Применение производной к исследованию функций

Как родилась производная

Ферма далеко продвинулся в применении дифференциальных методов, он использовал их не только для проведения касательных но, к примеру, для нахождения максимумов, вычисления площадей. Однако ни Ферма, ни Декарт не сумели свести полученные научные выводы и результаты в единую систему.

В 1638 году Ферма поделился этим открытием со своим земляком Рене Декартом, который также занимался этой проблемой и нашел свой метод построения касательных к алгебраическим кривым.

Как родилась производная

Тем не менее, выдвинутые идеи не пропали

Вильгельм Лейбниц (1646-1716)

Исаак Ньютон (1642-1727)

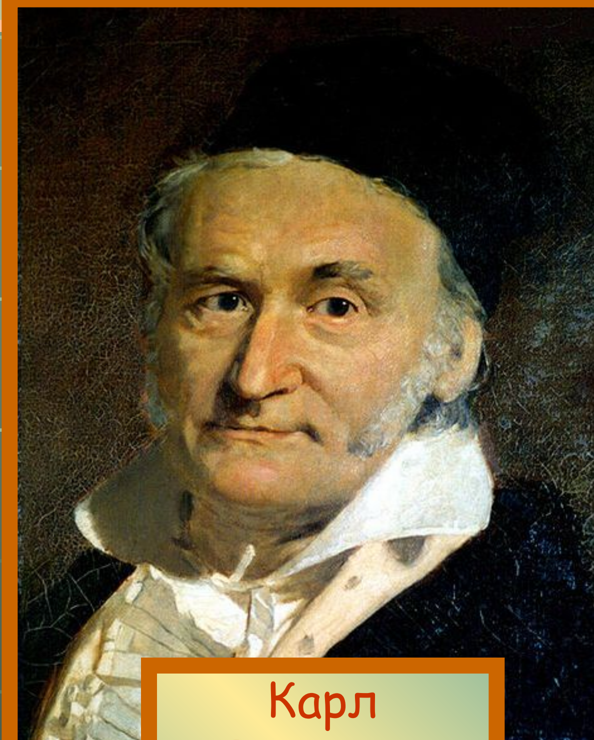
Многие из них легли в основу нового метода математического анализа – дифференциального исчисления, основоположниками которого считаются Вильям Лейбниц и Исаак Ньютон.

Как родилась производная

Очень многие великие ученые внесли свой вклад в зарождение и развитие дифференциального исчисления

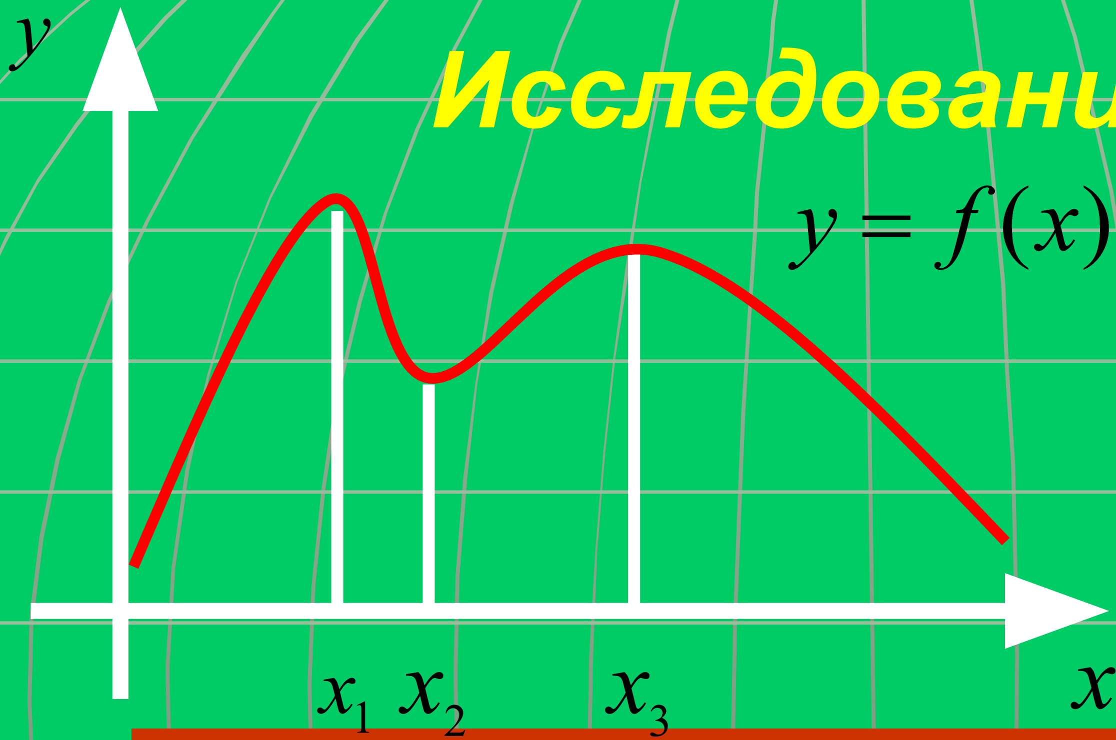
Жозеф
Луи Лагранж
(1736-1813)

Леонард
Эйлер
(1707-1783)



Карл
Фридрих
Гаусс
(1777-1855)

Исследование функции:



- **D(f)**
- **E(f)**
- **Пересечение с координатными осями с ОХ (x;0) с OY (0;y)**
- **четность или нечетность, т.е. f(-x)= f(x), f(-x)= -f(x)**
- **нули функции т.е. f(x)=0**
- **промежутки возрастания и убывания (монотонность)**
- **промежутки знакопостоянства т.е. f(x)>0, f(x)<0**
- **построение эскиза графика**

Повторение

- Четность, нечетность функций
- Периодичность
- Нули функции
- Промежутки знакопостоянства
- Монотонность функции

