# Целые неотрицательные числа

## Арифметические действия с целыми неотрицательными числами

# Деление

**Электронный конспект для студентов**

**педагогических колледжей**

**Составитель:**
**преподаватель**
**Московского педагогического колледжа №8 «Измайлово»**
**Апарцева В. М.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке.**

# Содержание:


- Понятие частного целого неотрицательного числа и натурального;
- Связь деления с умножением;
- Порядок действий;
- Отношение делимости. Теорема о единственности частного. Признаки делимости;
- Деление с остатком.
- Свойства деления;
- Алгоритм письменного деления;
- Изучение действия деления в начальном курсе математики.


Множество No

Сложение

Вычитание

Умножение

С помощью этих кнопок можно перейти в электронные конспекты по указанным темам.

Для возвращения в данный конспект нажмите <esc>.

Завершение работы

Для продолжения работы щелкните мышкой по соответствующей теме

# Деление целого неотрицательного числа на натуральное

Возврат в оглавление

В начальной школе знакомство с делением происходит при рассмотрении 2-х видов задач, раскрывающих конкретный смысл данного действия: ?

деление по содержанию; деление на равные части.

**Задание:** Составьте данные задачи по сюжетам, которые появятся на экране после щелчка мышкой по оранжевому или зеленому кругам.

При ознакомлении с делением младшие школьники для нахождения частного выполняют предметные действия с множеством, которое разбивают на равночисленные непересекающиеся подмножества (классы). Эти действия соответствуют такому определению частного:

**Определение 15:** Частным целого неотрицательного числа **a** и натурального числа **b** называется целое неотрицательное число **c,** которое является:

- количеством классов, полученных при разбиении множества ***A***, численность которого равна **a** (**n(*A*)=a**) на равночисленные классы по **b** элементов в каждом;
- численностью класса, полученного при разбиении множества ***A***, численность которого равна **a** (**n(*A*)=a**) на **b** равночисленных классов.

Числа называются: **a – делимое, b - делитель, c – частное,**
запись **a : b** так же называется – **частное.**

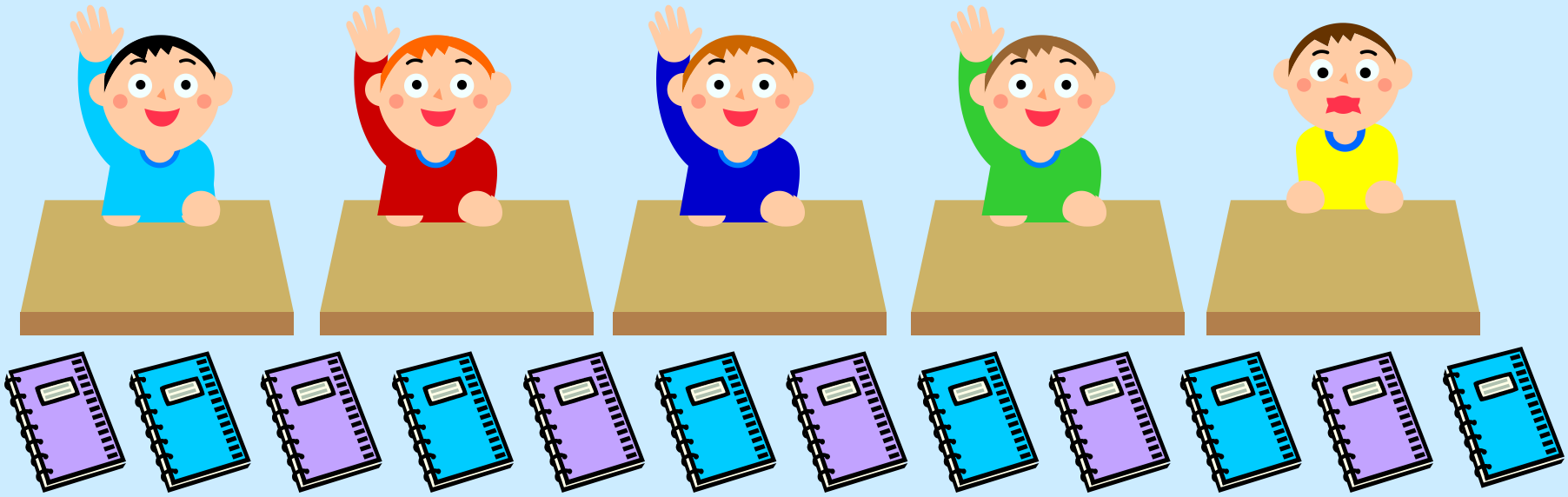
**Определение 16:** Действие, посредством которого находится частное, называется **деление**.

**Задание:** Укажите, какая часть **определения 15** относится к случаю ***деления по содержанию***, а какая к случаю ***деления на равные части***.

**Продолжите предложение. Чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопке с**

**Для продолжения работы вернитесь в оглавление щелкнув мышкой по кнопке с изображением экрана.**

# Деление по содержанию

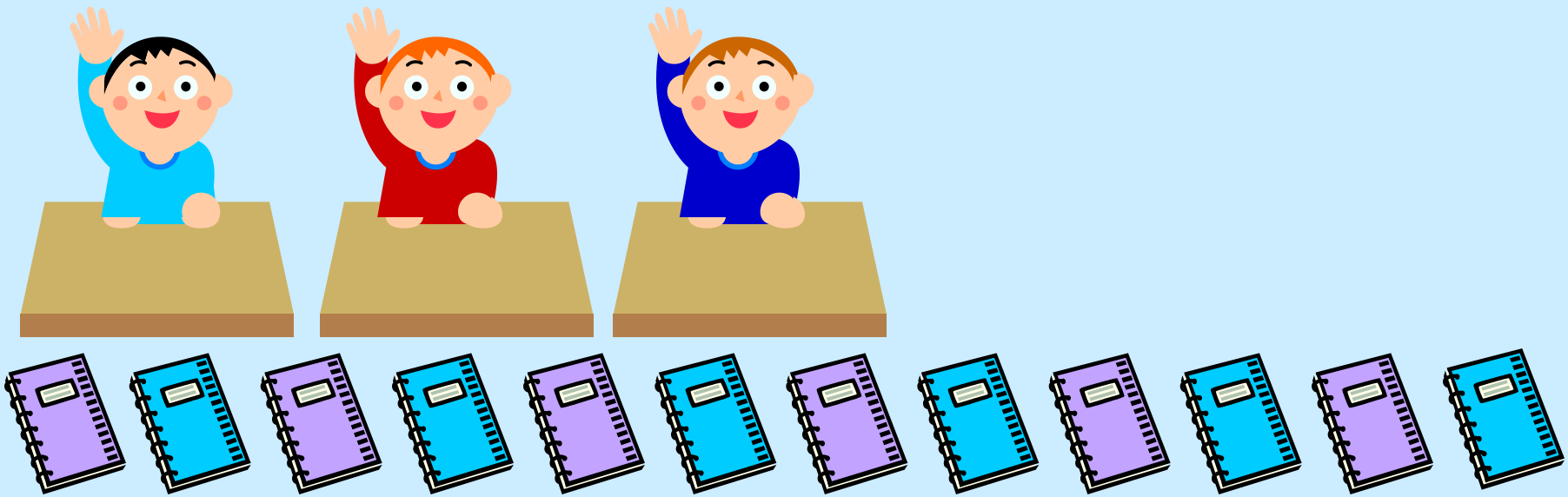


В этой задаче множество ***A*** – тетрадей, **n(*A*) = 12**, разбили на равночисленные подмножества (классы) по 3 элемента (тетради) в каждом. Решая задачу, дети выясняют, сколько классов (учеников) получилось.

