НЕТРАДИЦІЙНІ ЛОГІКИ

Традиційна логіка предикатів є істинніснозначною із 2-елементною множиною $\{T, F\}$ істиннісних значень. Вона базується на такому фундаментальному принципі: *значення складного висловлення (предиката) залежить лише від значень його компонент, а не від їх смислу.*

Цей принцип формалізується у вигляді *принципу заміни еквівалентних* (заміни рівних). Це означає можливість заміни еквівалентних (заміни рівних), незважаючи на контексти.

Втіленням цього принципу в логіці є теореми еквівалентності та рівності.

Принцип заміни екв-х засвідчує *екстенсіональний* характер традиційної логіки.

Важливою особливістю традиційної логіки є *рефлексивність*, *транзитивність* та *монотонність* логічного слідування (аксіоматика слідування за Тарським).

Ці характерні особливості притаманні як класичній логіці, так і неокласичній.

Класична логіка перестає працювати, коли ми цікавимося не істинністю при незмінній ситуації, а розвитком понять.

Вона мало що дає, коли треба формалізувати незнання.

Класична логіка є логікою конкретного знання та віри,

некласична – це логіка побудови, зміни знання і сумніву.

Багатозначні логіки

Традиційні двозначні логіки: множина істиннісних значень – двоелементна. Позначаємо як $\{T, F\}$.

Багатозначні логіки вперше з'явились на початку 20 ст.

В 1920 р. Я. Лукасєвич запропонував 3-значні логіки для опису модальних висловлень, третє істиннісне значення трактувалось як "можливо", "нейтрально", "невизначено".

Опис модальностей за допомогою 3-значної логіки був не зовсім адекватний, далі розвиток модальних логік пішов іншими шляхами.

В 1921 р. Е. Пост запропонував n-значні логіки. Це зроблено цілком формально, без семантичного обгрунтування.

Найвідомішими з 3-значних є сильна та слабка логіки С. Кліні.

Вони запропоновані для використання в теорії рекурсії.

Сильна логіка Кліні застосовується в системах алгоритмічних алгебр, мовах табличних баз даних.

3-значна логіка Бочвара (логіка абсурду): де третє істиннісне значення трактується як "беззмістовно". Це фактично слабка логіка Кліні, розширена так званими зовнішніми логічними зв'язками, в яких для результатів ототожнено хибність та беззмістовність.

Нехай $Bool = \{b_1, \ldots, b_n\}$ – n-елементна множина істиннісних значень.

Функція вигляду $P : D \to Bool$ – *n-предикат* на множині D.

Якщо $Bool = \{ T, F\}$, то маємо традиційний 2-значний предикат.

Назвемо його 2-предикатом на множині D.

3-значна логіка Лукасєвича

В нащій термінології – це логіка тотальних однозначних 3-предикатів.

В логічній системі Лукасєвича було три класи висловлень – істинні, хибні, невизначені. Позначаючи третє істиннісне значення як $\perp$, отримуємо такі визначення логічних зв'язок 3-значної логіки Лукасєвича:

$$(\neg_{Ł} P)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = F, \\ F, \text{якщо } P(d) = T, \\ \perp, \text{якщо } P(d) = \perp. \end{cases}$$

$$(P \vee_{Ł} Q)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \,\&_{Ł}\, Q)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \perp, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Властивості $(P \to_{Ł} Q)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = T \\ \quad\quad \text{або } P(d) = Q(d), \\ F, \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$

Еквіваленцію $\leftrightarrow_{Ł}$ тлумачимо як похідну зв'язку:

$P \leftrightarrow_{Ł} Q$ означає $(P \to_{Ł} Q) \,\&_{Ł}\, (Q \to_{Ł} P)$.

Лукасєвичеві імплікація та еквіваленція відрізняються від імплікації та еквіваленції логіки 2-значних часткових предикатів:

якщо $P(d) = P(d) = \perp$, то $(P \to_{Ł} Q)(d) = T$ та $(P \leftrightarrow_{Ł} Q)(d) = T$.

Аргументація така. При трактуванні $\perp$ як "проміжного" між F та T істиннісного значення, імплікація $A \to_{Ł} B$ має бути істинною, якщо істинність B *не менша* за істинність A. При такому трактуванні стає неможливим стандартне подання імплікації через диз'юнкцію та заперечення: $P \to_{Ł} Q = \neg_{Ł} P \vee_{Ł} Q$ невірно.