далее

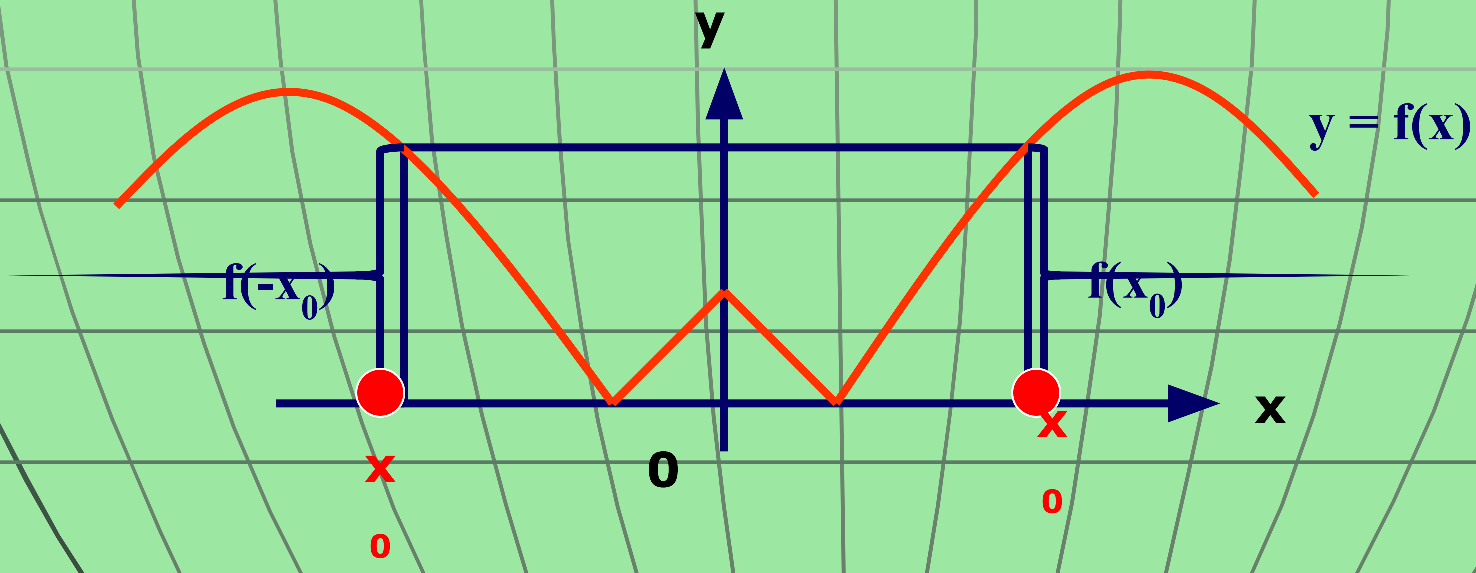
Четность функций

Определение: Функция y = f(x) называется **четной**, если для **любого** значения **x**, взятого из области определения функции, значение **(–x)** также принадлежит области определения и выполняется равенство:

четная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат.

График четной функции **симметричен** относительно **оси ординат**

$$f(-x) = f(x)$$

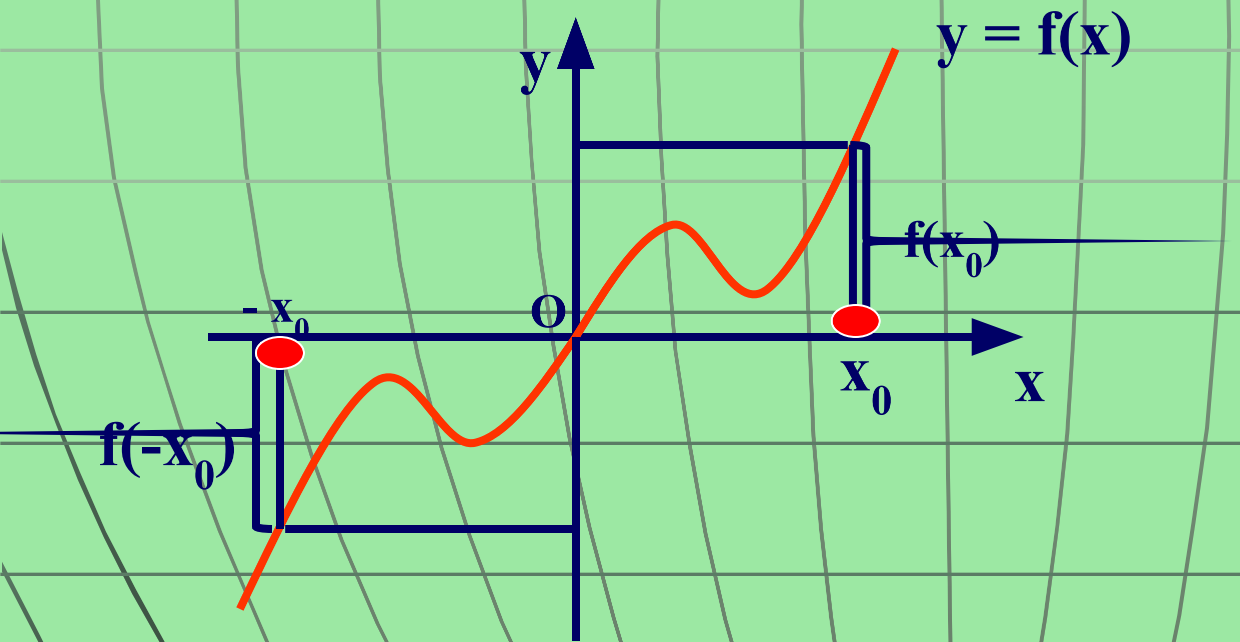


Нечетность функций

Определение: Функция y = f(x) называется **нечетной**, если для **любого** значения **x**, взятого из области определения функции, значение **(–x)** также принадлежит области определения и выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x)$$

