

# НЕТРАДИЦІЙНІ ЛОГІКИ

Традиційна логіка предикатів є істинніснозначною із 2-елементною множиною  $\{T, F\}$  істиннісних значень. Вона базується на такому фундаментальному принципі: *значення складного висловлення (предиката) залежить лише від значень його компонент, а не від їх смислу.*

Цей принцип формалізується у вигляді *принципу заміни еквівалентних* (заміни рівних). Це означає можливість заміни еквівалентних (заміни рівних), незважаючи на контексти.

Втіленням цього принципу в логіці є теореми еквівалентності та рівності.

Принцип заміни еквів-х засвідчує *екстенціональний* характер традиційної логіки.

Важливою особливістю традиційної логіки є *рефлексивність, транзитивність та монотонність* логічного слідування (аксіоматика слідування за Тарським).

Ці характерні особливості притаманні як класичній логіці, так і неокласичній.

Класична логіка перестає працювати, коли ми цікавимося не істинністю при незмінній ситуації, а розвитком понять.

Вона мало що дає, коли треба формалізувати незнання.

*Класична* логіка є логікою конкретного знання та віри, *некласична* – це логіка побудови, зміни знання і сумніву.

## Багатозначні логіки

Традиційні двозначні логіки: множина істиннісних значень – двоелементна.

Позначаємо як  $\{T, F\}$ .

Багатозначні логіки вперше з'явилися на початку 20 ст.

В 1920 р. Я. Лукасевич запропонував 3-значні логіки для опису модальних висловлень, третє істиннісне значення трактувалось як "можливо", "нейтрально", "невизначено".

Опис модальностей за допомогою 3-значної логіки був не зовсім адекватний, далі розвиток модальних логік пішов іншими шляхами.

В 1921 р. Е. Пост запропонував  $n$ -значні логіки. Це зроблено цілком формально, без семантичного обґрунтування.

Найвідомішими з 3-значних є сильна та слабка логіки С. Кліні.

Вони запропоновані для використання в теорії рекурсії.

Сильна логіка Кліні застосовується в системах алгоритмічних алгебр, мовах табличних баз даних.

3-значна логіка Бочвара (логіка абсурду): де третє істиннісне значення трактується як "беззмістовно". Це фактично слабка логіка Кліні, розширена так званими зовнішніми логічними зв'язками, в яких для результатів ототожнено хибність та беззмістовність.

Нехай  $Bool = \{b_1, \dots, b_n\}$  –  $n$ -елементна множина істиннісних значень.

Функція вигляду  $P : D \rightarrow Bool$  –  $n$ -предикат на множині  $D$ .

Якщо  $Bool = \{T, F\}$ , то маємо традиційний 2-значний предикат.

Назвемо його 2-предикатом на множині  $D$ .

### 3-значна логіка Лукасевича

В нащій термінології – це логіка тотальних однозначних 3-предикатів.

В логічній системі Лукасевича було три класи висловлень – істинні, хибні, невизначені. Позначаючи третє істиннісне значення як  $\perp$ , отримуємо такі визначення логічних зв'язок 3-значної логіки Лукасевича:

$$(\neg_{\perp} P)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = F \\ F \text{ якщо } (P)d = T \\ \perp \text{ якщо } (P)d = \perp \end{cases}$$

$$(P \vee_{\perp} Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = T \text{ або } (Q)d = T \\ F \text{ якщо } (P)d = F \text{ та } (Q)d = F \\ \perp \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_{\perp} Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = F \text{ та } (Q)d = T \\ F \text{ якщо } (P)d = F \text{ або } (Q)d = F \\ \perp \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$\text{Властивості } (P \rightarrow_L Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = F \text{ або } (Q)d = T \\ \text{ або } (P)d \in Q, d \\ F \text{ якщо } (P)d = T \text{ та } (Q)d = F \\ \perp \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Еквіваленцію  $\leftrightarrow_L$  тлумачимо як похідну зв'язку:

$$P \leftrightarrow_L Q \text{ означає } (P \rightarrow_L Q) \&_L (Q \rightarrow_L P).$$

Лукасевичеві імплікація та еквіваленція відрізняються від імплікації та еквіваленції логіки 2-значних часткових предикатів:

якщо  $P(d) = P(d) = \perp$ , то  $(P \rightarrow_L Q)(d) = T$  та  $(P \leftrightarrow_L Q)(d) = T$ .

Аргументація така. При трактуванні  $\perp$  як "проміжного" між  $F$  та  $T$  істиннісного значення, імплікація  $A \rightarrow_L B$  має бути істинною, якщо істинність  $B$  не менша за істинність  $A$ . При такому трактуванні стає неможливим стандартне подання імплікації через диз'юнкцію та заперечення:  $P \rightarrow_L Q = \neg_L P \vee_L Q$  невірно.