В логіці 2-значних часткових предикатів теж можна ввести зв'язки, аналогічні $\rightarrow_{Ł}$ та $\leftrightarrow_{Ł}$ (замість $\perp$ пишемо "невизначене").

Проте такі зв'язки вже не будуть монотонними.

Я.Лукасєвич далі розвинув 3-значні логіки до 4-значних та багатозначних.

Він пов'язав ідею багатозначних логік з теорією ймовірності, коли істиннісні значення можуть братися з неперервного інтервалу [0, 1].

Цей підхід привів до ймовірнісних, можливісних та нечітких логік.

Багатозначні логіки Поста

Е. Пост запропонував свої багатозначні логіки (тотальних однозначних предикатів) майже одночасно з Лукасєвичем, проте зробив це цілком формально, не беручи до уваги філософські та власне логічні мотиви.

Логічні функції (предикати) n-значної логіки Поста набувають значення в множині $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Диз'юнкція й кон'юнкція задаються так, як в багатозначній логіці Я. Лукасєвича:

$(P \vee_P Q)(d) = \max(P(d), Q(d));$

$(P \,\&_P\, Q)(d) = \min(P(d), Q(d)).$

Пост запропонував два варіанти заперечення – традиційне $\neg_P$ (як у Лукасєвича) і циклічне $\sim_P$. Як композиції предикатів їх визначаємо так:

$(\neg_P P)(d) = n+1 - P(d);$

$$(\sim_P P)(d) = \begin{cases} P(d)+1, & \text{якщо } P(d) < n \\ 1, & \text{якщо } P(d) = n \end{cases}$$

Кон'юнкція, диз'юнкція і $\neg_P$ пов'язані законами де Моргана.

Імплікація визначається так:

$(P \to_P Q)(d) = \min(n, n - P(d) + Q(d)).$

Пост також визначив низку інших логічних зв'язок.

3-значні логіки Кліні

Сильна 3-значна логіка Кліні тотальних однозначних 3-предикатів.

Істиннісні значення такої логіки позначаємо T, F, $\perp$.

Сильні Клінієві зв'язки $\neg_K$, $\vee_K$, $\&_K$, $\rightarrow_K$ задаються так.

$$(\neg_K P)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = F, \\ F, \text{якщо } P(d) = T, \\ \perp, \text{якщо } P(d) = \perp \end{cases}$$

$$(P \vee_K Q)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_K Q)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \perp, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \rightarrow_K Q)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = T, \\ F, \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Визначення логічних зв'язок $\neg_K$, $\vee_K$, $\&_K$ збігаються з визначення логічних зв'язок Лукасєвича $\neg_Ł$, $\vee_Ł$, $\&_Ł$, проте імплікація $\rightarrow_K$ задається не так, як $\rightarrow_Ł$.

Для Клінієвих зв'язок, зокрема, маємо:

$$P \&_K Q = \neg_K(\neg_K P \vee_K \neg_K Q);$$

$$P \rightarrow_K Q = \neg_K P \vee_K Q.$$

Еквіваленція $\leftrightarrow_K$ визначається традиційно:

$P \leftrightarrow_K Q$ означає $(P \rightarrow_K Q) \&_K (Q \rightarrow_K P)$.

Таким чином, за базові можна взяти композиції $\neg_K$ та $\vee_K$, тоді $\&_K$, $\rightarrow_K$, $\leftrightarrow_K$ є похідними.

Слабка 3-значна логіка Кліні тотальних однозначних 3-предикатів.

Тут значення композицій вважається невизначеним, якщо хоча б один аргумент невизначений.

Слабкі Клінієві зв'язки $\vee_W$ та $\&_W$ задаються так.

$$(P \vee_W Q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } P(d)\downarrow,\ Q(d)\downarrow \text{ та} \\ \quad \text{або } P(d) = T, \ Q(d) = T \\ F, \text{ якщо } P(d) = Q(d) = F, \\ \perp, \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \,\&_W Q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } P(d) = Q(d) = T, \\ F, \text{ якщо } P(d)\downarrow,\ Q(d)\downarrow \text{ та} \\ \text{або } P(d) = F, \ Q(d) = F \\ \perp, \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Заперечення $\neg_W$ задається так, як $\neg_K$.

Імплікація $\rightarrow_W$ та еквіваленція $\leftrightarrow_W$ є похідними, вони визначаються так:

$P \rightarrow_W Q$ задається як $\neg_W P \vee_W Q$;

$P \leftrightarrow_W Q$ задається як $(P \rightarrow_W Q) \,\&_W (Q \rightarrow_W P)$.