**Задание:** Составьте свою задачу на данный вид деления и разберите ее с точки зрения теории множеств.

**Заставьте задачу на данной доли с тетради.**
**Для проверки работы целиком шкой по управляющим экрана.**

# Деление на равные части



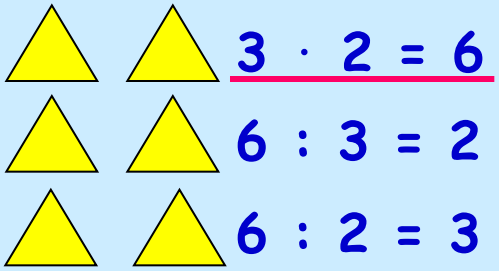
В этой задаче множество $A$ – тетрадей, $n(A) = 12$, разбили на $3$ равночисленных класса (раздали трем ученикам). Решая задачу, дети выяснят, сколько тетрадей ? в каждом классе.

**Задание:** Составьте свою задачу на данный вид деления и разберите ее с точки зрения теории множеств.

Заставьте задачу на данной доске предложение.
Для проверки работы целиком мышкой по управляющей кнопке.

# Связь деления с умножением

Возврат в оглавление




При ознакомлении с делением младшие школьники находят результат, производя предметные действия с множествами.
Знания взаимосвязи между действиями умножение и деление позволяет перейти от предметных поисков результата действия деления, к поиску ответа с помощью рассуждений.

Для установления этой взаимосвязи, можно предложить детям задание:
Нарисуй треугольники в **2** столбика по **3** в каждом. Сколько треугольников получилось?
Отвечая на данный вопрос, дети составят равенство.
Учитель может предложить детям два обратных задания, после выполнения которых дети получат еще два равенства.

**Задание:** Сформулируйте задания для получения 2-го и 3-го равенства.

Значение выражений **6 : 3** и **6 : 2** дети могут найти, используя результат, полученный в выражении **2 · 3**, с помощью следующих рассуждений: «Шесть – это два умноженное на три, значит, если шесть разделить на три – будет два».

**Задание:** Запишите рассуждения детей при решении примера **6 : 2**.

В основе таких рассуждений лежит следующее определение частного:

**Определение 17:** Частным целого неотрицательного числа **a** и натурального числа **b** называется целое неотрицательное число **c**, являющееся корнем уравнения: **x · b = a** или **b · x = a**.

Таким образом: верно утверждение: «**a : b = c** тогда и только тогда, когда **b · c = a**».

**Запишите это в тетрадь и выполните задание.**

**Для продолжения работы щелкните по управляющей кнопке**
**Для продолжения работы щелкните мышкой по любому месту экрана**

# Связь деления с умножением (продолжение)

Возврат в оглавление

Определение 17 лежит в основе следующего общего правила для нахождения результата действия деления, которое усваивают младшие школьники:
«Чтобы найти частное можно подобрать такое число, которое при умножении на делитель дает делимое»

Определение 17 связывает действия умножение и деление. Используя это определение, можно вывести правила нахождения неизвестного числа в этих действиях по известному результату и второму числу. Это правила:

## нахождение неизвестного множителя

***Чтобы найти неизвестный множитель, достаточно произведение разделить на известный множитель.***

## нахождение неизвестного делимого

***Чтобы найти неизвестное делимое, достаточно частное умножить на делитель.***

## нахождение неизвестного делителя

***Чтобы найти неизвестный делитель, достаточно делимое разделить на частное.***

**Сформулируйте и запишите эти правила. Чтобы проверить себя, щелкните**
**Запишите эту рядом, заставив соответствующие правила.**
**Запишите это в тетрадь и щелкните мышкой по любому полю экрана**
**Для продолжения работы щелкните мышкой по любому полю экрана**

# Связь деления с умножением (продолжение)

Возврат в оглавление

Ознакомление младших школьников с этими правилами может проводиться при рассмотрении троек равенств. Например, для введения правил нахождения неизвестных делимого и делителя можно рассмотреть такую тройку равенств:

$$8 : 2 = 4$$
$$4 \cdot 2 = 8$$
$$8 : 4 = 2$$

Эти тройки могут быть даны детям в готовом виде или могут быть получены ими в результате решения взаимно обратных задач.

Пример такой работы был рассмотрен в конспекте «Вычитани

Эти тройки могут быть даны детям в готовом виде или могут быть получены ими в результате решения взаимно обратных задач.

Пример такой работы был рассмотрен в конспекте «Вычитание».

**Задание:** Подберите задания и обратные к ним для введения правил **нахождения неизвестных делимого и делителя** и **нахождения неизвестного множителя.** Придумайте иллюстрацию этих задач. Запишите вопросы учителя и предполагаемые ответы учеников.

---

**Решение уравнений.** После ознакомления с правилами нахождения неизвестного числа в действиях умножение и деление дети могут решать простейшие уравнения вида:

$6 \cdot x = 24$ $\quad x : 4 = 7$ $\quad 36 : x = 9$

$$6 \cdot x = 24$$
$$x = 24 : 6$$
$$x = 4$$
$$6 \cdot 4 = 24$$

Рассуждения учеников при решении уравнения могут быть такими:

- уравнение содержит действие умножение, значит нам неизвестен 2-ой множитель;
- чтобы найти 2-ой множитель, мы произведение **24** разделим на 1-ый множитель **6** и находим **x**. 2-ой множитель равен **4**.
- проверяем: **шесть** умножить на **четыре** – получится **двадцать четыре**.

**Если Вы хотите перейти в конспект «Вычитание» и еще раз посмотреть пример работы с задачами, щелкните мышкой по выделенному слову «Вычитание». Для возвращения можно нажать клавишу «ESC».**

**Задание:** Запишите рассуждения учеников при решении остальных уравнений.

**Выполните предложенное задание.**

**Запишите это в тетрадь и щелкните мышкой по голубому полю экрана**

**для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

# Связь деления с умножением (продолжение)

Возврат в оглавление

Младшие школьники знакомятся также с уравнениями, состоящими из двух и более действий. Например: $(x \cdot 16) - 6 = 90$ $\quad 160 : (x + 26) = 4$

$(x + 25) : 7 = 8$ $\quad 28 - (45 : x) = 13$

**Задание:** Запишите рассуждения учеников при решении этих уравнений. Чтобы посмотреть пример рассуждения, щелкните мышкой по кнопке со знаком вопроса, при по

- В данном уравнении последнее действие – вычитание;
- Неизвестное содержится в выражении **(x · 16),** значит нам неизвестно уменьшаемое;
- Чтобы найти это уменьшаемое, мы к разности **90** прибавим вычитаемое **6**. Получаем **96**.
- Полученное уравнение содержит действие умножение, значит нам неизвестен 1-ый множитель.
- Чтобы найти 1-ый множитель, мы произведение **96** разделим на 2-ой множитель **16**. Получаем **6**.
- Проверяем: $6 \cdot 16 = 96$; $96 - 6 = 90$.

$(x \cdot 16) - 6 = 90$

$x \cdot 16 = 90 + 6$

$x \cdot 16 = 96$

$x = 96 : 16$

$x = 6$

$96$

$(6 \cdot 16) - 6 = 90$

**Невозможность деления на 0**

С помощью определения 17 можно объяснить невозможность деления на **0**. Действительно:

- если $a \neq 0$, то нет такого целого неотрицательного числа, которое бы при умножении на **ноль** равнялось бы $a \neq 0$, так как при умножении любого числа на ноль получается ноль. $a : 0$ невозможно!!!
- если $a = 0$, то значение выражения $0 : 0$ неопределенно, так как любое число можно умножить на ноль, чтобы получить ноль.

**Выполните это задание.**

**Для продолжения работы щелкните левой кнопкой мыши по любому месту экрана**

# Порядок действий

Знакомство с порядком выполнения действий начинается в 1-ом классе, когда дети приступают к решению примеров в два и более действий. После введения всех арифметических действий: сложение, вычитание, умножение и деление, дети обобщают полученные знания и формулируют следующие правила:

**Правило 1:** Если выражение содержит только действия сложение и вычитание или только действия умножение и деление, то действия в выражении могут выполняться по порядку.