В логіці 2-значних часткових предикатів теж можна ввести зв'язки, аналогічні  $\rightarrow_L$  та  $\leftrightarrow_L$  (замість  $\perp$  пишемо "невизначене").

Проте такі зв'язки вже не будуть монотонними.

Я.Лукасевич далі розвинув 3-значні логіки до 4-значних та багатозначних.

Він пов'язав ідею багатозначних логік з теорією ймовірності, коли істиннісні значення можуть братися з неперервного інтервалу  $[0, 1]$ .

Цей підхід привів до ймовірнісних, можливісних та нечітких логік.

## Багатозначні логіки Поста

Е. Пост запропонував свої багатозначні логіки (тотальних однозначних предикатів) майже одночасно з Лукасевичем, проте зробив це цілком формально, не беручи до уваги філософські та власне логічні мотиви.

Логічні функції (предикати)  $n$ -значної логіки Поста набувають значення в множині  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Диз'юнкція й кон'юнкція задаються так, як в багатозначній логіці Я. Лукасевича:

$$(P \vee_P Q)(d) = \max(P(d), Q(d));$$

$$(P \&_P Q)(d) = \min(P(d), Q(d)).$$

Пост запропонував два варіанти заперечення – традиційне  $\neg_P$  (як у Лукасевича) і циклічне  $\sim_P$ . Як композиції предикатів їх визначаємо так:

$$(\neg_P P)(d) = n+1 - P(d);$$

$$(\sim_P P)(d) = \begin{cases} P(d)+1, & \text{якщо } P(d) < n \\ P(d), & \text{якщо } P(d) = n \end{cases}$$

Кон'юнкція, диз'юнкція і  $\neg_P$  пов'язані законами де Моргана.

Імплікація визначається так:

$$(P \rightarrow_P Q)(d) = \min(n, n - P(d) + Q(d)).$$

Пост також визначив низку інших логічних зв'язок.

### 3-значні логіки Кліні

Сильна 3-значна логіка Кліні тотальних однозначних 3-предикатів.

Істиннісні значення такої логіки позначаємо  $T, F, \perp$ .

Сильні Клінієві зв'язки  $\neg_K, \vee_K, \&_K, \rightarrow_K$  задаються так.

$$(\neg_K P)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = F \\ F \text{ якщо } (P)d = T \\ \perp \text{ якщо } (P)d = \perp \end{cases}$$

$$(P \vee_K Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = T \text{ або } (Q)d = T \\ F \text{ якщо } (P)d = F \text{ та } (Q)d = F \\ \perp \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_K Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = T \text{ та } (Q)d = T \\ F \text{ якщо } (P)d = F \text{ або } (Q)d = F \\ \perp \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \rightarrow_K Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = F \text{ або } (Q)d = T \\ F \text{ якщо } (P)d = T \text{ та } (Q)d = F \\ \perp \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$



Визначення логічних зв'язок  $\neg_K$ ,  $\vee_K$ ,  $\&_K$  збігаються з визначення логічних зв'язок Лукасевича  $\neg_L$ ,  $\vee_L$ ,  $\&_L$ , проте імплікація  $\rightarrow_K$  задається не так, як  $\rightarrow_L$ .

Для Клінієвих зв'язок, зокрема, маємо:

$$P \&_K Q = \neg_K (\neg_K P \vee_K \neg_K Q);$$

$$P \rightarrow_K Q = \neg_K P \vee_K Q.$$

Еквіваленція  $\leftrightarrow_K$  визначається традиційно:

$$P \leftrightarrow_K Q \text{ означає } (P \rightarrow_K Q) \&_K (Q \rightarrow_K P).$$

Таким чином, за базові можна взяти композиції  $\neg_K$  та  $\vee_K$ , тоді  $\&_K$ ,  $\rightarrow_K$ ,  $\leftrightarrow_K$  є похідними.

Слабка 3-значна логіка Кліні тотальних однозначних 3-предикатів.

Тут значення композицій вважається невизначеним, якщо хоча б один аргумент невизначений.

Слабкі Клінієві зв'язки  $\vee_W$  та  $\&_W$  задаються так.

$$(P \vee_W Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d, \downarrow (Q)d \uparrow \text{ та} \\ \text{або } P(d) \Rightarrow T, \quad Qd = T \\ F \text{ якщо } (P)d = (Q)d = F \\ \perp \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_W Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = (Q)d = T \\ F \text{ якщо } (P)d, \downarrow (Q)d \uparrow \text{ та} \\ \text{або } P(d) = F, \quad Qd = F \\ \perp \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Заперечення  $\neg_W$  задається так, як  $\neg_K$ .

Імплікація  $\rightarrow_W$  та еквіваленція  $\leftrightarrow_W$  є похідними, вони визначаються так:

$$P \rightarrow_W Q \text{ задається як } \neg_W P \vee_W Q;$$

$$P \leftrightarrow_W Q \text{ задається як } (P \rightarrow_W Q) \&_W (Q \rightarrow_W P).$$

Сильні Клінієві зв'язки – монотонні розширення відповідних слабких.