Сильні Клінієві зв'язки – монотонні розширення відповідних слабких.

4-значна логіка Белнапа

Дослідження 4-значних логік започаткував Я.Лукасєвич.

Особливої уваги серед 4-значних заслуговує логіка Белнапа.

Це зумовлено її застосуванням для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією.

Логіка Белнапа має сильний епістемічний відтінок, вона є зручним засобом формалізації відповідей на питання, якщо інформаційна система містить суперечливі дані.

При описі епістемічного стану системи треба брати до уваги як можливу суперечливість інформації, так і її відсутність.

Згідно Белнапу, інформаційна система працює в режимі запитання-відповідь. При цьому інформаційні повідомлення, які система отримує з різних джерел, можуть бути підтверджені чи спростовані. Тому необхідно, щоб система не ігнорувала суперечливу інформацію і була в змозі продовжити в розумний спосіб функціонування навіть тоді, коли виявлено суперечності. Традиційна 2-значна логіка в таких ситуаціях не працює: для неї наявність суперечності руйнує систему.

Можна виділити 4 випадки.

1. Отримане системою повідомлення було підтверджено і ніколи не було спростовано. Таке повідомлення вважається *істинним*, позначається як T.
2. Отримане системою повідомлення було спростовано та ніколи не було підтверджено. Таке повідомлення вважається *хибним*, позначається як F.
3. Отримане системою повідомлення було як підтверджено, так і спростовано. (ситуація вельми типова, наприклад, експериментальні результати різних груп можуть істотно відрізнятися; окрім того, людині властиво помилятися. Таке повідомлення можна вважати *парадоксальним*, позначаємо його як TF.
4. Система не має ні підтвердження, ні спростування повідомлення, про його істиннісне значення нічого не відомо. Тоді істиннісне значення повідомлення *невизначене*, його позначаємо як $\perp$.

Таким чином, отримуємо логіку з множиною істиннісних значень $\{T, F, TF, \perp\}$.

Відповідно до смислів цих значень, Белнап отримав єдине продовження класичних логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, & із $\{T, F\}$ на $\{T, F, TF, \perp\}$.

Він виходив із мінімальних припущень:

– монотонності, стандартних визначень класичних $\neg$, $\vee$, & на $\{T, F\}$

– природних обмежень для $\vee$ і &:

$$P\&Q = P \Leftrightarrow P \vee Q = Q \text{ та } P\&Q = Q \Leftrightarrow P \vee Q = P.$$

Зв'язки 4-значної логіки Белнапа $\vee_B$, $\neg_B$, $\&_B$ задаються так.

$$(\neg_B P)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } P(d) = F, \\ F, \text{ якщо } P(d) = T, \\ TF, \text{ якщо } P(d) = TF, \\ \perp, \text{ якщо } P(d) = \perp. \end{cases}$$

$$
(P \vee_B Q)(d) = \begin{cases}
T, \text{ якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T \\
\quad \text{або } (P(d) = TF \text{ та } Q(d) = \perp) \\
\quad \text{або } (P(d) = \perp \text{ та } Q(d) = TF), \\
F, \text{ якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\
TF, \text{ якщо } (P(d) = TF \text{ та } Q(d) = TF) \\
\quad \text{або } (P(d) = TF \text{ та } Q(d) = F) \\
\quad \text{або } (P(d) = F \text{ та } Q(d) = TF), \\
\perp, \text{ якщо } (P(d) = F \text{ та } Q(d) = \perp) \\
\quad \text{або } (P(d) = \perp \text{ та } Q(d) = F) \\
\quad \text{або } (P(d) = \perp \text{ та } Q(d) = \perp).
\end{cases}
$$

$$
(P \,\&_B\, Q)(d) = \begin{cases}
T, \text{ якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\
F, \text{ якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F \\
\quad \text{або } (P(d) = TF \text{ та } Q(d) = \perp) \\
\quad \text{або } (P(d) = \perp \text{ та } Q(d) = TF), \\
TF, \text{ якщо } (P(d) = TF \text{ та } Q(d) = TF) \\
\quad \text{або } (P(d) = TF \text{ та } Q(d) = T) \\
\quad \text{або } (P(d) = T \text{ та } Q(d) = TF), \\
\perp, \text{ якщо } (P(d) = T \text{ та } Q(d) = \perp) \\
\quad \text{або } (P(d) = \perp \text{ та } Q(d) = T) \\
\quad \text{або } (P(d) = \perp \text{ та } Q(d) = \perp).
\end{cases}
$$

Визначення пропозиційних зв'язок $\vee_B$, $\neg_B$, $\&_B$ можна традиційно подати у вигляді таблиць істинності.