**Правило 2:** Если выражение содержит одновременно действия сложение или вычитание, а так же умножение или деление, то сначала выполняются действия умножение и деление по ... к с

- произведение тридцати восьми и сорока восьми разделить на сумму тридцати девяти и тридцати семи.
- частное произведения тридцати восьми и сорока восьми и суммы тридцати девяти и тридцати семи.

**Задание 1:** Запишите выражение:
Сумму трехсот шестидесяти девяти и четырехсот семидесяти одного разделить на разность чисел: восемьсот семьдесят два и восемьсот тридцать девять.

**Задание 2:** Запишите, как читается данное выражение: **38 · 48 : (39 + 37)**

**Задание 3:** Выполните действия в данных выражениях и запишите, что с точки зрения определения каждого арифметического действия Вы нашли.

**Выполните эти задания.**

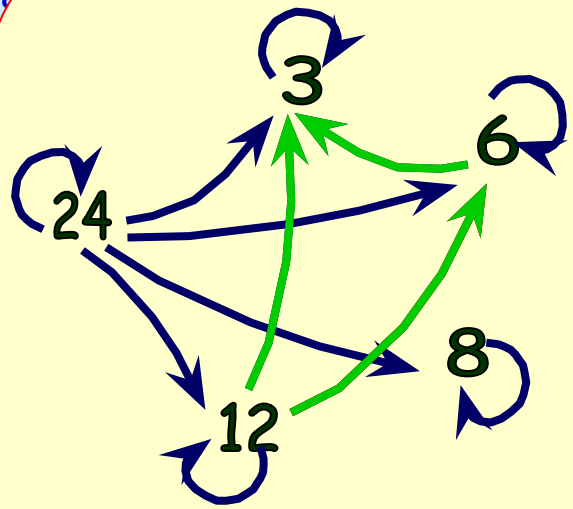
**Чтобы посмотреть варианты чтения второго выражения щелкните по нему**

**Продолжите данные правила. Чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопкам с [illegible] по голубому полю экрана.**

# Отношение делимости

Возврат в оглавление

В начальной школе дети сталкиваются со случаями невыполнимости действия деления на множестве целых неотрицательных чисел. Например, выполняя задание: *Составьте всевозможные примеры на деление с числами 3, 6, 8, 12, 24*, дети видят, что не с каждой па




Для данного отношения справедливы свойства:

- **Рефлексивности** $\forall x \in N$ $x \boxed{\phantom{x}} x$
- **Антисимметричности**
  $\forall x, y \in N$ если $x \boxed{\phantom{x}} y$, то $y \boxed{\phantom{x}} x$ не
- **Транзитивности**
  $\forall x, y, z \in N$ если $x \boxed{\phantom{x}} y$, а $y \boxed{\phantom{x}} z$, то $x \boxed{\phantom{x}} z$
- **Отношение несвязное,** так как найдется пара элементов ***x*** и ***y***, которая не связана данным отношением.

Из этого следует, что данное отношение является отношением нестрогого (***рефлексивность***) частичного (***несвязность***) порядка (***антисимметричность***, ***транзитивность***).

**Запишите это в тетрадь и щелкните мышкой по кнопке с вопросом**

**Задание:** Постройте граф этого отношения на множестве **X**, определите его свойства и вид.

?

Для деления справедлива теорема:

**Теорема:** Если частное целого неотрицательного числа **a** и натурального числа **b** существует, то оно единственно. $(\forall a \in N_0, b \in N)\ (\exists c \in N_0 : c = a : b) \Rightarrow (\exists! c \in N_0)$

**Выполните это задание. Чтобы проверить себя, щелкните мышкой по знаку вопроса.**

**Запишите это в тетрадь и выполните предлагаемое детям задание.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

## Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Опр

Оп

Оп

Оп

- Найдем все простые делители каждого числа:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 48 | 2 | | 72 | 2 |
| 24 | 2 | | 36 | 2 |
| 12 | 2 | | 18 | 2 |
| 6 | 2 | | 9 | 3 |
| 3 | 3 | | 3 | 3 |
| 1 | | | 1 | |

- Найдем общие делители и перемножим их:

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = 24$

Значит D (48, 72 ) = 24

- Для нахождения НОК воспользуемся формулой: $K(a, b) \cdot D(a, b) = a \cdot b$, тогда

$K(a, b) = \dfrac{a \cdot b}{D(a, b)}$, отсюда: $K(48, 72) = \dfrac{48 \cdot 72}{D(48, 72)} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{48}} \cdot 72}{\underset{1}{\cancel{24}}} = 144$

**Замечание:** Для нахождения НОК этих чисел можно было бы одно из чисел, например 48, умножить на те делители второго числа 72, которые отсутствуют среди делителей числа 48:

$\cdot \quad = 144$

Число 24

Для НОД ... $(a, b) = a \cdot b$

**Задание:**

Найдите НОД чисел: 48 и 72; 52 и 78; 54 и 81. Пользуясь данной формулой, найдите НОК этих чисел.

**Выполните задание. Чтобы посмотреть решение, щелкните кнопке с вопросом.**

[illegible]

Возврат в оглавление

# Признаки делимости

позволяют, не производя вычислений, определить: имеет ли рассматриваемое выражение, содержащее действие деление, значение на множестве **No**.

В школьном курсе рассматриваются следующие признаки делимости:

- **делимость суммы:** *Для того чтобы сумма делилась на число достаточно, чтобы каждое слагаемое суммы делилось на это число.*

$\forall\ x, y, z \in No$ если $x \vdots z$, и $y \vdots z$, то $(x + y) \vdots z$

- **делимость разности:** *Для того чтобы разность делилась на число достаточно, чтобы уменьшаемое и вычитаемое делилось на это число.*

$\forall\ x, y, z \in No$ если $x \vdots z$, и $y \vdots z$, то $(x - y) \vdots z$

- **делимость произведения:** *Для того чтобы произведение делилось на число достаточно, чтобы один из множителей делился на это число.*

$\forall\ x, y, z \in No$ если $x \vdots z$ или $y \vdots z$, то $(x \cdot y) \vdots z$

**Задание:** Перепишите данные выражения в три столбика по следующим признакам:

1-ый – те, которые имеют значение на множестве No, и это можно определить по признаку делимости;

2-ой – те, которые не имеют значение на множестве No, и это можно определить по признаку делимости;

3- ий – те, для которых признак применить нельзя?

| | | |
|---|---|---|
| (60 - 20) : 5 | (64 + 28) : 4 | |
| (63 - 23) : 5 | (62 + 26) : 4 | |
| (60 - 23) : 5 | (13 · 17) : 5 | |
| (48 + 23) : 4 | (26 - 20) : 4 | |
| (60 · 28) : 14 | (7 · 22) : 14 | |

**Задание:** Объясните почему данные условия в признаках являются только достаточными? Подтвердите это данными примерами.