## 4-значна логіка Белнапа

Дослідження 4-значних логік започаткував Я.Лукасевич.

Особливої уваги серед 4-значних заслуговує логіка Белнапа.

Це зумовлено її застосуванням для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією.

Логіка Белнапа має сильний епістемічний відтінок, вона є зручним засобом формалізації відповідей на питання, якщо інформаційна система містить суперечливі дані.

При описі епістемічного стану системи треба брати до уваги як можливу суперечливість інформації, так і її відсутність.

Згідно Белнапу, інформаційна система працює в режимі запитання-відповідь. При цьому інформаційні повідомлення, які система отримує з різних джерел, можуть бути підтверджені чи спростовані. Тому необхідно, щоб система не ігнорувала суперечливу інформацію і була в змозі продовжити в розумний спосіб функціонування навіть тоді, коли виявлено суперечності. Традиційна 2-значна логіка в таких ситуаціях не працює: для неї наявність суперечності руйнує систему.

Можна виділити 4 випадки.

1. Отримане системою повідомлення було підтверджено і ніколи не було спростовано. Таке повідомлення вважається *істинним*, позначається як  $T$ .
2. Отримане системою повідомлення було спростовано та ніколи не було підтверджено. Таке повідомлення вважається *хибним*, позначається як  $F$ .
3. Отримане системою повідомлення було як підтверджено, так і спростовано. (ситуація вельми типова, наприклад, експериментальні результати різних груп можуть істотно відрізнятися; окрім того, людині властиво помилятися. Таке повідомлення можна вважати *парадоксальним*, позначаємо його як  $TF$ .)
4. Система не має ні підтвердження, ні спростування повідомлення, про його істиннісне значення нічого не відомо. Тоді істиннісне значення повідомлення *невизначене*, його позначаємо як  $\perp$ .

Таким чином, отримуємо логіку з множиною істиннісних значень

$\{T, F, TF, \perp\}$ .

Відповідно до смислів цих значень, Белнап отримав єдине продовження класичних логічних зв'язок  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\&$  із  $\{T, F\}$  на  $\{T, F, TF, \perp\}$ .

Він виходив із мінімальних припущень:

- монотонності, стандартних визначень класичних  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\&$  на  $\{T, F\}$
- природних обмежень для  $\vee$  і  $\&$ :

$$P \& Q = P \Leftrightarrow P \vee Q = Q \quad \text{та} \quad P \& Q = Q \Leftrightarrow P \vee Q = P.$$

Зв'язки 4-значної логіки Белнапа  $\vee_B$ ,  $\neg_B$ ,  $\&_B$  задаються так.

$$(\neg_B P)(d) = \begin{cases} F & \text{якщо } (P)d = F \\ T & \text{якщо } (P)d = T \\ TF & \text{якщо } (P)d = TF \\ \perp & \text{якщо } (P)d = \perp \end{cases}$$

$$(P \vee_B Q)(d) = \left\{ \begin{array}{l} T \text{ якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T \\ \text{або } ((P(d) = \overline{T}) \wedge (Q(d) \neq \perp) \\ \text{або } ((P(d) \neq \perp) \wedge (Q(d) = \overline{T}, F) \\ \text{якщо } ((P(d) \neq F) \wedge (Q(d) = F) \\ TF \text{ якщо } ((P(d) = TF) \wedge (Q(d) = TF) \\ \text{або } ((P(d) \neq \overline{TF}) \wedge (Q(d) = F) \\ \text{або } ((P(d) \neq F) \wedge (Q(d) = TF) \\ \perp \text{ якщо } ((P(d) = \overline{F}) \wedge (Q(d) \neq \perp) \\ \text{або } ((P(d) \neq \perp) \wedge (Q(d) \neq F) \\ \text{або } ((P(d) \neq \perp) \wedge (Q(d) = \perp) \end{array} \right.$$

$$(P \&_B Q)(d) = \left\{ \begin{array}{l} T \text{ якщо } P(d) = T \wedge Q(d) = T \\ F \text{ якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F \\ \text{або } ((P(d) = \overline{T}) \wedge (Q(d) \neq \perp) \\ \text{або } ((P(d) \neq \perp) \wedge (Q(d) = \overline{T}, F) \\ TF \text{ якщо } ((P(d) = TF) \wedge (Q(d) = TF) \\ \text{або } ((P(d) \neq \overline{TF}) \wedge (Q(d) = T) \\ \text{або } ((P(d) = T) \wedge (Q(d) = TF), \\ \perp \text{ якщо } ((P(d) = T) \wedge (Q(d) = \perp) \\ \text{або } ((P(d) \neq \perp) \wedge (Q(d) \neq T) \\ \text{або } ((P(d) \neq \perp) \wedge (Q(d) \neq \perp) \end{array} \right.$$

Визначення пропозиційних зв'язок  $\vee_B$ ,  $\neg_B$ ,  $\&_B$  можна традиційно подати у вигляді таблиць істинності.