Імплікація $\rightarrow_B$ та еквіваленція $\leftrightarrow_B$ похідні, визначаються традиційно:

$P \rightarrow_B Q$ задається як $\neg_B P \vee_B Q$;

$P \leftrightarrow_B Q$ задається як $(P \rightarrow_B Q) \&_W (Q \rightarrow_B P)$.

Логіка Белнапа – це 4-значна логіка тотальних однозначних предикатів.

Водночас її можна трактувати як 3-значну логіку *часткових* однозначних предикатів з множиною істиннісних значень $\{T, F, TF\}$. Таке трактування виглядає більш прийнятним з погляду обчислюваності: при переході від часткових до тотальних відображень обчислюваність може порушуватися.

Зауваження. Використання 3-значних логік тотальних однозначних предикатів, зокрема, сильної логіки Кліні, для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією видається неадекватним, адже $\perp$ та *TF* ототожнювати не можна, вони мають різний статус.

Те саме стосується 2-значної логіки часткових однозначних предикатів, яка відповідає сильній логіці Кліні.

Нескінченнозначні логіки

Якщо множина істиннісних значень нескінченна, логіку називають *нескінченнозначною*.

Для нескінченнозначних *неперервних* логік множиною істиннісних значень є інтервал $[a, b]$. Без обмежень загальності беремо інтервал $[0, 1]$.

Логічні зв'язки $\neg_c$, $\vee_c$, $\&_c$, неперервної логіки задаються так:

$$(\neg_c P)(d) = 1 - P(d);$$

$$(P \vee_c Q)(d) = \max(P(d), Q(d));$$

$$(P \,\&_c\, Q)(d) = \min(P(d), Q(d));$$

$$(P \to_c Q)(d) = \max(1 - P(d), Q(d)).$$

До нескінченнозначних в певному розумінні можна віднести інтуїціоністську логіку, алгебраїчними моделями якої є псевдобулеві алгебри – дистрибутивні ґратки з відносним псевдодоповненням.

Нескінченнозначними є такі спеціальні логіки:

ймовірнісні, можливісні, нечіткі.

БАГАТОЗНАЧНІ ЛОГІКИ ТА ДВОЗНАЧНІ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ

Розглянемо зв'язки традиційних двозначних КНЛ часткових предикатів та багатозначних логік.

Нагадаємо: семантичними моделями КНЛ є предикатні композиційні системи – трійки вигляду (D, Pr, C), де D – множина даних, Pr – множина предикатів, заданих на D, C – множина композицій породження нових предикатів, яка задається множиною базових композицій відповідного рівня

ПКС (D, Pr, C) задає алгебру даних (D, Pr) та композиційну алгебру предикатів (Pr, C), терми якої трактуються як формули мови логіки.

Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного, кванторного рівнів множини їх композицій позначимо C_P, C_R, C_Q, вони задаються множинами базових композицій

$$\{\neg, \vee\},\ \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\},\ \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}.$$

Множини тотальних однозначних, часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів будемо позначати як ${}_{TS}Pr$, ${}_{PS}Pr$, ${}_{TM}Pr$, ${}_{PM}Pr$. Для V-квазіарних предикатів на A маємо такі відповідні позначення: ${}_{TS}Pr^A$, ${}_{PS}Pr^A$, ${}_{TM}Pr^A$, ${}_{PM}Pr^A$.

Логіки тотальних неоднозначних і часткових однозначних предикатів та 3-значні логіки

Розглянемо композиційні предикатні алгебри часткових однозначних 2-предикатів $({}_{PS}Pr, C_P)$, $({}_{PS}Pr^A, C_R)$, $({}_{PS}Pr^A, C_Q)$ та тотальних неоднозначних 2-предикатів $({}_{TM}Pr, C_P)$, $({}_{TM}Pr^A, C_R)$, $({}_{TM}Pr^A, C_Q)$ відповідно пропозиційного, реномінативного, кванторного рівнів.