**Допишите данные признаки делимости, пользуясь их математической записью.**

**Выполните это задание.**

**Чтобы проверить себя, щелкните мышкой кругу рядом с названием признака.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

# Признаки делимости на однозначные числа

позволяют, не производя вычислений, определить: делится ли заданное число на однозначное или нет. Рассмотрим эти признаки:

- **на 2:** *Для того, чтобы целое неотрицательное число делилось на 2 необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа была четной.*
- **на 3:** *Для того, чтобы целое неотрицательное число делилось на 3 необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа была бы кратна 3 .*
- **на 4:** *Для того, чтобы целое неотрицательное число делилось на 4 необходимо и достаточно, чтобы две последние цифры числа составляли число, кратное 4.*
- **на 5:** *Для того, чтобы целое неотрицательное число делилось на 5 необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа была бы 5 или 0*
- **на 6:** *Для того, чтобы целое неотрицательное число делилось на 6 необходимо и достаточно, чтобы это число было кратно 2 и 3.*
- **на 7:** *Для того, чтобы целое неотрицательное число делилось на 7 необходимо и достаточно, чтобы в значащей части числа разность полного числа десятков и удвоенной цифры единиц была бы кратна 7. Разность может быть отрицательной.*
- **на 8:** *Для того, чтобы целое неотрицательное число делилось на 8 необходимо и достаточно, чтобы три последние цифры числа составляли число кратное 8.*
- **на 9:** *Для того, чтобы целое неотрицательное число делилось на 9 необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа была бы кратна 9.*

**Допишите данные признаки делимости. Чтобы проверить себя, щелкните мышкой кругу рядом с названием признака. Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке.**

**Задание:** Используя признаки делимости, для каждого из приведенных чисел определите однозначные числа, на которые оно делится. **438562, 76545, 384364, 161000**

Признаки делимости можно использовать в рассуждениях при решении задач. Рассмотрим это на примере такой задачи:

*Задача, выгравированная на надгробном камне Диафанта – греческого математика, жившего в III веке н. э.*

*Путник! Здесь прах погребен Диофанта,*
*И числа могут поведать, о чудо,*
*Сколь долог был век его жизни.*
*Часть шестую его представляло счастливое детство,*
*Двенадцатая часть протекла его жизни –*
*Пухом покрылся тогда подбородок.*
*Седьмую в бездетном браке провел Диофант.*
*Прошло пятилетье.*
*Он был осчастливлен рожденьем прекрасного первенца сына,*
*Коему рок половину лишь жизни счастливой и светлой,*
*Дал на земле по сравненью с отцом.*
*И в печали глубокой старец земного удела конец воспринял,*
*Переживши года четыре с тех пор, как сына лишился*
*Скажи, скольких лет жизни достигнув,*
*Смерть воспринял Диофант?*

?

**Решение:**

1. Из условия задачи следует, что возраст Диофанта кратен числам **6, 12,** и **7**.
2. Этому условию удовлетворяют числа: **84, 168, 252** и т. д.
3. Проверим наиболее вероятное число **84 – НОК** этих чисел:

Детство – 84 : 6 = 14 (лет);
Пухом покрылся подбородок – 84 : 12 = 7, 14 + 7 = 21 (год);
Бездетный брак – 84 : 7 = 12,
12 + 21 = 33 (года);
Рождение сына –
33 + 5 = 38 (лет);
Смерть сына – 84 : 2 = 42,
38 + 42 = 80 (лет);
Смерть Диофанта –
80 + 4 = 84 (года).
Ответ: 84 года.

**Перепишите условие задачи. Попробуйте решить ее. Выполните это задание.**
**Чтобы проверить себя, щелкните мышкой по кнопке с вопросом.**
**Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке.**
**Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

Возврат в оглавление

**Задание:** Решите данные задачи, используя в рассуждениях признаки делимости чисел.

***Древнеегипетская задача:***

*Количество (число) и его четвертая часть дают вместе 15. Найти количество.*

***Древнеиндийская задача:***

*Есть кадамба цветок.*
*На один лепесток пчелок пятая часть опустилась.*
*Рядом тут же росла вся в цвету сименгда,*
*И на ней третья часть поместилась.*
*Разность их ты найди, трижды их ты сложи,*
*На кутай этих пчел посади.*
*Лишь одна не нашла себе места нигде,*
*Все летала то взад, то вперед*
*И везде ароматом цветов наслаждалась.*
*Назови теперь мне, подсчитавши в уме,*
*Сколько пчелок всего здесь собралось.*

*Число десятков двузначного числа составляет две трети числа единиц, а число, записанное теми же числами в обратном порядке, больше первоначального на 18. Найти число.*

*Придумайте десятизначное число, состоящее из неповторяющихся цифр, такое что первая слева цифра кратна 1, две первые слева цифры составляют число кратное 2, три первые слева цифры составляют число кратное 3 и т . д.*

**Решите эти задачи дома.**

**Для продолжения работы вернитесь в оглавление.**

# Деление с остатком

Возврат в оглавление

**Определение 24:** Целое неотрицательное число **q** называется частным, а целое неотрицательное число **r** – остатком от деления целого неотрицательного числа **a** на натуральное число **b**, если выполняются следующие условия:
1. $0 \le r < b$; 2. $a = b \cdot q + r$.

Для деления справедлива теорема:

**Теорема:** Для любого целого неотрицательного числа **a** и любого натурального числа **b** существует и притом только одна пара целых неотрицательных чисел **q** и **r**, которые соответственно являются частным и остатком от деления **a** на **b**.
$(\forall a \in N_0, b \in N)\ (\exists!\ q, r \in N_0 : a : b = q\ (ост.\ r))$

Рассмотрим справедливость данной теоремы в различных случаях:

1. $a < b$. $a : b = 0\ (ост.\ a)$. Например: $a = 3$, $b = 5$, тогда : $3 : 5 = 0\ (ост.\ 3)$
2. $a = b$. $a : a = 1\ (ост.\ 0)$. Например: $a = 3$, $b = 3$, тогда: $3 : 3 = 1\ (ост.\ 0)$
3. $a > b$. Например: $a = 23$, $b = 3$. Рассмотрим последовательность произведений: $2 \cdot 3, 3 \cdot 3, 4 \cdot 3, 5 \cdot 3, 6 \cdot 3, 7 \cdot 3, 8 \cdot 3, \ldots, 22 \cdot 3, 23 \cdot 3$. Выберем из них самое большое произведение, меньшее числа 23. Это произведение $3$.
Число $7$ – искомое частное. Теперь найдем остаток.
Для этого от делимого отнимем выбранное произведение: $23 - 7 \cdot 3 = 2$.
Число $2$ – искомый остаток. Запишем решение: $23 : 3 = 7\ (ост.\ 2)$

Деление без остатка можно рассматривать как частный случай деления с остатком. В этом случае остаток равен $0$. Например: $24 : 3 = 8\ (ост.\ 0)$.

**Запишите это в тетрадь. Составьте свой пример.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по любому месту экрана**

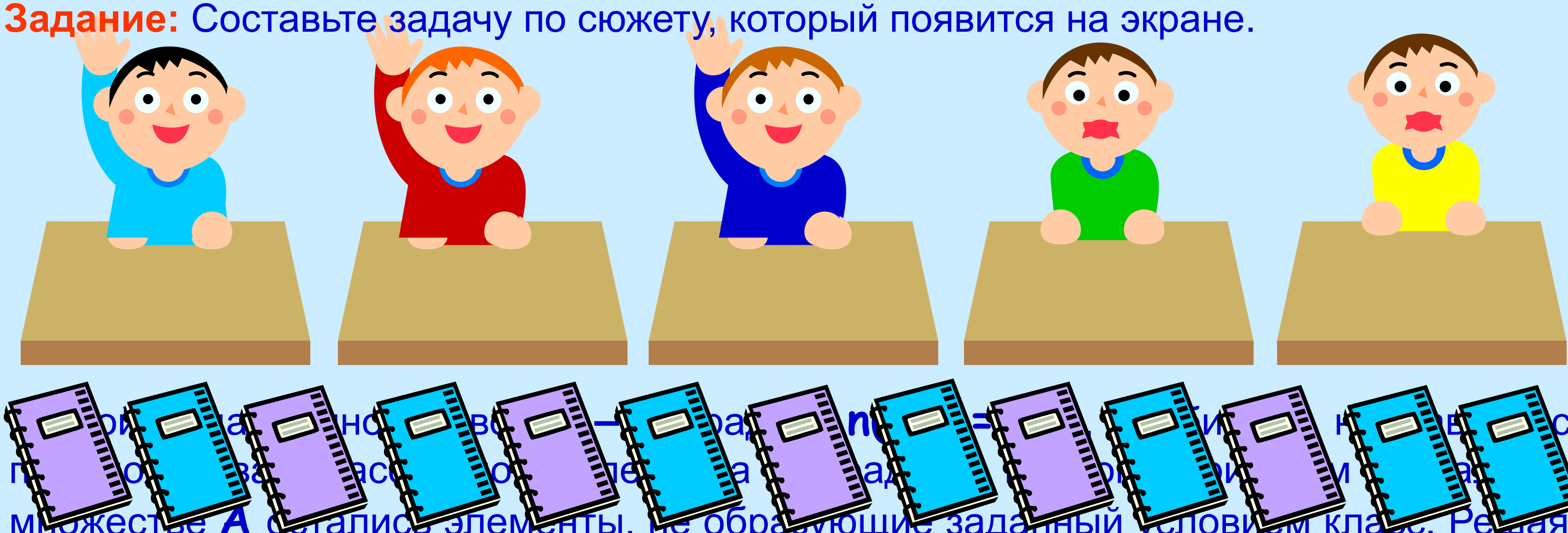
Возврат в оглавление

## Обучение младших школьников делению с остатком

Можно выделить три этапа обучения младших школьников делению с остатком:

**I этап.** Знакомство с данным случаем деления и записью решения. На этом этапе дети выполняют предметные действия с множествами, в которых, при разбиении на равночисленные классы, остаются элементы, не образующие полный класс.

**Задание:** Составьте задачу по сюжету, который появится на экране.



... сленные ... что во множестве *A* остались элементы, не образующие заданный условием класс. Решая задачу, дети выясняют, ? ... полных классов (учеников) получилось и сколько элементов осталось в неполном классе.

Дети учатся записывать решение так: **13 : 4 = 3 (ост. 1).**

Частное **3** показывает, ? , а остаток **1** показывает, ?

**Задание:** Составьте свою задачу на деление с остатком. Запишите ее решение. Опишите это решение с точки зрения теории множеств.

**Продолжите предложение.**

**Для продолжения работы, щелкните мышкой по любому месту экрана**

# Деление с остатком. (продолжение)

Возврат в оглавление

**II этап.** Зн… …ебованием определения деления с остатком: $0 \le r < b$.

На этом… …ая предметные действия с множествами, формулируют требова… ? ***остаток всегда меньше делителя.***

Объясни… …жно с помощью задач на деление по содержанию с остатком.

**Задание:** С… …дачу на деление с остатком по сюжету, который появится на экране.

В этой задаче множество **A** – блинчиков, **n(A) = 9**, разбивают на равночисленные подмножества (классы) по **2** элемента (блинчика) в каждом. После составления каждой порции, дети могут подсчитать оставшиеся блинчики и выяснить, можно ли из них сделать еще одну порцию.

При решении таких задач детям может быть предложено объяснить, почему неверно решение: **9 : 2 = 3 (ост. 3)?** На основании рассмотренных примеров дети сделают вывод:

***остаток всегда меньше делителя.***

**Продолжите предложение.** Чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопке с

**Для продолжения работы, щелкните мышкой по кнопке с** [illegible] **экрана.**

# Деление с остатком. (продолжение)

Возврат в оглавление

**III этап.** Знакомство с приемами подбора частного и нахождения остатка.

На этом этапе дети учатся подбирать частное и находить остаток без выполнения предметных действий. Например, чтобы **17** разделить на **5** с остатком, они учатся рассуждать так: *Найдем самое большое число до семнадцати, которое делится на пять. Это число – пятнадцать.* **15 : 5 = 3** *– это частное.*

*Найдем остаток:* **17 - 15 = 2**. *Значит* **17 : 5 = 3 (ост. 2).**

Для проверки полученных частного и остатка дети учатся таким рассуждениям:

*Чтобы проверить правильность ответа мы*

- *проверим сначала остаток:* **2 < 5** *(остаток меньше делителя);*
- *проверим частное: три умножим на делитель пять и к полученному результату прибавим остаток два:* **3 · 5 = 15; 15 + 2 = 17**. *Получили делимое* **17**, *значит частное и остаток найдены верно.*

Таким образом, на частных примерах дети проверяют оба требования, предъявляемые к частному **q** и остатку **r**: ? **1. 0 ≤ r < b;** **2. a = b · q + r.**

Умение проверять полученный результат позволяет применять **метод подбора** в тех случаях, когда трудно подобрать самое большое число, меньшее делимого, которое делится на делитель. Например, при нахождении частного и остатка в случае **87 : 27** дети могут рассуждать так: *Попробуем в частном число* **2**: **27 · 2 = 54**, *тогда остаток будет равен* **87 – 54 = 33, 33 > 27** *(остаток больше делителя)*, *значит* **2** *– мало. Попробуем в частном число* **3**: **27 · 3 = 81**, *тогда остаток будет равен* **87 – 81 = 6, 6 < 27** *(остаток меньше делителя)*, значит **6** *– остаток, а* **3** *– частное:*

**87 : 27 = 3 (ост. 6).**

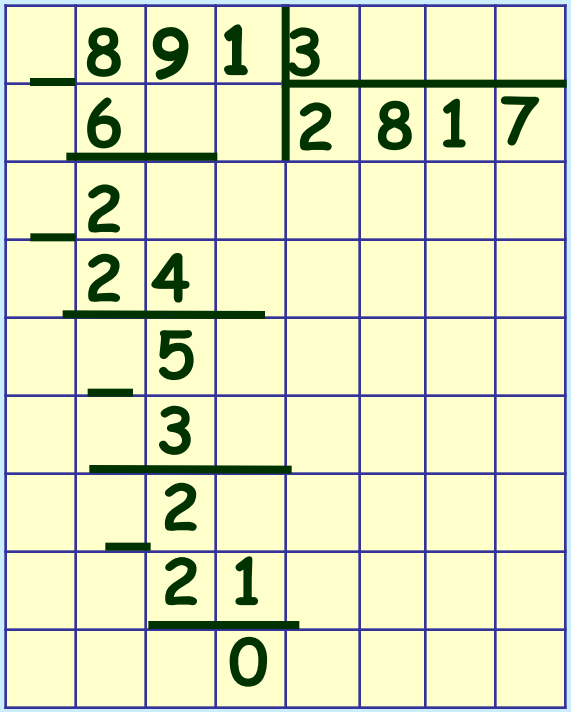
**Продолжите предложение. Чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопке с [illegible] экрана.**

# Деление с остатком. (продолжение)

Возврат в оглавление

Деление с остатком лежит в основе алгоритма письменного деления.

Недостаточное усвоение приемов подбора частного и нахождения остатка может привести к ошибкам при выполнении письменного деления. Например:




**Задание:** Найдите, где в данном случае была сделана ошибка, и объясните ее причину.

Для предупреждения подобных ошибок и обучения подбору частного, детям могут быть предложены следующие задания:

- *Какие числа от 16 до 75 делятся на 7? на 8? на 9?*
- *Какое самое большое число до 19 делится на 5? на 6? на 7? на 8? на 9?;*
- *Какие остатки могут получиться при делении на 4? на 5? на 9?*
- *Вставьте пропущенные числа так, чтобы были верны равенства:*

36 : × = ×(ост. 1)

52 : × = 7 (ост. ×)

× : × = ×(ост. 3)

**Выпишите данный пример и Ваши объяснения.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по любому полю экрана.**

# Свойства деления

Возврат в оглавление

Для действия деления справедливы следующие свойства (законы):

- Деление суммы на число;
- Деление разности на число;
- Деление произведения на число;
- Деление числа на произведение.

**Задание:** Для данных выражений :

**39 : 3  68 : 4  560 : 8  680 : 4  5600 : 80**

- запишите развернутое решение и найдите значение;
- опишите, что с точки зрения каждого определения действия деления Вы нашли;
- определите какое свойство лежит в основе вычислительного приема;
- придумайте задачу, иллюстрирующую данное свойство запишите все способы решения данной задачи, составлением числовых выражений;
- к каждому способу запишите план решения задачи.