Імплікація  $\rightarrow_B$  та еквіваленція  $\leftrightarrow_B$  похідні, визначаються традиційно:

$P \rightarrow_B Q$  задається як  $\neg_B P \vee_B Q$ ;

$P \leftrightarrow_B Q$  задається як  $(P \rightarrow_B Q) \&_W (Q \rightarrow_B P)$ .

Логіка Белнапа – це 4-значна логіка тотальних однозначних предикатів.

Водночас її можна трактувати як 3-значну логіку *часткових* однозначних предикатів з множиною істиннісних значень  $\{T, F, TF\}$ . Таке трактування виглядає більш прийнятним з погляду обчислюваності: при переході від часткових до тотальних відображень обчислюваність може порушуватися.

*Зауваження.* Використання 3-значних логік тотальних однозначних предикатів, зокрема, сильної логіки Кліні, для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією видається неадекватним, адже  $\perp$  та  $TF$  ототожнювати не можна, вони мають різний статус.

Те саме стосується 2-значної логіки часткових однозначних предикатів, яка відповідає сильній логіці Кліні.

## Нескінченнозначні логіки

Якщо множина істиннісних значень нескінченна, логіку називають *нескінченнозначною*.

Для нескінченнозначних *неперервних* логік множиною істиннісних значень є інтервал  $[a, b]$ . Без обмежень загальності беремо інтервал  $[0, 1]$ .

Логічні зв'язки  $\neg_c$ ,  $\vee_c$ ,  $\&_c$ , неперервної логіки задаються так:

$$(\neg_c P)(d) = 1 - P(d);$$

$$(P \vee_c Q)(d) = \max(P(d), Q(d));$$

$$(P \&_c Q)(d) = \min(P(d), Q(d));$$

$$(P \rightarrow_c Q)(d) = \max(1 - P(d), Q(d)).$$

До нескінченнозначних в певному розумінні можна віднести інтуїціоністську логіку, алгебраїчними моделями якої є псевдобулеві алгебри – дистрибутивні ґратки з відносним псевдодоповненням.

Нескінченнозначними є такі спеціальні логіки:

ймовірнісні, можливісні, нечіткі.



## БАГАТОЗНАЧНІ ЛОГІКИ ТА ДВОЗНАЧНІ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ

Розглянемо зв'язки традиційних двозначних КНЛ часткових предикатів та багатозначних логік.

Нагадаємо: семантичними моделями КНЛ є предикатні композиційні системи – трійки вигляду  $(D, Pr, C)$ , де  $D$  – множина даних,  $Pr$  – множина предикатів, заданих на  $D$ ,  $C$  – множина композицій породження нових предикатів, яка задається множиною базових композицій відповідного рівня

ПКС  $(D, Pr, C)$  задає алгебру даних  $(D, Pr)$  та композиційну алгебру предикатів  $(Pr, C)$ , терми якої трактуються як формули мови логіки.

Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного, кванторного рівнів множини їх композицій позначимо  $C_P$ ,  $C_R$ ,  $C_Q$ , вони задаються множинами базових композицій

$$\{\neg, \vee\}, \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\}, \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}.$$

Множини тотальних однозначних, часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів будемо позначати як  ${}_{TS}Pr$ ,  ${}_{PS}Pr$ ,  ${}_{TM}Pr$ ,  ${}_{PM}Pr$ . Для  $V$ -квазіарних предикатів на  $A$  маємо такі відповідні позначення:  ${}_{TS}Pr^A$ ,  ${}_{PS}Pr^A$ ,  ${}_{TM}Pr^A$ ,  ${}_{PM}Pr^A$ .

## Логіки тотальних неоднозначних і часткових однозначних предикатів та 3-значні логіки

Розглянемо композиційні предикатні алгебри часткових однозначних 2-предикатів  $(_{PS}Pr, C_P)$ ,  $(_{PS}Pr^A, C_R)$ ,  $(_{PS}Pr^A, C_Q)$  та тотальних неоднозначних 2-предикатів  $(_{TM}Pr, C_P)$ ,  $(_{TM}Pr^A, C_R)$ ,  $(_{TM}Pr^A, C_Q)$  відповідно пропозиційного, реномінативного, кванторного рівнів.