График **нечетной** функции симметричен относительно **начала координат**

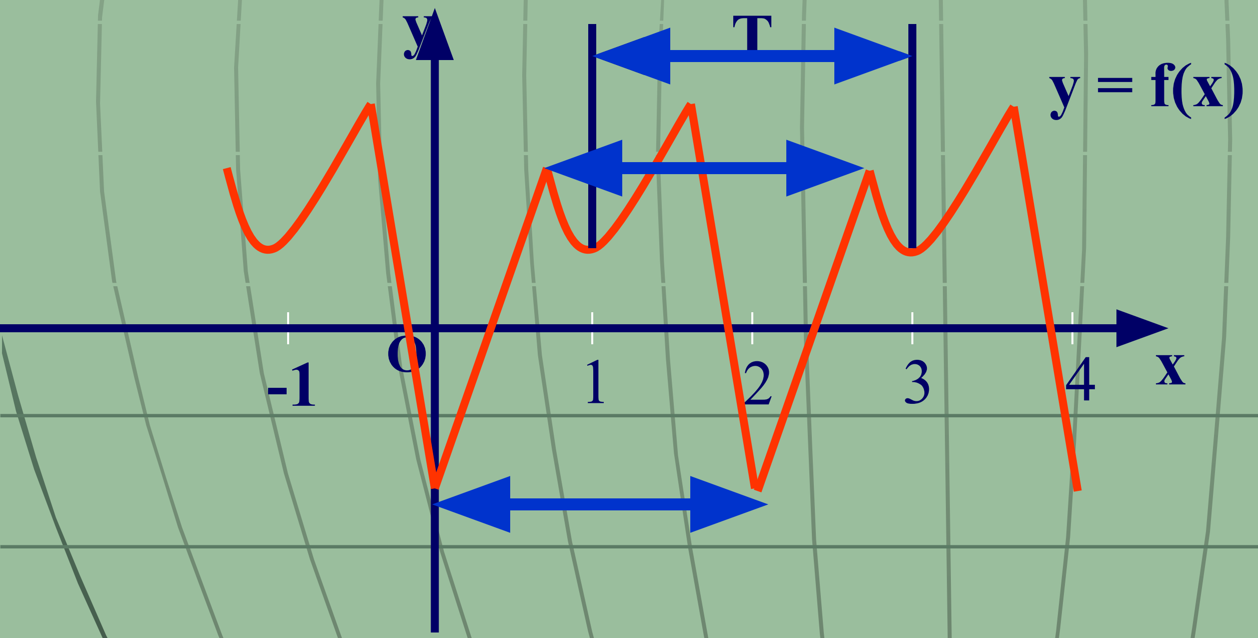


повторение

Периодичность функций

Определение: *Функция y = f(x) называется* ***периодической****, если существует такое число T ≠ 0 - период, что для любого значения x, взятого из области определения, значения (x + T) и (x – T) также принадлежат области определения и выполняется равенство*

f(x) = f(x + T) = f(x – T)

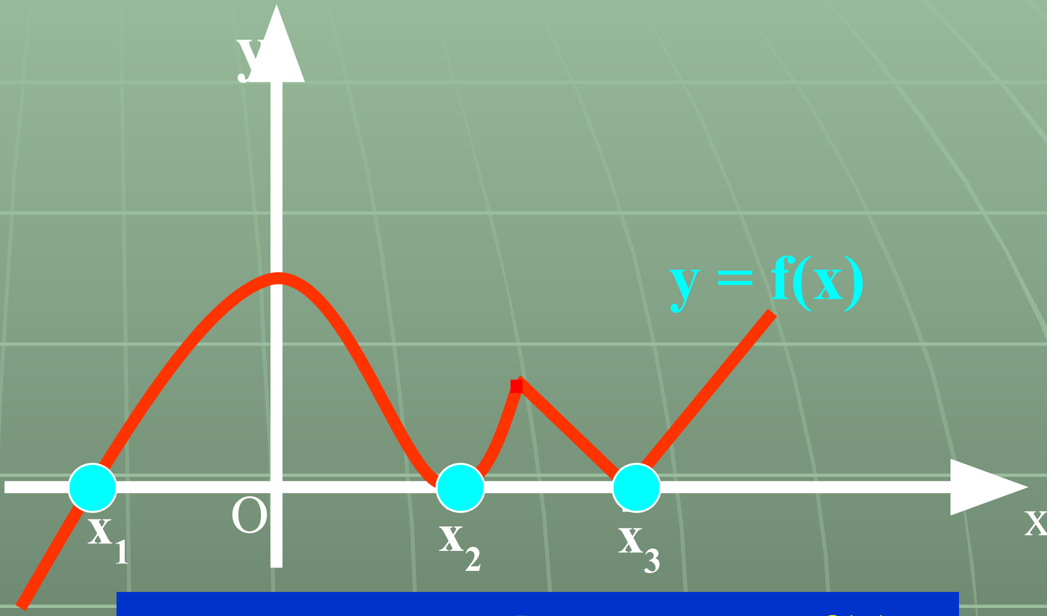


повторение

Нули функции

Определение: Нулем функции называется такое действительное значение x, при котором значение функции равно нулю.

Для того, чтобы найти нули функции, следует решить уравнение f(x) = 0 Действительные корни этого уравнения являются нулями функции y = f(x)



x_1, x_2, x_3 – нули функции y = f(x).

Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции:

1) либо пересекает ось абсцисс,

2) либо касается ее,

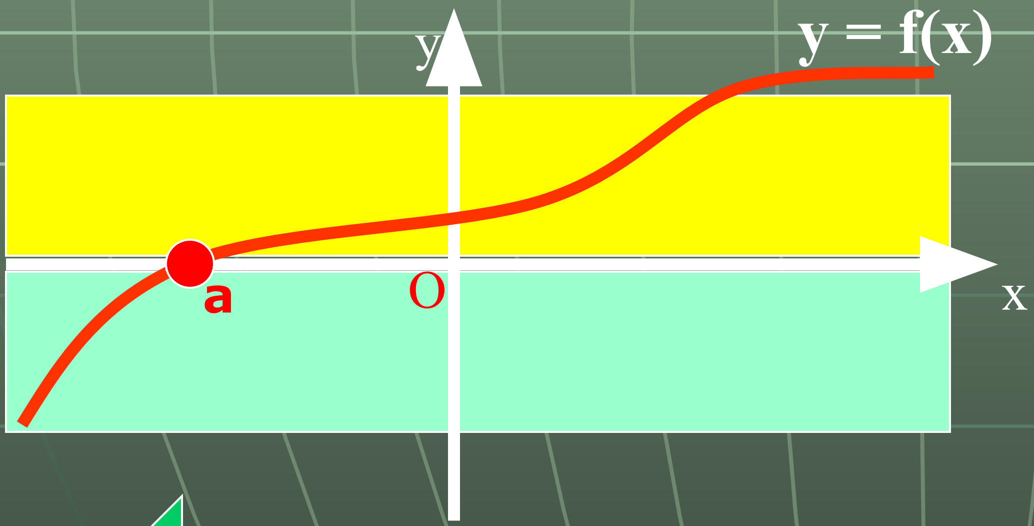
3) либо имеет общую точку с этой осью, ординаты данных точек нулевые, т.е. (x_1;0), (x_2;0), (x_3;0)