**Запишите это в тетрадь.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по выбранному свойству.**

**После ознакомления со свойствами щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

**Для продолжения работы вернитесь в оглавление.**

# Деление суммы на число

Для любых целых неотрицательных чисел **a**, **b** и натурального числа **c** верно равенство: **(a + b) : c = a : c + b : c**

**(∀a,b ∈N₀, c ∈N) (a ⋮ c и b ⋮ c ) ⇒ (a + b) : c = a : c + b : c**

В начальной школе знакомство с данным свойством сводится к знакомству с правилом:

*Чтобы сумму разделить на число можно на это число разделить каждое слагаемое*

**87 : 3 = (60 + 27) : 3 = 60 : 3 + 27 : 3 = 20 + 9 = 29**

**Рассуждения ученика:**

- представляю число **87** в виде суммы удобных слагаемых: 1-ое слагаемое – самое большое круглое число до восьмидесяти, которое делится на **3** – это **60** , тогда 2-ое слагаемое – это число **27**;
- нам удобно сначала каждое слагаемое разделить на **3**;
- затем сложить полученные результаты (частные) **20** и **9**, и получаем **29**.

Следует обратить внимание детей, что подобная задача не всегда имеет два способа решения. **Задание:** Измените условие данной задачи так, чтобы ее нельзя было решить вторым способом.

Правило «Деление суммы на число» лежит в основе вычислительных приемов деления двузначного числа на однозначное. Например:

**48 : 4** **87 : 3**

**36 : 3** **60 : 5**

**Задание:**

- Запишите развернутое решение каждого примера;
- Запишите рассуждения ученика при решении этих примеров;
- Чем отличаются приемы решения примеров 1-ого и 2-ого столбика.

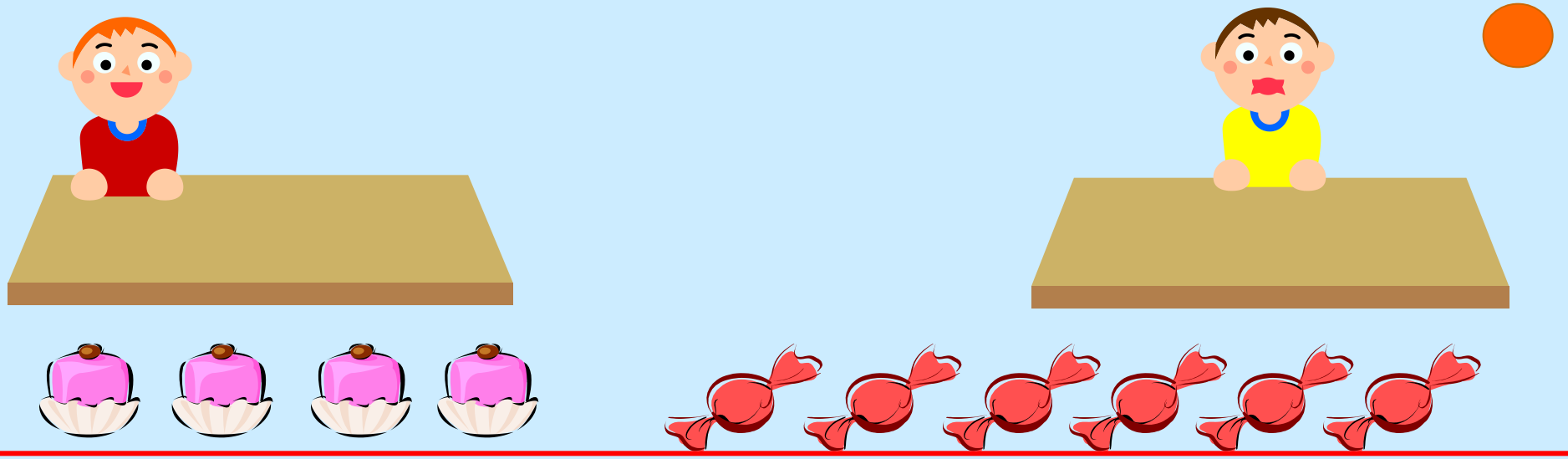
**Для просмотра примера записи и рассуждений ученика, щелкните мышкой по знаку вопроса. При повторном щелчке подсказка исчезнет.**

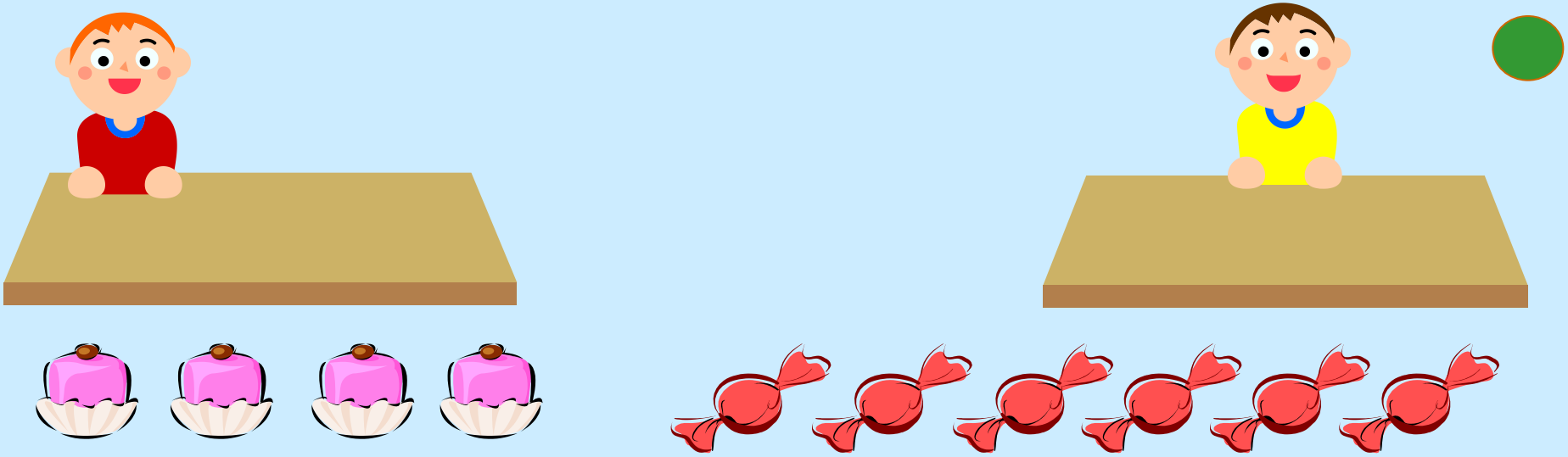
**Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.**

# Деление суммы на число (продолжение)

Возврат в оглавление

Щелкните мышкой по оранжевому или зеленому кругу и Вы увидите иллюстрацию для объяснения одного из способов решения этой задачи. При повторном щелчке по кругу иллюстрация повторяется. Составьте задачу и решите ее разными способами.





Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке.

Возврат в оглавление

# Деление разности на число

Для любых целых неотрицательных чисел ***a***, ***b*** и натурального числа ***c*** верно равенство:

$(a - b) : c = a : c + b : c$

$(\forall a,b \in N_0,\ c \in N)\ (a \vdots c \text{ и } b \vdots c) \Rightarrow (a - b) : c = a : c - b : c$

Данное свойство можно сформулировать в виде правила:

*Чтобы разность разделить на число можно на это число сначала разделить уменьшаемое, затем вычитаемое и из первого результата (частного) вычесть второй.*

?