Беручи до уваги дуальність неокласичної та пересиченої семантик, маємо (тут дуальні предикати $Q \in {}_{PS}Pr$ та $Q' \in {}_{TM}Pr$):

$$(\neg P)' = \neg(P');$$

$$(P \vee Q)' = (P') \vee (Q');$$

$$(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))' = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P');$$

$$(\exists xP)' = \exists x(P').$$

Теорема 1. Ізоморфними є наступні пари композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів:

1) $({}_{PS}Pr, C_P)$ та $({}_{TM}Pr, C_P)$ ізоморфні;

2) $({}_{PS}Pr^A, C_R)$ та $({}_{TM}Pr^A, C_R)$ ізоморфні;

3) $({}_{PS}Pr^A, C_Q)$ та $({}_{TM}Pr^A, C_Q)$ ізоморфні.

Розглянемо зв'язок логіки тотальних неоднозначних 2-предикатів та сильної логіки Кліні тотальних однозначних 3-предикатів. Істиннісні значення такої логіки позначаємо T, F, TF. Логічні зв'язки (пропозиційні композиції) цієї логіки позначимо відміткою K.

Клінієві зв'язки $\neg_K$, $\vee_K$, $\&_K$ задаються так.

$$(\neg_K P)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = F, \\ F, \text{якщо } P(d) = T, \\ TF, \text{якщо } P(d) = TF. \end{cases}$$

$$(P \vee_K Q)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ TF, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \,\&_K\, Q)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ TF, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для Клінієвих зв'язок маємо: $P \,\&_K\, Q = \neg_K(\neg_K P \vee_K \neg_K Q)$, $P \to_K Q = \neg_K P \vee_K Q$.

Таким чином, за базові можна взяти $\neg_K$ та $\vee_K$, тоді $\&_K$ та $\to_K$ є похідними.

Пропозиційна композиційна алгебра Кліні тотальних 3-предикатів – це композиційна предикатна алгебра (Pr_K, C_K), де Pr_K – множина тотальних однозначних 3-предикатів на D, а C_K задається базовими комп-ми $\neg_K$ та $\vee_K$.

Трактуючи невизначеність як спеціальне значення (тут аналогічне TF), маємо повну відповідність визначень Клінієвих зв'язок та пропозиційних композицій логіки часткових однозначних 2-предикатів, тому останні теж називають Клінієвими.

Це є підставою для традиційного переходу від часткових до тотальних відображень. Проте такий перехід порушує адекватність подання багатьох властивостей часткових відображень, зокрема, обчислюваності.

Отримуємо ізоморфізм пропозиційної композиційної алгебри (${}_{PS}Pr$, C_P) та алгебри Кліні (Pr_K, C_K). Враховуючи теорему 1, отримуємо:

Теорема 2. Пропозиційна композиційна алгебра Кліні (Pr_K, C_K), пропозиційна композиційна алгебра (${}_{PS}Pr$, C_P) часткових однозначних 2-предикатів та пропозиційна композиційна алгебра (${}_{TM}Pr$, C_P) тотальних неоднозначних 2-предикатів – ізоморфні.

Ці результати поширимо на реномінативний і першопорядкові рівні.

Композиція реномінації однотипно визначається для функцій різних класів, зокрема, для 2-предикатів, 3-предикатів, 4-предикатів.

Для тотальних однозначних 3-предикатів задамо композиції $\exists x_K$ і $\forall x_K$:

$$(\exists x_K P)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо існує } b \in A: P(d\nabla x \mapsto b) = T, \\ F, \text{ якщо } P(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A, \\ T, F \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(\forall x_K P)(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо існує } b \in A: P(d\nabla x \mapsto b) = F, \\ T, \text{ якщо } P(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для всіх } a \in A, \\ T, F \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Предикатну алгебру $({}_K Pr^A, C_{KR})$, де ${}_K Pr^A$ – множина тотальних однозначних 3-предикатів на A, а C_{KR} задається базовими $\neg_K$, $\vee_K$ та реномінації, назвемо реномінативною композиційною алгеброю Кліні.

Предикатну алгебру $({}_K Pr^A, C_{KQ})$, де ${}_K Pr^A$ – множина тотальних однозначних 3-предикатів на A, а C_{KQ} задається базовими композиціями $\neg_K$, $\vee_K$, $\exists x_K$ та реномінації, назвемо (першопорядковою) кванторною композиційною алгеброю Кліні.