повторение

Промежутки знакопостоянства

Определение: *Числовые промежутки, на которых непрерывная функция сохраняет свой знак и не обращается в нуль, называются промежутками <u>знакопостоянства</u>.*

Над этими промежутками график функции лежит выше оси абсцисс, если $f(x) > 0$, и ниже оси абсцисс, если $f(x) < 0$



$f(x) > 0$ при $x > a$

$f(x) < 0$ при $x < a$

повторение

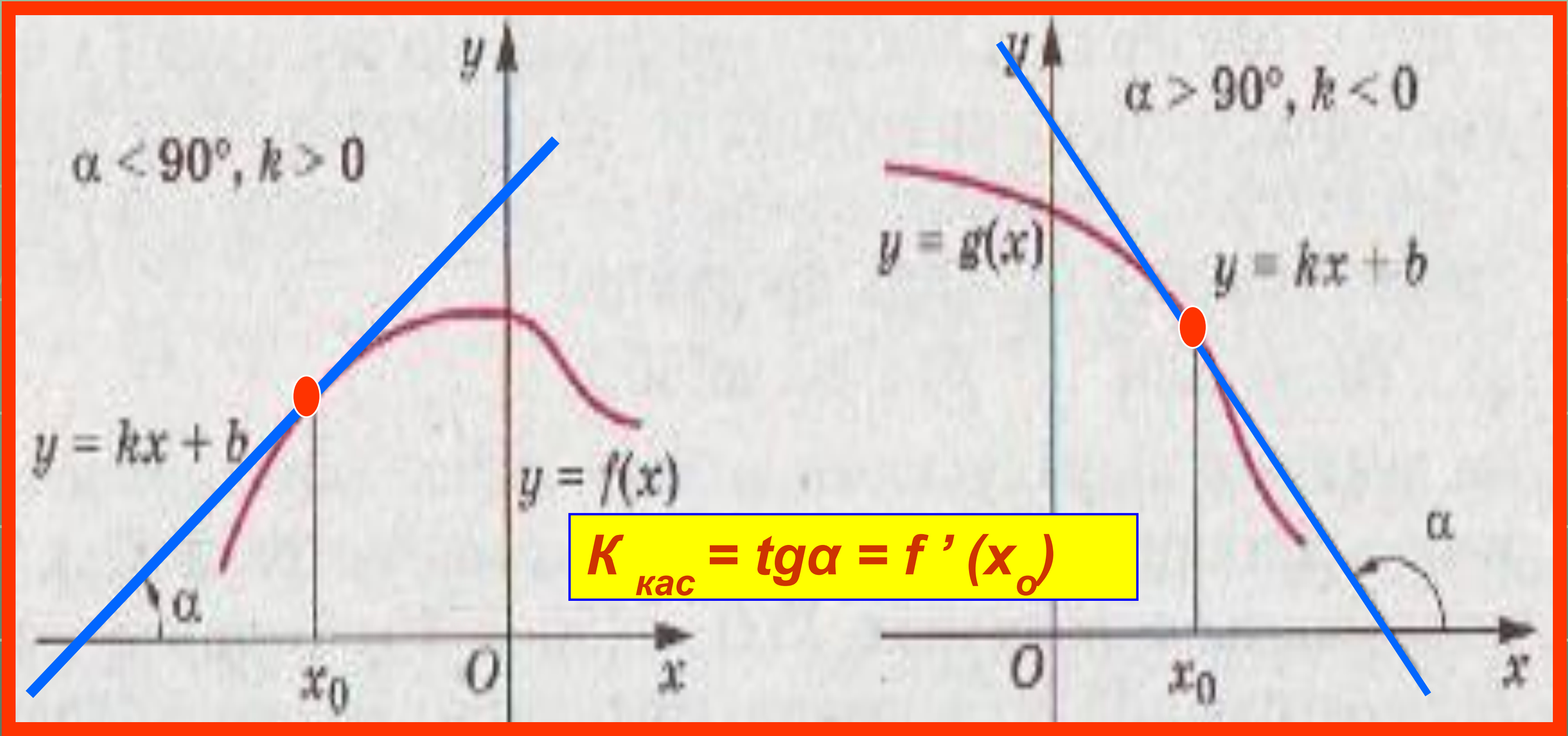
Монотонность функции

Определение: ***Функцию называют монотонно возрастающей, если с увеличением аргумента значение функции увеличивается, и монотонно убывающей, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается.***

повторение

Связь производной с монотонностью функции

- Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка положительна, то функция на этом промежутке возрастает, <u>т. е. $f'(x)>0$, $f(x)$</u>
- Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка отрицательна, то функция на этом промежутке убывает, <u>т. е. $f'(x)<0$, $f(x)$</u>
- Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка равна 0, то функция на этом промежутке постоянна