В начальной школе дети специально не знакомятся с данным правилом, но при выполнении некоторых заданий сталкиваются с его применением. Например:

1. Сравни выражения: $(18 - 6) : 3 \ldots 18 : 3 - 6$

$(18 - 6) : 3 \ldots 18 : 3 - 6 : 3$

$(18 - 6) : 3 \ldots 18 - 6 : 3$

**Задание:** Запишите рассуждения ученика при выполнении данного задания с использование правила деления разности на число

2. Реши задачу разными способами:

*В шести вазах стояло по равному количеству цветов, всего 30 штук. Взяли 12 цветов так, что в вазах осталось цветов поровну. Сколько цветов осталось в каждой вазе?*

**Задание:** Решите задачу разными способами.

Способы решения задачи запишите выражением и к каждому способу напишите план решения задачи.

**Сформулируйте это правило. Чтобы проверить себя щелкните мышкой по знаку**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по любому пустому полю справа.**

Возврат в оглавление

# Деление произведения на число

Для любых целых неотрицательных чисел $a$, $b$ и натурального числа $c$ верно равенство:

$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = (b : c) \cdot a$

$(\forall a,b \in N_0,\ c \in N)\ (a \vdots c\ ) \Rightarrow (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$

$(\forall a,b \in N_0,\ c \in N)\ (b \vdots c\ ) \Rightarrow (a \cdot b) : c = (b : c) \cdot a$

Данное свойство можно сформулировать в виде правила:

*Чтобы произведение разделить на число можно на это число разделить один из множителей и полученный результат (частное) умножить на второй множитель.*

# Деление числа на произведение

Для любых целых неотрицательных чисел $a$, $b$ и натурального числа $c$ верно равенство: $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$

$(\forall a \in N_0,\ b,\ c \in N)\ a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$

Данное свойство можно сформулировать в виде правила:

*Чтобы число разделить на произведение можно это число разделить сначала на один из множителей и полученный результат (частное) разделить на другой множитель.*

Эти правила лежат в основе вычислительных приемов деления чисел, оканчивающихся нулями. Например: **480 : 6; 4800 : 12; 48000 : 16; 4800 : 1200; 48000 : 1600.**

Развернутое решение этих примеров можно записать так:

**480 : 6 = (48 · 10) : 6 = (48 : 6) · 10 = 8 · 10 = 80**

**4800 : 1200 = 4800 : (12 · 100) = (4800 : 100) : 112 = 48 : 12 = 4**

**Задание:** К каждой записи напишите соответствующее свойство.

Запишите развернутое решение остальных примеров.

Сформулируйте правило. Чтобы проверить себя щелкните мышкой по знаку

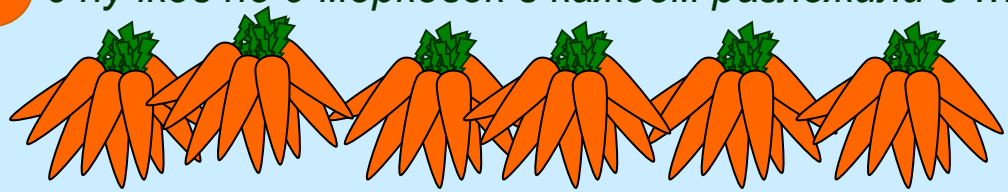
# Свойства деления (продолжение)

Возврат в оглавление

Правила **Деление произведения на число** и **Деление числа на произведение** дети могут сформулировать после анализа различных способов решения задач, иллюстрирующих их.

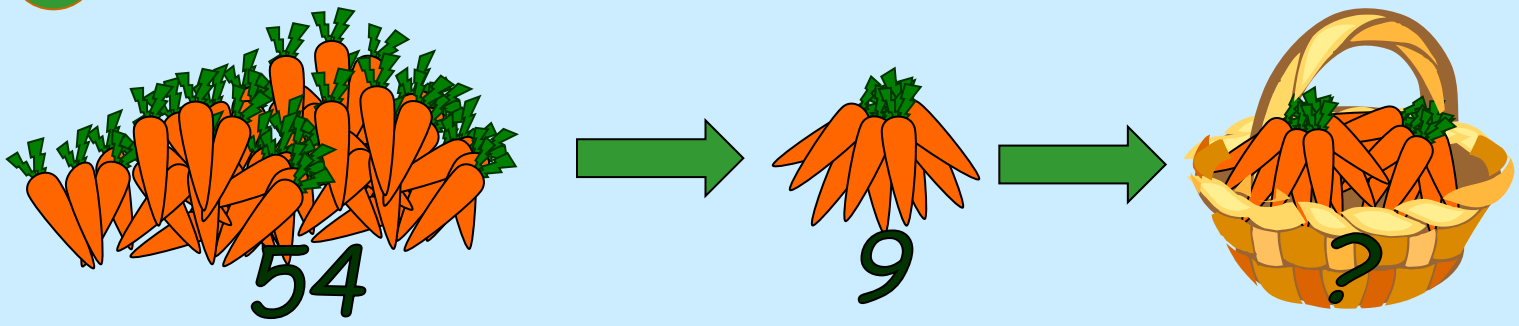
## Деление произведения на число

*6 пучков по 9 морковок в каждом разложили в …*



## Деление числа на произведение

*54 морковки связали в пучки по 9 морковок в каждом и разложили их в корзины …*




**Задание:** Посмотрите иллюстрации к задачам и допишите условие, так, чтобы с их помощью можно было бы познакомить детей с соответствующим правилом деления.

- Решите составленные задачи различными способами, записав решения выражением.
- Запишите план решения задачи в каждом способе.
- Запишите план анализа способов решения задачи, подводящий к выводу соответствующего правила деления.

**Для просмотра иллюстраций к задачам, щелкните мышкой по оранжевому или зеленому кругу. Задание при повторном щелчке действие повторится.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке.**

# Изучение деления в начальном курсе математики

Возврат в оглавление

**I этап.** Ознакомление с делением. На этом этапе дети знакомятся:

- с конкретным смыслом деления;
- с [illegible]й с этим д[illegible]

деление по содержанию

деление на равные части

[illegible]апе находя[illegible]тва на равночисленные подмножества.

Чтение выражения зависит от вида задачи, которую решает ребенок.

Например, выражение **15 : 5** может быть прочитано:

«пятнадцать разделить по 5» **–** , ? «пятнадцать разделить на 5» **–** ?

**II этап.** Изучение табличных случаев деления. На этом этапе дети:

- знакомятся с названием чисел в делении (делимое, делитель, частное) и со способами чтения выражений. Например: **15 : 5 «**Частное чисел **15** и **5»**,
  **«**Делимое – **15**, делитель – **5**, найти частное**»**;
- знакомятся с правилами: нахождения неизвестного множителя, делимого, делителя;
- изучают прием нахождения результата деления, как действия обратного умножению. Например: **28 : 7** «Чтобы получить **двадцать восемь** нужно **семь** умножить на **четыре**, следовательно **28 : 7 = 4**».
- составляют к каждой таблице умножения таблицы с соответствующими случаями деления.
- знакомятся с особыми случаями деления:
  **деление на 1**; **деление нуля**; **невозможность деления на 0**;
- знакомятся с отношением **«меньше в …».** После этого знакомства добавляются варианты чтения выражений. Например: **15 : 5** «Пятнадцать уменьшить в пять раз».

**Задание**: составьте таблицу умножения числа **7** и соответствующие ей таблицы деления.

**Запишите это в тетрадь, дописав вид задачи, соответствующий каждому способу чтения выражения. Проверьте себя, щелкнув мышкой по знаку вопроса.**

**При повторном щелчке подсказка исчезнет. Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана**

**Запишите это в тетрадь, дописав вид задачи, соответствующий каждому способу чтения выражения. Проверьте себя, щелкнув мышкой по знаку вопроса.**

**При повторном щелчке подсказка исчезнет. Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана**

# Изучение действия деления в НКМ (продолжение)

Возврат в оглавление

**III этап.** Изучение внетабличных случаев деления. На этом этапе дети:

- учатся делить с остатком и проверять правильность подбора частного и остатка;
- знакомятся с приемами деления, основанными на знании свойств (правил):

❑ деление дву

❑ деление кру

- знакомятся с

**48 : 16**

**Рассуждения ученика:** «Попробуем число 2: **16 · 2 = 32** – мало; тогда попробуем 3: **16 · 3 = 48**, значит, **48 : 16 = 3**»

деления с умножением, пользуясь правилом: Чтобы найти **частное** можно подобрать **такое число**, которое при умножении на **делитель** дает **делимое.**

Например: **48 : 16; 84 : 28; 76 : 19 и т. д**

?