Теорема 3. 1) Реномінативна композиційна алгебра Кліні $({}_{K}Pr^{A}, C_{KR})$ та реномінативна композиційна алгебра часткових однозначних 2-предикатів $({}_{PS}Pr^{A}, C_{R})$ ізоморфні;

2) кванторна композиційна алгебра Кліні $({}_{K}Pr^{A}, C_{KQ})$ та кванторна композиційна алгебра часткових однозначних 2-предикатів $({}_{PS}Pr^{A}, C_{Q})$ ізоморфні.

Наслідок 1. Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів маємо:

1) $({}_{PS}Pr, C_{P})$, $({}_{TM}Pr, C_{P})$ та (Pr_{K}, C_{K}) ізоморфні;

2) $({}_{PS}Pr^{A}, C_{R})$, $({}_{TM}Pr^{A}, C_{R})$ та $({}_{K}Pr^{A}, C_{KR})$ ізоморфні;

3) $({}_{PS}Pr^{A}, C_{Q})$, $({}_{TM}Pr^{A}, C_{Q})$ та $({}_{K}Pr^{A}, C_{KQ})$ ізоморфні.

Логіки часткових неоднозначних і часткових однозначних предикатів та 4-значні логіки

Логікам часткових однозначних та тотальних неоднозначних 2-предикатів відповідає певна логіка тотальних однозначних 3-предикатів – сильна 3-значна логіка Кліні.

Постає питання, які саме логіки часткових однозначних та тотальних однозначних предикатів будуть відповідати логікам часткових неоднозначних 2-предикатів. Зрозуміло, що це мають бути логіка часткових однозначних 3-предикатів та логіка тотальних однозначних 4-предикатів.

Істиннісні значення першої логіки позначаємо як T, F, TF, а її логічні зв'язки та квантори – як $\neg_S$, $\vee_S$, $\&_S$, $\rightarrow_S$, $\exists x_S$, $\forall x_S$.

Істиннісні значення другої логіки позначаємо як T, F, TF, $\perp$, її логічні зв'язки та квантори позначаємо як $\neg_B$, $\vee_B$, $\&_B$, $\rightarrow_B$, $\exists x_B$, $\forall x_B$.

Трактуючи невизначеність як спеціальне значення $\perp$, отримуємо повну відповідність логіки часткових однозначних 3-предикатів та логіки тотальних однозначних 4-предикатів, тому спочатку розглянемо першу.

Кожному частковому неоднозначному 2-предикату $P : D \to \{T, F\}$ зіставимо частковий однозначний 3-предикат $P_S : D \to \{T, F, TF\}$:

$$P_S(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } d \in T(P) \text{ та } d \notin F(P), \\ F, \text{якщо } d \in F(P) \text{ та } d \notin T(P), \\ TF, \text{якщо } d \in T(P) \text{ та } d \in F(P), \\ \text{невизн., якщо } d \notin T(P) \text{ та } d \notin F(P). \end{cases}$$

З іншого боку, кожному частковому однозначному 3-предикату P_S зіставляємо частковий неоднозначний 2-предикат P:

$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in D \mid P_S(d) = T \text{ або } P_S(d) = TF\}$;

$\boldsymbol{F}(P) = \{d \in D \mid P_S(d) = F \text{ або } P_S(d) = TF\}$.

Це відповідає наступному визначенню логічної зв'язки $\neg_S$:

$$(\neg_S S)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } S(d) = F, \\ F, \text{якщо } S(d) = T, \\ TF, \text{якщо } S(d) = TF, \\ \text{невизн., якщо } S(d)\uparrow. \end{cases}$$

Отже, для так заданої зв'язки $\neg_S$ отримуємо $\neg_S P_S = (\neg P)_S$.

Для диз'юнкції маємо (тут $P \vee Q \in {}_{PM}Pr^{A}$):

$$(P \vee Q)_S(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } d \in T(P \vee Q) \text{ та } d \notin F(P \vee Q), \\ F, \text{ якщо } d \in F(P \vee Q) \text{ та } d \notin T(P \vee Q), \\ TF, \text{ якщо } d \in T(P \vee Q) \text{ та } d \in F(P \vee Q), \\ \text{невизн., якщо } d \notin T(P \vee Q) \text{ та } d \notin F(P \vee Q), \end{cases}$$

При наступному визначенні логічної зв'язки $\vee_S$:

$$(R \vee_S S)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } (R(d) = T \text{ або } S(d) = T) \\ \quad \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d)\uparrow) \\ \quad \text{або } (R(d)\uparrow \text{ та } S(d) = TF), \\ F, \text{ якщо } R(d) = F \text{ та } S(d) = F, \\ TF, \text{ якщо } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = TF) \\ \quad \text{або } (R(d) = TF \text{ та } S(d) = F) \\ \quad \text{або } (R(d) = F \text{ та } Q(d) = TF), \\ \text{невизн., якщо } (R(d) = F \text{ та } S(d)\uparrow) \\ \quad \text{або } (R(d)\uparrow \text{ та } Q(d) = F) \\ \quad \text{або } (R(d)\uparrow \text{ та } S(d)\uparrow). \end{cases}$$

отримуємо $P_S \vee_S Q_S = (P \vee Q)_S$.