Беручи до уваги дуальність неокласичної та пересиченої семантик, маємо (тут дуальні предикати  $Q \in _{PS}Pr$  та  $Q' \in _{TM}Pr$ ):

$$(\neg P)' = \neg(P');$$

$$(P \vee Q)' = (P') \vee (Q');$$

$$(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))' = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P');$$

$$(\exists xP)' = \exists x(P').$$

**Теорема 1.** Ізоморфними є наступні пари композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів:

- 1)  $(_{PS}Pr, C_P)$  та  $(_{TM}Pr, C_P)$  ізоморфні;
- 2)  $(_{PS}Pr^A, C_R)$  та  $(_{TM}Pr^A, C_R)$  ізоморфні;
- 3)  $(_{PS}Pr^A, C_Q)$  та  $(_{TM}Pr^A, C_Q)$  ізоморфні.

Розглянемо зв'язок логіки тотальних неоднозначних 2-предикатів та сильної логіки Кліні тотальних однозначних 3-предикатів. Істиннісні значення такої логіки позначаємо  $T, F, TF$ . Логічні зв'язки (пропозиційні композиції) цієї логіки позначимо відміткою  $K$ .

Клінієві зв'язки  $\neg_K, \vee_K, \&_K$  задаються так.

$$(\neg_K P)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = F \\ F \text{ якщо } (P)d = T \\ TF \text{ якщо } (P)d = TF \end{cases}$$

$$(P \vee_K Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = T \text{ або } (Q)d = T \\ F \text{ якщо } (P)d = F \text{ та } (Q)d = F \\ TF \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_K Q)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (P)d = T \text{ та } (Q)d = T \\ F \text{ якщо } (P)d = F \text{ або } (Q)d = F \\ TF \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для Клінієвих зв'язок маємо:  $P \&_K Q = \neg_K (\neg_K P \vee_K \neg_K Q)$ ,  $P \rightarrow_K Q = \neg_K P \vee_K Q$ .

Таким чином, за базові можна взяти  $\neg_K$  та  $\vee_K$ , тоді  $\&_K$  та  $\rightarrow_K$  є похідними.

Пропозиційна композиційна алгебра Кліні тотальних 3-предикатів – це композиційна предикатна алгебра  $(Pr_K, C_K)$ , де  $Pr_K$  – множина тотальних однозначних 3-предикатів на  $D$ , а  $C_K$  задається базовими комп-ми  $\neg_K$  та  $\vee_K$ .

Трактуючи невизначеність як спеціальне значення (тут аналогічне  $TF$ ), маємо повну відповідність визначень Клінієвих зв'язок та пропозиційних композицій логіки часткових однозначних 2-предикатів, тому останні теж називають Клінієвими.

Це є підставою для традиційного переходу від часткових до тотальних відображень. Проте такий перехід порушує адекватність подання багатьох властивостей часткових відображень, зокрема, обчислюваності.

Отримуємо ізоморфізм пропозиційної композиційної алгебри  $(_{PS}Pr, C_P)$  та алгебри Кліні  $(Pr_K, C_K)$ . Враховуючи теорему 1, отримуємо:

**Теорема 2.** Пропозиційна композиційна алгебра Кліні  $(Pr_K, C_K)$ , пропозиційна композиційна алгебра  $(_{PS}Pr, C_P)$  часткових однозначних 2-предикатів та пропозиційна композиційна алгебра  $(_{TM}Pr, C_P)$  тотальних неоднозначних 2-предикатів – ізоморфні.

Ці результати поширимо на реномінативний і першопорядковий рівні.

Композиція реномінації однотипно визначається для функцій різних класів, зокрема, для 2-предикатів, 3-предикатів, 4-предикатів.

Для тотальних однозначних 3-предикатів задамо композиції  $\exists x_K$  і  $\forall x_K$ :

$$(\exists x_K P)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо існує } b \in A \text{ } (P \ d \nabla x \ \boxtimes ) b = T \\ F \text{ якщо } (P \ d \nabla x \ \boxtimes ) a \downarrow = F \text{ для всіх } a \in A \\ TF \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(\forall x_K P)(d) = \begin{cases} F \text{ якщо існує } b \in A \text{ } (P \ d \nabla x \ \boxtimes ) b = F \\ T \text{ якщо } (P \ d \nabla x \ \boxtimes ) a \downarrow = T \text{ для всіх } a \in A \\ TF \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Предикатну алгебру  $({}_K Pr^A, C_{KR})$ , де  ${}_K Pr^A$  – множина тотальних однозначних 3-предикатів на  $A$ , а  $C_{KR}$  задається базовими  $\neg_K$ ,  $\forall_K$  та реномінації, назвемо реномінативною композиційною алгеброю Кліні.

Предикатну алгебру  $({}_K Pr^A, C_{KQ})$ , де  ${}_K Pr^A$  – множина тотальних однозначних 3-предикатів на  $A$ , а  $C_{KQ}$  задається базовими композиціями  $\neg_K$ ,  $\forall_K$ ,  $\exists x_K$  та реномінації, назвемо (першопорядковою) кванторною композиційною алгеброю Кліні.

