. Звідси $\delta \in T(\Gamma_A)$ та $\delta \notin T(\Delta_A) \Rightarrow$ невірно $T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A)$. Останнє заперечує $\Gamma_A \models_T \Delta$, тому й заперечує $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

F -контрмодель: для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\eta \notin F(\Phi_B)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\eta \in F(\Psi_B)$. Звідси $\eta \notin F(\Gamma_B)$ та $\eta \in F(\Delta_B) \Rightarrow$ невірно $F(\Delta_B) \subseteq F(\Gamma_B)$. Останнє заперечує $\Gamma_B \models_F \Delta$, тому й заперечує $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

2. Доведення для \models_{TF} в неокласичній чи пересиченій семантиці та QLR.

Аналогічно п.1 отримуємо, що існують T -контрмодель (A, δ) та F -контрмодель (B, η) такі:

$$\perp \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A) \text{ та } \neg \perp \Phi \in H \Rightarrow \delta \notin T(\Phi_A);$$

$$\perp \Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B) \text{ та } \neg \perp \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B).$$

Якщо при виконанні HCLR невірна HCL (тоді HCR), то для T -контрмоделі маємо неоднозначний предикат, а для F -контрмоделі – нетотальний предикат, тому для логіки однозначних предикатів беремо F -контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – T -контрмодель.

Якщо при виконанні HCLR невірна HCR (тоді HCL), то для F -контрмоделі маємо неоднозначний предикат, а для T -контрмоделі – нетотальний предикат, тому для логіки однозначних предикатів беремо T -контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – F -контрмодель.

Якщо вірні HCL і HCR, то можна брати як T -контрмодель, так і F -контрмодель.

Далі доводимо так, як в п.1.

3. Доведення для \models_T в неокласичній семантиці та QL.

Нехай супротивне: $\Gamma \models_T \Delta$ та секвенція $\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta$ невивідна. Якщо $\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta$ невивідна, то секвенційне дерево для $\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях \wp . Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху \wp . Тоді

$$\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta \subseteq H$$

За теоремою про контрмодель існує T -контрмодель (A, δ) така:

$$\perp\text{-}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \mathbf{T}(\Phi_A) \text{ та } \text{-}\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin \mathbf{T}(\Phi_A).$$

Згідно з $\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\delta \in \mathbf{T}(\Phi_A)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\delta \notin \mathbf{T}(\Psi_A)$.

Звідси $\delta \in \mathbf{T}(\Gamma_A)$ та $\delta \notin \mathbf{T}(\Delta_A)$, тому невірно $\mathbf{T}(\Gamma_A) \subseteq \mathbf{T}(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma \models_T \Delta$.

4. Доведення для \models_F в пересиченій семантиці та QL.

Нехай супротивне: $\Gamma \models_F \Delta$ та секвенція $\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta$ невивідна. Якщо $\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta$ невивідна, то секвенційне дерево для $\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях \wp . Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху \wp . Тоді

$$\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta \subseteq H$$

За теоремою про контрмодель існує F -контрмодель (B, η) така:

$$\perp\text{-}\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin \mathbf{F}(\Phi_B) \text{ та } \text{-}\Phi \in H \Rightarrow \eta \in \mathbf{F}(\Phi_B).$$

Згідно з $\perp\text{-}\Gamma\text{-}\Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\eta \notin \mathbf{F}(\Phi_B)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\eta \in \mathbf{F}(\Psi_B)$.

Звідси $\eta \notin \mathbf{F}(\Gamma_B)$ та $\eta \in \mathbf{F}(\Delta_B)$, тому невірно $\mathbf{F}(\Delta_B) \subseteq \mathbf{F}(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma \models_F \Delta$.

5. Доведення для \models_F в неокласичній семантиці та QR.