Діючи подібним чином, можна ввести логічні зв'язки кон'юнкцію $\&_S$ та імплікацію $\rightarrow_S$. При цьому $P_S \&_S Q_S = (P\&Q)_S$, $P_S \rightarrow_S Q_S = (P\rightarrow Q)_S$.

Тоді $\&_S$ та $\rightarrow_S$ можна виразити через $\neg_S$ та $\vee_S$ традиційним способом:

$$R \&_S S = \neg_S(\neg_S R \vee_S \neg_S S);$$

$$R \rightarrow_S S = \neg_S R \vee_S S.$$

Композиція реномінація для різних класів n-предикатів визначається однотипно.

Розглянемо тепер композицію квантифікації $\exists x_S$.

Для предиката $\exists xP \in {}_{PM}Pr^A$ маємо

$$(\exists xP)_S(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } d \in T(\exists xP) \text{ та } d \notin F(\exists xP); \\ F, \text{ якщо } d \in F(\exists xP) \text{ та } d \notin T(\exists xP); \\ TF, \text{ якщо } d \in T(\exists xP) \text{ та } d \in F(\exists xP); \\ \text{невизн., якщо } d \notin T(\exists xP) \text{ та } d \notin F(\exists xP), \end{cases}$$

При наступному визначенні композиції $\exists x_S$:

$$(\exists x_S R)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } R(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для деякого } a \in A \\ \text{або } (R(d\nabla x \mapsto a) = TF \text{ для деякого } a \in A \\ \text{та } R(d\nabla x \mapsto b)\uparrow \text{ для деякого } b \in A), \\ F, \text{ якщо } R(d\nabla x \mapsto b) = F \text{ для всіх } b \in A, \\ \text{та } R(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ або} \\ \text{для всіх } R(d\nabla x \mapsto a)\uparrow \quad a \in A, \\ TF, \text{ якщо } R(d\nabla x \mapsto b) = TF \text{ або} \\ \text{для всіх } R(d\nabla x \mapsto b) = F \quad b \in A \text{ та} \\ \text{для деякого } R(d\nabla x \mapsto a) = TF, \quad a \in A \\ \text{невизн., якщо } R(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ або} \\ \text{для всіх } R(d\nabla x \mapsto a)\uparrow \quad a \in A \\ \text{та } R(d\nabla x \mapsto b)\uparrow \text{ для деякого } b \in A. \end{cases}$$

маємо $\exists x_S P_S = (\exists x P)_S$.

Подібним чином вводиться композиція $\forall x_S$.

Отже, ми природним чином отримали логіку часткових однозначних 3-предикатів із логіки часткових неоднозначних 2-предикатів : композиції $\neg$, $\vee$, &, $\to$, $\exists x$, $\forall x$ індукують відповідні $\neg_S$, $\vee_S$, $\&_S$, $\to_S$, $\exists x_S$, $\forall x_S$.

Предикатну алгебру $({}_SPr, C_{SP})$, де ${}_SPr$ – множина часткових однозначних 3-предикатів, а C_{SP} задається базовими композиціями $\neg_S$, $\vee_S$, назвемо пропозиційною композиційною алгеброю часткових однозначних 3-предикатів.

Предикатну алгебру $({}_SPr^A, C_{SR})$, де ${}_SPr^A$ – множина часткових однозначних 3-предикатів на A, а C_{SR} задається базовими композиціями $\neg_S$, $\vee_S$ та реномінації, назвемо реномінативною композиційною алгеброю часткових однозначних 3-предикатів.

Предикатну алгебру $({}_SPr^A, C_{SQ})$, де ${}_SPr^A$ – множина часткових однозначних 3-предикатів на A, а C_{SQ} задається базовими $\neg_S$, $\vee_S$, $\exists x_S$ та реномінації, назвемо кванторною композиційною алгеброю часткових однозначних 3-предикатів.