$K_{кас} = tg\alpha = f'(x_o)$

f′(x)>0

f′(x)<0

Критические точки функции -

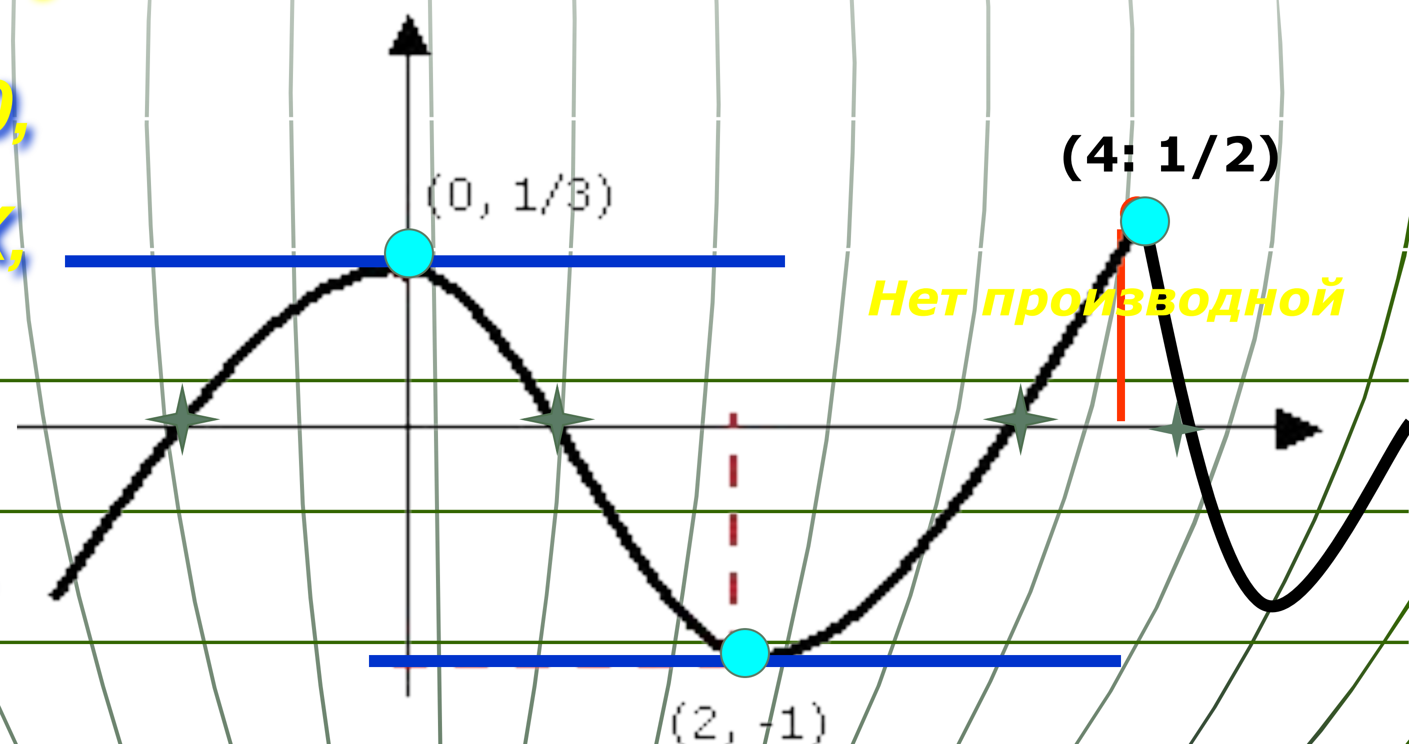
Внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует

$f'(x_i)=k_{кас}=0$,

касат II OX,

перегиб графика,

смена поведения



Достаточный признак возрастания или убывания функции

Алгоритм решения:

f’(x)

f’(x)= 0 или не существует

ритические точки

f’(x)>0

f’(x)<0

Пример: Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-3x^2+2$

Решение:

1) $f'(x)=(x^3-3x^2+2)'=3x^2-6x=3x(x-2)$

2)**Находим критичекие точки:**
$f'(x)=0$, т.е. $3x(x-2)=0$ при $x=0$ $x=2$

3) Исследуем знак производной методом интервалов

	(-∞; 0)	0	(0;2)	2	(2;∞)
f '(x)	+	0	-	0	+
f (x)	↗	2	↘	-2	↗

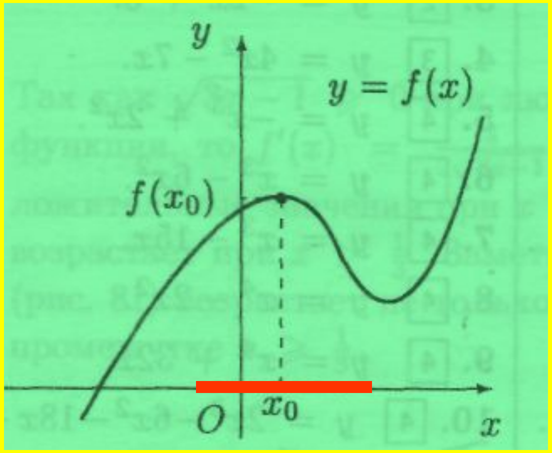
Ответ f (x)□ на (-∞; 0) и (2;∞)

f (x)□ на (0;2)

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Окрестностью точки x_0 - называется промежуток, для которого точка x_0 является внутренней.

Точка x_0 называется точкой <u>максимума</u> (x_{max}) функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

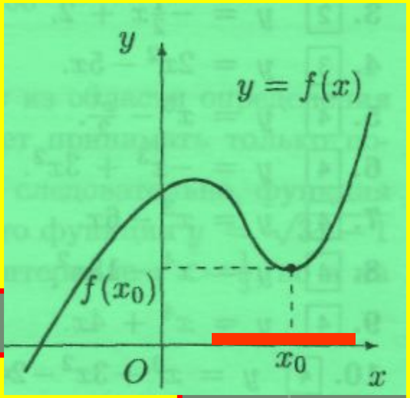


$$\boxed{f(x) \le f(x_0)}$$

$$f(x) \le f(x_{\max})$$

Точка x_1 называется точкой ***минимума*** *(x_{min})* ***функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство***