**Задание**: запишите развернутое решение примеров, записанных выше, и рассуждения учеников при делении двузначного числа на двузначное. Чтобы посмотреть такое рассуждение, щелкните мышкой по знаку вопроса. При повторном щелчке подсказка исчезнет.

**IVэтап.** Изучение алгоритмов письменного деления. На этом этапе дети:

- знакомятся с алгоритмом деления на однозначное число, при этом

❑ сначала рассматривают случаи, когда каждая цифра делимого делится на делитель. Например: **936 : 3; 468 : 2**;

❑ затем случаи, в которых при делении цифр числа получаются остатки, но количество цифр в делимом и частном совпадает, Например: **968 : 4; 496 : 2**;

❑ после этого рассматривают случаи, когда количество цифр в делимом и частном не совпадает. На этом этапе детей учат не только выделять неполное делимое, но и о пределять количество цифр в частном. Например: **136 : 4; 378 : 7**;

❑ и наконец рассматривают случаи, когда в частном получаются нули.

Например: **8136 : 4; 3780 : 7**.

**Задание**: Решите все примеры, записанных выше.

**Сделайте записи в тетради и выполните задание.**

**Выполните задание.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по любому месту экрана**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по любому месту экрана**

# Изучение действия деления в НКМ. (продолжение)

Возврат в оглавление

**IVэтап** Изучение алгоритмов письменного деления. **(продолжение)**

- знакомятся с алгоритмом деления на двузначное и многозначное число, при этом
- сначала рассматривают случаи деления на круглое число с остатком, когда в частном получается одна цифра. Например: **638 : 90; 7350 : 800**;
- затем случаи деления на круглое число без остатка и в частном получается более одной цифры. Например: **3240 : 60; 5920 : 80**;
- после этого рассматривают случаи деления многозначного числа на многозначное, когда в частном получается сначала одна цифра, например: **432 : 72; 294 : 42**; затем более одной цифры, например: **828 : 36; 4725 : 63**;
- наконец рассматривают случаи, когда в частном получаются нули. Сначала без остатка, например: **132192 : 324; 272640 : 284**, а затем с остатком, например: **37971 : 73; 48574 : 712** .

**Задание**: Решите все примеры, записанные выше.

Если Вам нужно посмотреть пример рассуждений при использовании алгоритма деления, щелкните мышкой по знаку вопроса.

?

**Чтобы ознакомиться с алгоритмом, щелкните мышкой по знаку вопроса.**

**Для продолжения работы щелкните мышкой по любому полю экрана**

**Возврат в оглавление**

Делитель последовательно умножают на однозначные числа, начиная с числа **2**, до тех пор пока не найдут самое большое произведение, меньшее неполного делимого.

- Подберем цифру частного. Это можно сделать разными способами:
- Умножение
- Использо…
- Подбор…

- В делимом слева отделяют столько цифр, сколько их содержится в делителе.
- Если полученное число больше делителя, то его считают первым неполным делимым.
- Если полученное число меньше делителя, то слева отделяют на одну цифру больше и полученное число считают первым неполным делимым.
- Определяют, единицы какого разряда составляет первое неполное делимое. Эти единицы, а также все предшествующие им должны быть в частном.

Например: **17572 : 23**

В делителе две цифры. Беру две первые слева цифры делимого. Получаю число **17. 17 < 23**, поэтому беру слева три цифры и получаю **175** – первое неполное делимое.

**175** – это полное число сотен в числе **17572**, следовательно в частном будут сотни, а также десятки и единицы - всего **3** цифры.

Полученное в результате однозначное число 5 – пробная цифра частного, которую необходимо проверить.

- Деление … цифры частного.

**Запишите это в тетрадь. Для ознакомления а приемом определения первого …**

# Алгоритм письменного деления (продолжение)

Возврат в оглавление

**Например:** 4725 : 63

| | 4 | 7 | 2 | 5 | 6 | 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| − | 4 | 4 | 1 | | 7 | 5 | | |
| | | 3 | 1 | | | | | |
| | | | | 0 | | | | |

- Запишем числа уголком;
- Найдем первое неполное делимое и определим количество цифр в частном:
  В делителе две цифры. Беру две первые слева цифры делимого. Получаю число **47**. **47 < 63**, поэтому беру слева три цифры и получаю **472 – первое неполное делимое**.
  **472** – это полное число десятков в числе **4725** , следовательно в ответе у нас будут десятки и единицы – **2** цифры.
- Подберем цифру частного **способом округления:**
  - Округлим делитель **63** до числа **60**.;
  - **472** разделим на **60 = 6 · 10**: для этого сначала разделим на **10** – получим **47**, а потом **47** разделим на **6** и получим **7**.
- Проверяем полученную цифру **7**.
  Для этого **63** умножим на **7** и получим **441**: **441 < 472**
  Найдем остаток **472 – 441 = 31**. Остаток **31 < 63** – делителя, следовательно цифра подобрана верно и ее можно записать в ответ.
- Припишем к полученному остатку следующую цифру делимого. Получаем неполное делимое **315 > 63**. Подбираем следующую цифру частного **по поледеней цифре**:
  Последняя цифра делимого равна **5**, значит, вероятнее всего, цифра частного будет **5**.
- Проверяем полученную цифру **5**.
  Для этого **63** умножим на **5** и получим **315**, следовательно цифра подобрана верно и ее можно записать в ответ.
- Получили ответ - **75**.

Для продолжения работы щелкните мышью по любому полю экрана

# Алгоритм письменного деления (продолжение)

Возврат в оглавление

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 7 | 2 | 5 | 6 | 3 | | |
| – | 4 | 4 | 1 | | 7 | 5 | | |
| | | 3 | 1 | | | | | |
| | | | | 0 | | | | |

**Например:** 4725 : 63

- Запишем числа уголком;
- Найдем первое неполное делимое и определим количество цифр в частном:
  В делителе две цифры. Беру две первые слева цифры делимого. Получаю число **47**. **47 < 63**, поэтому беру слева три цифры и получаю **472** – **первое неполное делимое**.
  **472** – это полное число десятков в числе **4725** , следовательно в ответе у нас будут десятки и единицы – **2** цифры.
- Подберем цифру частного:

**Способом округления:**

- Округлим делитель **63** до числа **60**.;
- **472** разделим на **60 = 6 · 10**: для этого сначала разделим на **10** – получим **47**, а потом **47** разделим на **6** и получим **7**.

- Проверяем полученную цифру **7**.
  Для этого **63** умножим на **7** и получим **441**: **441 < 472**
  Найдем остаток **472 – 441 = 31**. Остаток **31 < 63** – делителя, следовательно цифра подобрана верно и ее можно записать в ответ.
- Припишем к полученному остатку следующую цифру делимого. Получаем неполное делимое **315 > 63**. Подбираем следующую цифру частного **по поледеней цифре**:
  Последняя цифра делимого равна **5**, значит, вероятнее всего, цифра частного будет **5**.
- Проверяем полученную цифру **5**.
  Для этого **63** умножим на **5** и получим **315**, следовательно цифра подобрана верно и ее можно записать в ответ.
- Получили ответ - **75**.

**Чтобы вернуться обратно, щелкните мышкой по глубокому полю экрана.**

# Действия с целыми неотрицательными числами.

# Деление

**Вы завершили знакомство с данной темой.**
**Если Вы хотите завершить работу – нажмите клавишу <ESC>**
**Если Вы хотите вернуться в оглавление – щелкните мышкой по управляющей кнопке**