**Теорема 3.** 1) Реномінативна композиційна алгебра Кліні  $({}_K Pr^A, C_{KR})$  та реномінативна композиційна алгебра часткових однозначних 2-предикатів  $({}_{PS} Pr^A, C_R)$  ізоморфні;

2) кванторна композиційна алгебра Кліні  $({}_K Pr^A, C_{KQ})$  та кванторна композиційна алгебра часткових однозначних 2-предикатів  $({}_{PS} Pr^A, C_Q)$  ізоморфні.

**Наслідок 1.** Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів маємо:

1)  $({}_{PS} Pr, C_P), ({}_{TM} Pr, C_P)$  та  $(Pr_K, C_K)$  ізоморфні;

2)  $({}_{PS} Pr^A, C_R), ({}_{TM} Pr^A, C_R)$  та  $({}_K Pr^A, C_{KR})$  ізоморфні;

3)  $({}_{PS} Pr^A, C_Q), ({}_{TM} Pr^A, C_Q)$  та  $({}_K Pr^A, C_{KQ})$  ізоморфні.

## Логіки часткових неоднозначних і часткових однозначних предикатів та 4-значні логіки

Логікам часткових однозначних та тотальних неоднозначних 2-предикатів відповідає певна логіка тотальних однозначних 3-предикатів – сильна 3-значна логіка Кліні.

Постає питання, які саме логіки часткових однозначних та тотальних однозначних предикатів будуть відповідати логікам часткових неоднозначних 2-предикатів. Зрозуміло, що це мають бути логіка часткових однозначних 3-предикатів та логіка тотальних однозначних 4-предикатів.

Істиннісні значення першої логіки позначаємо як  $T, F, TF$ , а її логічні зв'язки та квантори – як  $\neg_S, \vee_S, \&_S, \rightarrow_S, \exists x_S, \forall x_S$ .

Істиннісні значення другої логіки позначаємо як  $T, F, TF, \perp$ , її логічні зв'язки та квантори позначаємо як  $\neg_B, \vee_B, \&_B, \rightarrow_B, \exists x_B, \forall x_B$ .

Трактуючи невизначеність як спеціальне значення  $\perp$ , отримуємо повну відповідність логіки часткових однозначних 3-предикатів та логіки тотальних однозначних 4-предикатів, тому спочатку розглянемо першу.

Кожному частковому неоднозначному 2-предикату  $P : D \rightarrow \{T, F\}$  зіставимо частковий однозначний 3-предикат  $P_S : D \rightarrow \{T, F, TF\}$ :

$$P_S(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } d \in (T)P \text{ та } d \notin (F)P \\ F \text{ якщо } d \in (F)P \text{ та } d \notin (T)P, \\ TF \text{ якщо } d \in (T)P \text{ та } d \in (F)P, \\ \text{невизн., якщо } d \notin T(P) \text{ та } d \notin F(P). \end{cases}$$

З іншого боку, кожному частковому однозначному 3-предикату  $P_S$  зіставляємо частковий неоднозначний 2-предикат  $P$ :

$$T(P) = \{d \in D \mid P_S(d) = T \text{ або } P_S(d) = TF\};$$

$$F(P) = \{d \in D \mid P_S(d) = F \text{ або } P_S(d) = TF\}.$$

Це відповідає наступному визначенню логічної зв'язки  $\neg_S$ :

$$(\neg_S S)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (S)d = F \\ F \text{ якщо } (S)d = T \\ TF \text{ якщо } (S)d = TF \\ \text{невизн., якщо } S(d) \uparrow. \end{cases}$$

Отже, для так заданої зв'язки  $\neg_S$  отримуємо  $\neg_S P_S = (\neg P)_S$ .



Для диз'юнкції маємо (тут  $P \vee Q \in {}_{PM}Pr^A$ ):

$$(P \vee Q)_S(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } d \in (T \ P \vee Q) \text{ та } d \notin (F \ P \vee Q) \\ F \text{ якщо } d \in (F \ P \vee Q) \text{ та } d \notin (T \ P \vee Q) \\ TF \text{ якщо } d \in (T \ P \vee Q) \text{ та } d \in (F \ P \vee Q) \\ \text{невизн., якщо } d \notin (T \ P \vee Q) \text{ та } d \notin (F \ P \vee Q), \end{cases}$$

При наступному визначенні логічної зв'язки  $\vee_S$ :

$$(R \vee_S S)(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } (R \ d) = T \text{ або } (S \ d) = T \\ \text{або } ((R \ d) = F \text{ та } (S \ d) \uparrow) \\ \text{або } ((R \ d) \uparrow \text{ та } (S \ d) = F) \\ \text{якщо } ((R \ d) \neq F \text{ та } (S \ d) = F) \\ TF \text{ якщо } ((R \ d) = TF \text{ та } (S \ d) = TF) \\ \text{або } ((R \ d) \neq TF \text{ та } (S \ d) = F) \\ \text{або } ((R \ d) = F \text{ та } (S \ d) = TF), \\ \text{невизн., якщо } (R(d) = F \text{ та } S(d) \uparrow) \\ \text{або } ((R \ d) \uparrow \text{ та } (S \ d) = F) \\ \text{або } ((R \ d) \uparrow \text{ та } (S \ d) \uparrow) \end{cases}$$

отримуємо  $P_S \vee_S Q_S = (P \vee Q)_S$ .