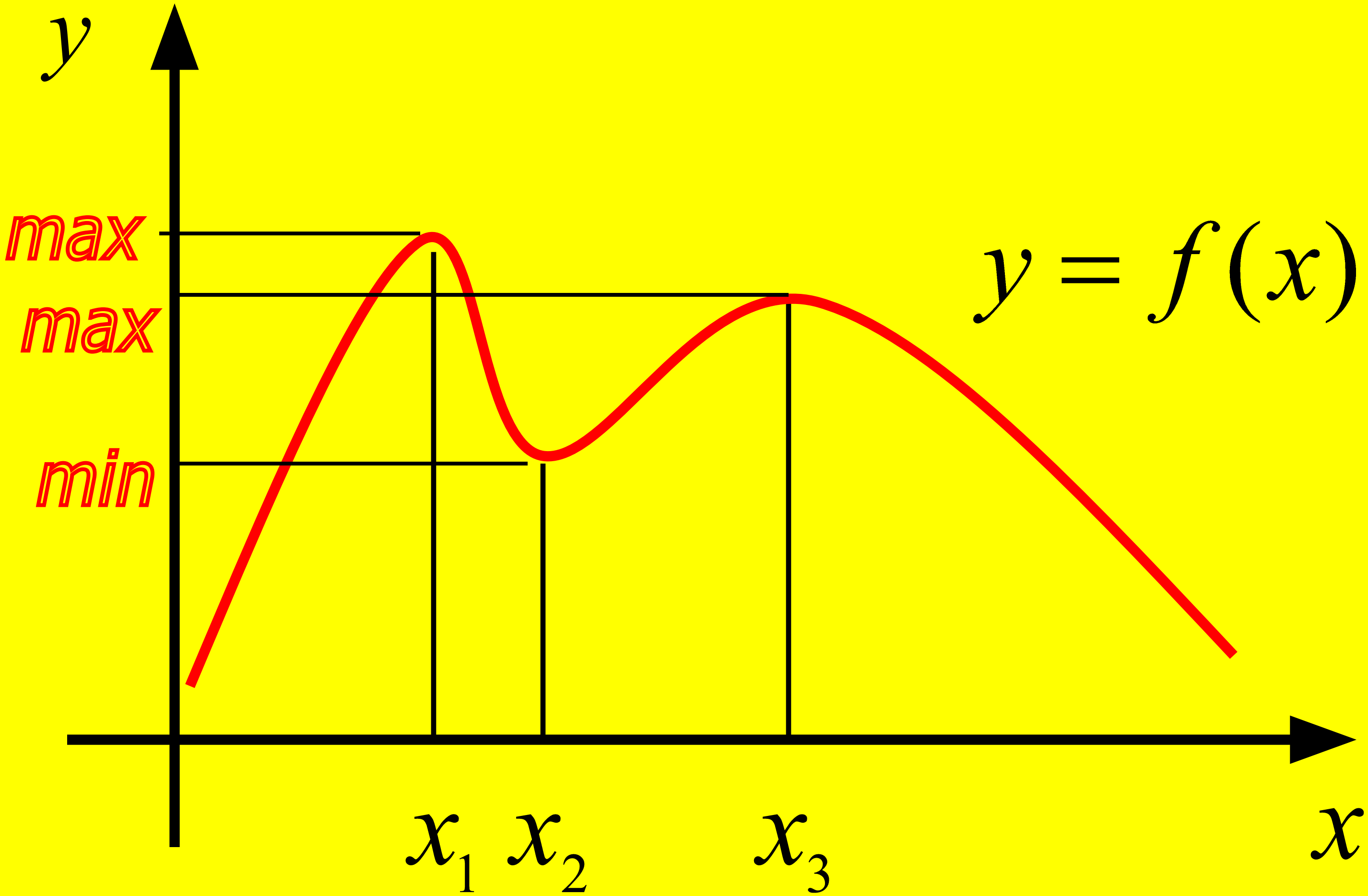
$$\boxed{f(x) \geq f(x_1)} \quad f(x) \geq f(x_{min})$$



Точки минимума и максимума называются ***точками экстремума*** ***(крайние, конечные)***

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно ***максимумом и минимумом функции (y_{min} и y_{max})***

Максимум и минимум функции называется ***экстремумом функции***



Точки экстремумов x_i

Обратите внимание!!!

- ***Что происходит с производной при переходе через экстремальную точку?***
- ***Что происходит с самой функцией при переходе через экстремальную точку?***

1) **Производная меняет знак с «+» на «–» или наоборот**
2) **Функция меняет поведение с возрастания на убывание или наоборот**

Достаточный признак возрастания или убывания функции

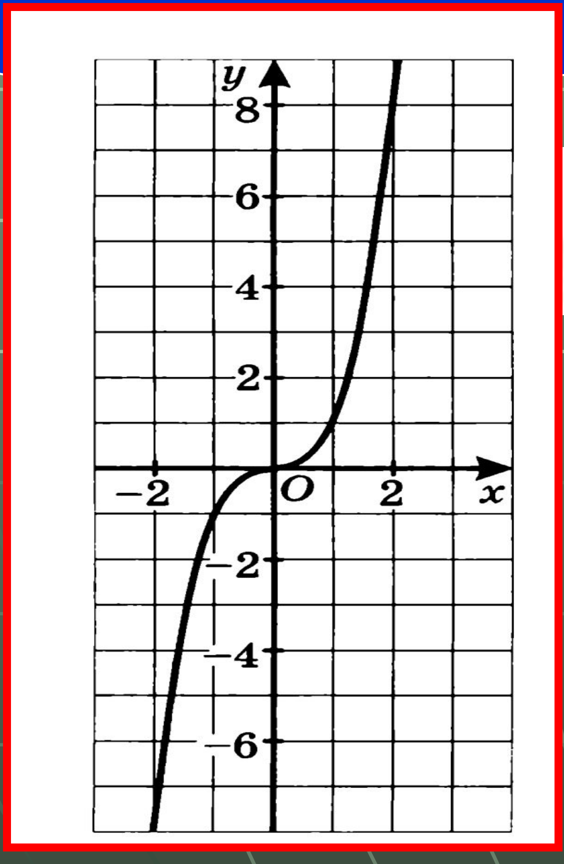
Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка положительна, то функция на этом промежутке возрастает, <u>т.е.f’(x)>0, f(x)□</u>

Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка отрицательна, то функция на этом промежутке убывает, <u>т.е.f’(x)<0, f(x)□</u>

354. а) $f(x) = 3 - 2x^2$, $D(f) = R$, $f'(x) = -2 \cdot 2x = -4x$.
$f'(x) = 0$, якщо $-4x = 0$, $x = 0$. Критична точка одна: $x = 0$.
При $x > 0$ $f'(x) < 0$, при $x < 0$ $f'(x) > 0$.
Отже, функція $f(x)$ зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$.
б) $f(x) = 2x - x^2$, $D(f) = (-\infty; +\infty)$. $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$.
$f'(x) = 0$, якщо $1 - x = 0$, $x = 1$ — критична точка.
$f'(x) > 0$, якщо $x < 1$, $f'(x) < 0$, якщо $x > 1$.
Тоді функція $f(x)$ зростає на $(-\infty; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$.