Нехай супротивне: $\Gamma \models_F \Delta$ та секвенція $\perp \Gamma \neg \Delta$ невивідна. Якщо $\perp \Gamma \neg \Delta$ невивідна, то секвенційне дерево для $\perp \Gamma \neg \Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях \wp . Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху \wp . Тоді

$$\perp \Gamma \neg \Delta \subseteq H$$

За теоремою про контрмодель існує F -контрмодель (B, η) така:

$$\perp \Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B) \text{ та } \neg \Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B).$$

Згідно з $\perp \Gamma \neg \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\eta \notin F(\Phi_B)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\eta \in F(\Psi_B)$.

Звідси $\eta \notin F(\Gamma_B)$ та $\eta \in F(\Delta_B)$, тому невірно $F(\Delta_B) \subseteq F(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma \models_F \Delta$.

6. Доведення для \models_T в пересиченій семантиці та QR.

Нехай супротивне: $\Gamma \models_T \Delta$ та секвенція $\perp \Gamma \neg \Delta$ невивідна. Якщо $\perp \Gamma \neg \Delta$ невивідна, то секвенційне дерево для $\perp \Gamma \neg \Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях \wp . Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху \wp . Тоді

$$\perp \Gamma \neg \Delta \subseteq H$$

За теоремою про контрмодель існує T -контрмодель (A, δ) така:

$$\perp \Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A) \text{ та } \neg \Phi \in H \Rightarrow \delta \notin T(\Phi_A).$$

Згідно з $\perp \Gamma \neg \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\delta \in T(\Phi_A)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\delta \notin T(\Psi_A)$.

Звідси $\delta \in T(\Gamma_A)$ та $\delta \notin T(\Delta_A)$, тому невірно $T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma \models_T \Delta$.

7. Доведення для \models_{Cl} в неокласичній семантиці та QС.

Нехай супротивне: $\Gamma \models_{CT} \Delta$ та секвенція $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta$ невивідна. Якщо $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta$ невивідна, то секвенційне дерево для $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях \wp . Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху \wp . Тоді

$$\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta \subseteq H$$

За теоремою 4 існує Cl -контрмодель (A, δ) така:

$$\vdash_{-} \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T \text{ та } \vdash_{-} \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F.$$

Згідно з $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(\delta) = F$.

Звідси $\delta \in T(\Gamma_B) \cap F(\Delta_B)$, тому $T(\Gamma_B) \cap F(\Delta_B) \neq \emptyset$. Це суперечить $\Gamma \models_{Cl} \Delta$.

8. Доведення для \models_{Cm} в пересиченій семантиці та QС.

Нехай супротивне: $\Gamma \models_{Cm} \Delta$ та секвенція $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta$ невивідна. Якщо $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta$ невивідна, то дерево для $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях \wp . Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху \wp . Тоді $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta \subseteq H$

За теоремою 4 існує Cm -контрмодель (B, η) така:

$$\vdash_{-} \Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B) \text{ та } \vdash_{-} \Phi \in H \Rightarrow \eta \notin T(\Phi_B).$$

Згідно з $\vdash_{-} \Gamma_{-} \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\eta \notin F(\Phi_B)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\eta \notin T(\Psi_B)$.

Звідси $\eta \notin F(\Gamma_B) \cup T(\Delta_B)$, тому $F(\Gamma_B) \cup T(\Delta_B) \neq \forall A$. Це заперечує $\Gamma \models_{Cm} \Delta$.

Поєднуючи теореми коректності та повноти, отримуємо:

Секвенція $\vdash_{\beta} \Gamma \Delta$ вивідна в численні $\beta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta$ в семантиці α .

Назва β числення – на перетині стовпця \models_* та рядка α :

Секвенційні числення чистих першопорядкових КНЛ

	\models_{CI}	\models_{Cm}	\models_T	\models_F	\models_{TF}
Неокласична семантика	QC	–	QL	QR	QLR
Пересичена семантика	–	QC	QR	QL	QLR
Загальна семантика	–	–	QG	QG	QG