Таким чином, справджується

Теорема 4. Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів маємо:

1) $({}_{PM}Pr, C_P)$ та $({}_{S}Pr, C_{SP})$ ізоморфні;

2) $({}_{PM}Pr^A, C_R)$ та $({}_{S}Pr^A, C_{SR})$ ізоморфні;

3) $({}_{PM}Pr^A, C_Q)$ та $({}_{S}Pr^A, C_{SQ})$ ізоморфні.

Тут $({}_{PM}Pr, C_P)$, $({}_{PM}Pr^A, C_R)$, $({}_{PM}Pr^A, C_Q)$ – композиційні предикатні алгебри часткових неоднозначних 2-предикатів відповідного рівня

Враховуючи повну відповідність логіки часткових однозначних 3-предикатів і логіки тотальних однозначних 4-предикатів, для останньої маємо аналогічні визначення композицій $\neg_B$, $\vee_B$, $\exists x_B$, єдина відмінність полягає у виділенні спеціального значення для невизначеності.

Такі визначення пропозиційних композицій $\neg_B$, $\vee_B$, $\&_B$ можна подати у вигляді таблиць істинності. Виявляється, вони збігаються з визначеннями відповідних логічних зв'язок 4-значної логіки Белнапа.

Таким чином, ми отримали логіку Белнапа із логіки часткових неоднозначних 2-предикатів дуже природним чином: логічні зв'язки $\neg_B$, $\vee_B$, $\&_B$ індукуються відповідними пропозиційними композиціями $\neg$, $\vee$, $\&$.

4-значна логіка отримана Белнапом, виходячи із певних мінімальних припущень. У нас вона індукована логікою часткових неоднозначних 2-предикатів. Рухаючись різними шляхами, приходимо до одного і того ж результату. Це засвідчує особливу роль логіки Белнапа серед 4-значних логік, подібно до особливої ролі сильної логіки Кліні серед 3-значних.

Предикатну алгебру (Pr_B, C_B), де Pr_B – множина тотальних однозначних 4-предикатів, а C_B задається базовими композиціями $\neg_B$ та $\vee_B$, назвемо пропозиційною композиційною алгеброю Белнапа.

Предикатну алгебру (${}_BPr^A$, C_{BR}), де ${}_BPr^A$ – множина тотальних однозначних 4-предикатів на A, а C_{BR} задається базовими $\neg_B$, $\vee_B$, реномінації, назвемо реномінативною композиційною алгеброю Белнапа.

Предикатну алгебру (${}_BPr^A$, C_{BQ}), де C_{BQ} задається базовими $\neg_B$, $\vee_B$, $\exists x_B$, реномінації, назвемо кванторною композиційною алгеброю Белнапа.

Згідно повної відповідності логіки часткових однозначних 3-предикатів і логіки тотальних однозначних 4-предикатів, із теореми 4 отримуємо:

Наслідок 2. Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів маємо:

1) (${}_{PM}Pr$, C_P), (${}_SPr$, C_{SP}) та (Pr_B, C_B) ізоморфні;

2) (${}_{PM}Pr^A$, C_R), (${}_SPr^A$, C_{SR}), (${}_BPr^A$, C_{BR}) ізоморфні;

3) (${}_{PM}Pr^A$, C_Q), (${}_SPr^A$, C_{SQ}), (${}_BPr^A$, C_{BQ}) ізоморфні.

Висновки. Між композиційно-номінативними логіками часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних традиційних 2-значних предикатів та 3-значними і 4-значними логіками однозначних предикатів існують безпосередні зв'язки.

2-значним логікам часткових однозначних та тотальних неоднозначних предикатів відповідає 3-значна логіка тотальних однозначних предикатів – сильна 3-значна логіка Кліні.

2-значним логікам часткових неоднозначних предикатів відповідає 4-значна логіка тотальних однозначних предикатів – логіка Белнапа.

Встановлено ізоморфізм композиційної алгебри Кліні тотальних однозначних предикатів 3-значної логіки та композиційних алгебр тотальних неоднозначних і часткових однозначних предикатів 2-значної логіки, ізоморфізм композиційної алгебри Белнапа тотальних однозначних предикатів 4-значної логіки та композиційних алгебр часткових однозначних предикатів 3-значної логіки і часткових неоднозначних предикатів 2-значної логіки.

Це засвідчує особливе місце сильної логіки Кліні серед 3-значних та логіки Белнапа серед 4-значних.