Необходимое условие существования экстремума:

Точками экстремума функции могут быть только её критические точки (в которых производная равна нулю или не существует), <u>но этого не достаточно</u>



$$y = x^3.\ D(y) = R.\ y' = 3x^2.$$

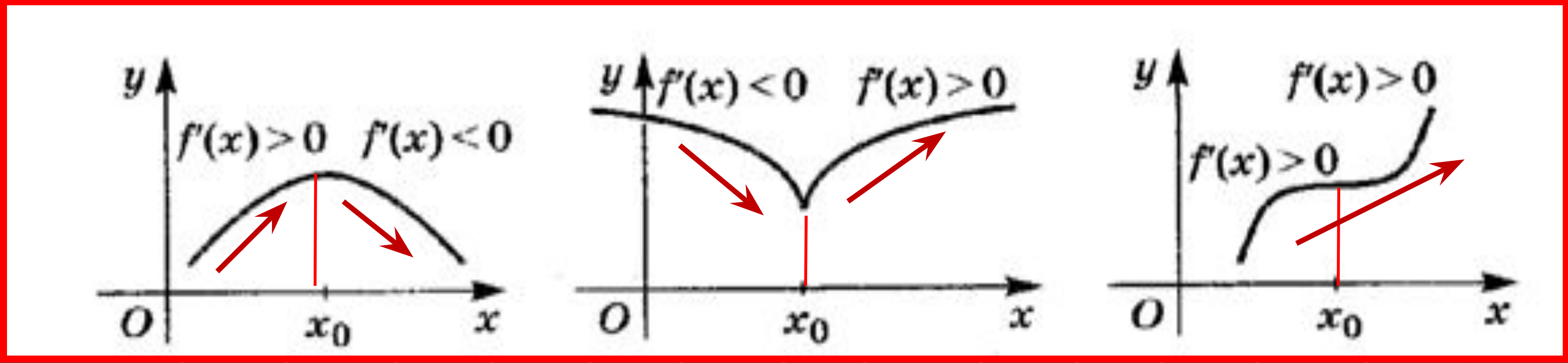
$$3x^2 = 0 \text{ при } x = 0.$$

Перегиб графика есть при x=0, но смены поведения нет, поэтому x=0 не является экстремальной точкой

Достаточное условие существования экстремума:

Если производная при переходе (слева направо) через критическую точку меняет знак с «+» на «-», то данная точка – это точка максимума

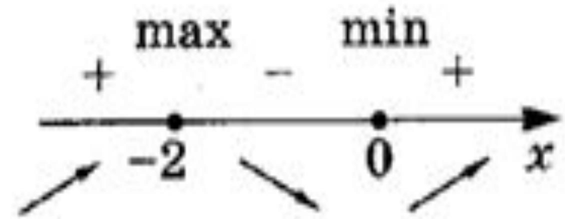
Если производная при переходе (слева направо) через критическую точку меняет знак с «-» на «+», то данная точка – это точка минимума



П р и к л а д   Знайдіть точки екстремуму та екстремальні значення функції $y = 2x^3 + 6x^2 - 5$.

Р о з в'я з а н н я. $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.

Критичними точками функції є: $x_1 = -2$ та $x_2 = 0$. У разі переходу через точку $x_1 = -2$ похідна змінює знак з «+» на «−», тому це – точка максимуму. Якщо відбувається перехід через точку $x_2 = 0$, похідна змінює знак з «−» на «+», тому це – точка мінімуму



Отже,

$y_{\max} = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 5 = 3;$

$y_{\min} = 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 5 = -5.$

Відповідь. $x_1 = -2$ – точка максимуму, $y_{\max} = 3$; $x_2 = 0$ – точка мінімуму, $y_{\min} = -5$.

Решение различных типов задач

Найти точки экстремумов функции:

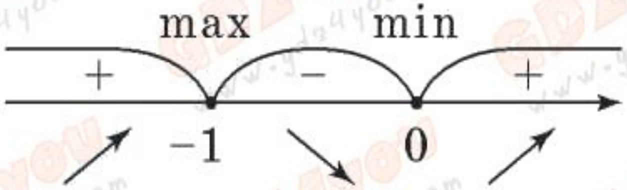
359. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$. $D(y) = R$.

$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$.

$y' = 0$, якщо $6x(x + 1) = 0$,

$x = 0$ і $x = -1$ — критичні точки.

$x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$.



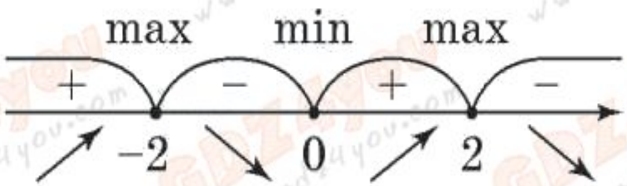
б) $y = 1 + 8x^2 - x^4$. $D(y) = R$.

$y' = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 4x(2 - x)(2 + x)$.

$y' = 0$, якщо $4x(2 - x)(2 + x) = 0$,

$x = 0$, $x = 2$ і $x = -2$ — критичні точки.

$x_{max} = -2$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = 2$.



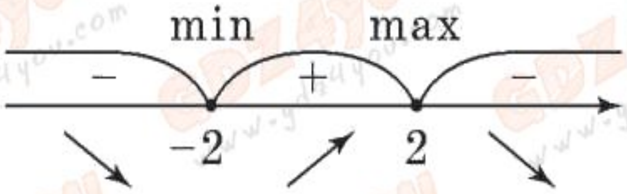
в) $y = -x^3 + 12x + 7$. $D(y) = R$.

$y' = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x - 2)(x + 2)$.

$y' = 0$, якщо $(x - 2)(x + 2) = 0$,

$x = 2$, $x = -2$ — критичні точки.

$x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$.



Найти точки экстремумов функции и экстремальные значения:

362. а) $f(x) = 8 - 12x - x^3$. $D(f) = R$.