Діючи подібним чином, можна ввести логічні зв'язки кон'юнкцію  $\&_S$  та імплікацію  $\rightarrow_S$ . При цьому  $P_S \&_S Q_S = (P \& Q)_S$ ,  $P_S \rightarrow_S Q_S = (P \rightarrow Q)_S$ .

Тоді  $\&_S$  та  $\rightarrow_S$  можна виразити через  $\neg_S$  та  $\vee_S$  традиційним способом:

$$R \&_S S = \neg_S (\neg_S R \vee_S \neg_S S);$$

$$R \rightarrow_S S = \neg_S R \vee_S S.$$

Композиція реномінація для різних класів  $n$ -предикатів визначається однотипно.

Розглянемо тепер композицію квантифікації  $\exists x_S$ .

Для предиката  $\exists x P \in {}_{PM}Pr^A$  маємо

$$(\exists x P)_S(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } d \in (T \exists x P) \text{ та } d \notin (F \exists x P), \\ F \text{ якщо } d \in (F \exists x P) \text{ та } d \notin (T \exists x P), \\ TF \text{ якщо } d \in (T \exists x P) \text{ та } d \in (F \exists x P), \\ \text{невизн., якщо } d \notin (T \exists x P) \text{ та } d \notin (F \exists x P), \end{cases}$$

При наступному визначенні композиції  $\exists x_S$ :

$$(\exists x_S R)(d) = \begin{cases}
 \text{Тякщо } (R(d \nabla x \boxtimes) a) = T \text{ для деякого } a \in A \\
 \text{або } ((R(d \nabla x \boxtimes)) a) = T \text{ для деякого } a \in A \\
 \text{та } (R(d \nabla x \boxtimes) b) \uparrow \text{ для деякого } b \in A, \\
 \text{Тякщо } (R(d \nabla x \boxtimes) b) = F \text{ для всіх } b \in A \\
 \text{та } (R(d \nabla x \boxtimes)) a = \text{або} \\
 \text{для всіх } (R(d \nabla x \boxtimes) a) \uparrow \quad a \in A, \\
 TF \text{ якщо } (R(d \nabla x \boxtimes) b) = TF \text{ або} \\
 \text{для всіх } (R(d \nabla x \boxtimes) b) = F \quad b \in A \\
 \text{для деякого } (R(d \nabla x \boxtimes) a) = TF \quad a \in A \\
 \text{невизн., якщо } R(d \nabla x \boxtimes) a) = F \text{ або} \\
 \text{для всіх } (R(d \nabla x \boxtimes) a) \uparrow \quad a \in A \\
 \text{та } ((R(d \nabla x \boxtimes) b) \uparrow \text{ для деякого } b \in A
 \end{cases}$$

маємо  $\exists x_S P_S = (\exists x P)_S$ .

Подібним чином вводиться композиція  $\forall x_S$ .

Отже, ми природним чином отримали логіку часткових однозначних 3-предикатів із логіки часткових неоднозначних 2-предикатів : композиції  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\rightarrow$ ,  $\exists x$ ,  $\forall x$  індукують відповідні  $\neg_S$ ,  $\vee_S$ ,  $\&_S$ ,  $\rightarrow_S$ ,  $\exists x_S$ ,  $\forall x_S$ .

Предикатну алгебру  $({}_SPr, C_{SP})$ , де  ${}_SPr$  – множина часткових однозначних 3-предикатів, а  $C_{SP}$  задається базовими композиціями  $\neg_S$ ,  $\vee_S$ , назвемо пропозиційною композиційною алгеброю часткових однозначних 3-предикатів.

Предикатну алгебру  $({}_SPr^A, C_{SR})$ , де  ${}_SPr^A$  – множина часткових однозначних 3-предикатів на  $A$ , а  $C_{SR}$  задається базовими композиціями  $\neg_S$ ,  $\vee_S$  та реномінації, назвемо реномінативною композиційною алгеброю часткових однозначних 3-предикатів.

Предикатну алгебру  $({}_SPr^A, C_{SQ})$ , де  ${}_SPr^A$  – множина часткових однозначних 3-предикатів на  $A$ , а  $C_{SQ}$  задається базовими  $\neg_S$ ,  $\vee_S$ ,  $\exists x_S$  та реномінації, назвемо кванторною композиційною алгеброю часткових однозначних 3-предикатів.