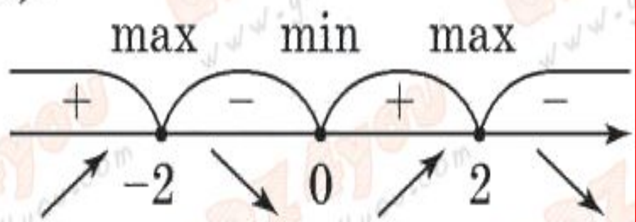
$f'(x) = -12 - 3x^2 = -3(4 + x^2)$. Оскільки $-3(4 + x^2) < 0$ для всіх x із області визначення, то функція $f(x)$ монотонно спадає на R, отже, критичних точок, а значить, і екстремумів немає.

б) $f(x) = 1 + 8x^2 - x^4$. $D(f) = R$.

$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 4x(2 - x)(2 + x)$.

$f'(x) = 0$,

якщо $4x(2 - x)(2 + x) = 0$,



$x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ — критичні точки.

$x_{max} = -2$, $y_{max} = 1 + 8(-2)^2 - (-2)^4 = 1 + 32 - 16 = 17$.

$x_{min} = 0$, $y_{min} = 1 + 8 \cdot 0 - 0 = 1$.

$x_{max} = 2$, $y_{max} = 1 + 8 \cdot 2^2 - 2^4 = 1 + 32 - 16 = 17$.

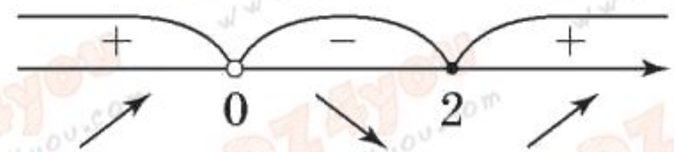
Відповідь: $x_{max} = -2$. $x_{max} = 2$, $y_{max} = 17$; $x_{min} = 0$, $y_{min} = 1$.

368. а) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$.

$f'(x) = 0$, якщо $x^3 - 8 = 0$,

$x = 2$ — критична точка.

$x = 2$ — точка мінімуму.



$f(2) = 2 + \frac{4}{2^2} = 2 + 1 = 3$.

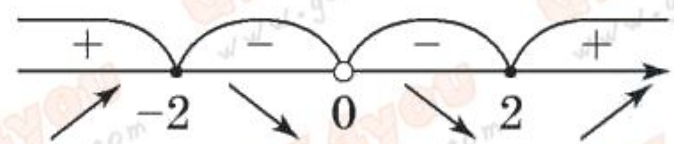
Відповідь: $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = 3$.

б) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 4}{2x}$; $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$.

$f'x) = 0$, якщо $(x - 2)(x + 2) = 0$,

$x - 2$, $x = -2$ — критичні точки.



$x_{\max} = -2$, $f(-2) = \frac{-2}{2} + \frac{2}{-2} = -1 + (-1) = -2$;

$x_{\min} = 2$, $f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$.

Відповідь: $x_{\max} = -2$, $y_{\max} = -2$; $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = 2$.

Найти промежутки убывания и возрастания функции:

354. а) $f(x) = 3 - 2x^2$, $D(f) = R$, $f'(x) = -2 \cdot 2x = -4x$.

$f'(x) = 0$, якщо $-4x = 0$, $x = 0$. Критична точка одна: $x = 0$.

При $x > 0$ $f'(x) < 0$, при $x < 0$ $f'(x) > 0$.

Отже, функція $f(x)$ зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$.

б) $f(x) = 2x - x^2$, $D(f) = (-\infty; +\infty)$. $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$.

$f'(x) = 0$, якщо $1 - x = 0$, $x = 1$ — критична точка.

$f'(x) > 0$, якщо $x < 1$, $f'(x) < 0$, якщо $x > 1$.

Тоді функція $f(x)$ зростає на $(-\infty; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$.

Найти критические точки функции:

346. а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$. $D(f) = R$. $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

$f'(x) = 0$, якщо $6x(x-1) = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Критичні точки — 0 і 1. *Відповідь:* 0; 1.

б) $f(x) = x - \ln x$. $D(f) = (0; +\infty)$. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{1}$.

$f'(x) = 0$, якщо $x - 1 = 0$, $x = 1$.

$f'(x)$ не існує при $x = 0$. Точка $x = 0$ не входить до області визначення функції. Отже, функція має одну критичну точку: $x = 1$. *Відповідь:* 1.

348. а) $f(x) = e^{-x} + x$. $D(f) = R$. $f'(x) = -e^{-x} + 1 = -\dfrac{1}{e^x} + 1 = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$.

$f'(x) = 0$, якщо $e^x - 1 = 0$, $e^x = 1$, $x = 0$.

Відповідь: 0.

б) $f(x) = \cos 2x$. $D(f) = R$. $f'(x) = -2 \sin 2x$.

$f'(x) = 0$, якщо $\sin 2x = 0$, $2x = \pi n$, $n \in Z$, $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

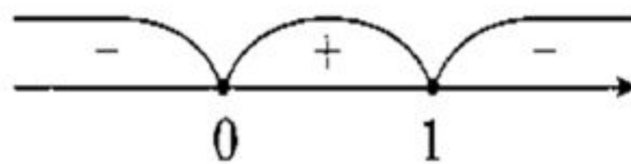
Відповідь: $\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

347. а) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$. $D(f) = R$.

$f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1)$.

$f'(x) = 0$, якщо $2x(2x - 1)(2x + 1) = 0$, $\left[\begin{array}{l} x - 0, \\ x = 0,5, \\ x = -0,5. \end{array}\right.$ *Відповідь:* 0; 0,5; −0,5.

б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$. Знайдемо область визначення функції $x - x^2 \geq 0$, $x(1 - x) \geq 0$.



$0 \leq x \leq 1$. $D(f) = [0;\ 1]$.

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}} \cdot (x - x^2)' = \dfrac{1 - 2x}{\sqrt{x - x^2}}$. $f'(x) = 0$, якщо $1 - 2x = 0$, $x = 0,5$.

$f'(x)$ не існує при $x = 0$ і $x = 0,5$, ці точки входять до області визначення функції. Отже, критичні точки $x = 0,5$, $x=0$

Відповідь: 0,5 *та 0*

удачи в изучении))