Таким чином, справджується

**Теорема 4.** Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів маємо:

- 1)  $({}_{PM}Pr, C_P)$  та  $({}_SPr, C_{SP})$  ізоморфні;
- 2)  $({}_{PM}Pr^A, C_R)$  та  $({}_SPr^A, C_{SR})$  ізоморфні;
- 3)  $({}_{PM}Pr^A, C_Q)$  та  $({}_SPr^A, C_{SQ})$  ізоморфні.

Тут  $({}_{PM}Pr, C_P)$ ,  $({}_{PM}Pr^A, C_R)$ ,  $({}_{PM}Pr^A, C_Q)$  – композиційні предикатні алгебри часткових неоднозначних 2-предикатів відповідного рівня

Враховуючи повну відповідність логіки часткових однозначних 3-предикатів і логіки тотальних однозначних 4-предикатів, для останньої маємо аналогічні визначення композицій  $\neg_B$ ,  $\bigvee_B$ ,  $\exists x_B$ , єдина відмінність полягає у виділенні спеціального значення для невизначеності.

Такі визначення пропозиційних композицій  $\neg_B$ ,  $\bigvee_B$ ,  $\&_B$  можна подати у вигляді таблиць істинності. Виявляється, вони збігаються з визначеннями відповідних логічних зв'язок 4-значної логіки Белнапа.

Таким чином, ми отримали логіку Белнапа із логіки часткових неоднозначних 2-предикатів дуже природним чином: логічні зв'язки  $\neg_B$ ,  $\bigvee_B$ ,  $\&_B$  індукуються відповідними пропозиційними композиціями  $\neg$ ,  $\bigvee$ ,  $\&$ .

4-значна логіка отримана Белнапом, виходячи із певних мінімальних припущень. У нас вона індукована логікою часткових неоднозначних 2-предикатів. Рухаючись різними шляхами, приходимо до одного і того ж результату. Це засвідчує особливу роль логіки Белнапа серед 4-значних логік, подібно до особливої ролі сильної логіки Кліні серед 3-значних.

Предикатну алгебру  $(Pr_B, C_B)$ , де  $Pr_B$  – множина тотальних однозначних 4-предикатів, а  $C_B$  задається базовими композиціями  $\neg_B$  та  $\bigvee_B$ , назвемо пропозиційною композиційною алгеброю Белнапа.

Предикатну алгебру  $({}_B Pr^A, C_{BR})$ , де  ${}_B Pr^A$  – множина тотальних однозначних 4-предикатів на  $A$ , а  $C_{BR}$  задається базовими  $\neg_B$ ,  $\bigvee_B$ , реномінації, назвемо реномінативною композиційною алгеброю Белнапа.

Предикатну алгебру  $({}_B Pr^A, C_{BQ})$ , де  $C_{BQ}$  задається базовими  $\neg_B$ ,  $\bigvee_B$ ,  $\exists x_B$ , реномінації, назвемо кванторною композиційною алгеброю Белнапа.

Згідно повної відповідності логіки часткових однозначних 3-предикатів і логіки тотальних однозначних 4-предикатів, із теореми 4 отримуємо:

**Наслідок 2.** Для композиційних предикатних алгебр пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів маємо:

- 1)  $({}_{PM} Pr, C_P)$ ,  $({}_S Pr, C_{SP})$  та  $(Pr_B, C_B)$  ізоморфні;
- 2)  $({}_{PM} Pr^A, C_R)$ ,  $({}_S Pr^A, C_{SR})$ ,  $({}_B Pr^A, C_{BR})$  ізоморфні;
- 3)  $({}_{PM} Pr^A, C_Q)$ ,  $({}_S Pr^A, C_{SQ})$ ,  $({}_B Pr^A, C_{BQ})$  ізоморфні.

**Висновки.** Між композиційно-номінативними логіками часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних традиційних 2-значних предикатів та 3-значними і 4-значними логіками однозначних предикатів існують безпосередні зв'язки.

2-значним логікам часткових однозначних та тотальних неоднозначних предикатів відповідає 3-значна логіка тотальних однозначних предикатів – сильна 3-значна логіка Кліні.

2-значним логікам часткових неоднозначних предикатів відповідає 4-значна логіка тотальних однозначних предикатів – логіка Белнапа.

Встановлено ізоморфізм композиційної алгебри Кліні тотальних однозначних предикатів 3-значної логіки та композиційних алгебр тотальних неоднозначних і часткових однозначних предикатів 2-значної логіки, ізоморфізм композиційної алгебри Белнапа тотальних однозначних предикатів 4-значної логіки та композиційних алгебр часткових однозначних предикатів 3-значної логіки і часткових неоднозначних предикатів 2-значної логіки.

Це засвідчує особливе місце сильної логіки Кліні серед 3-значних та логіки Белнапа серед 4-значних.