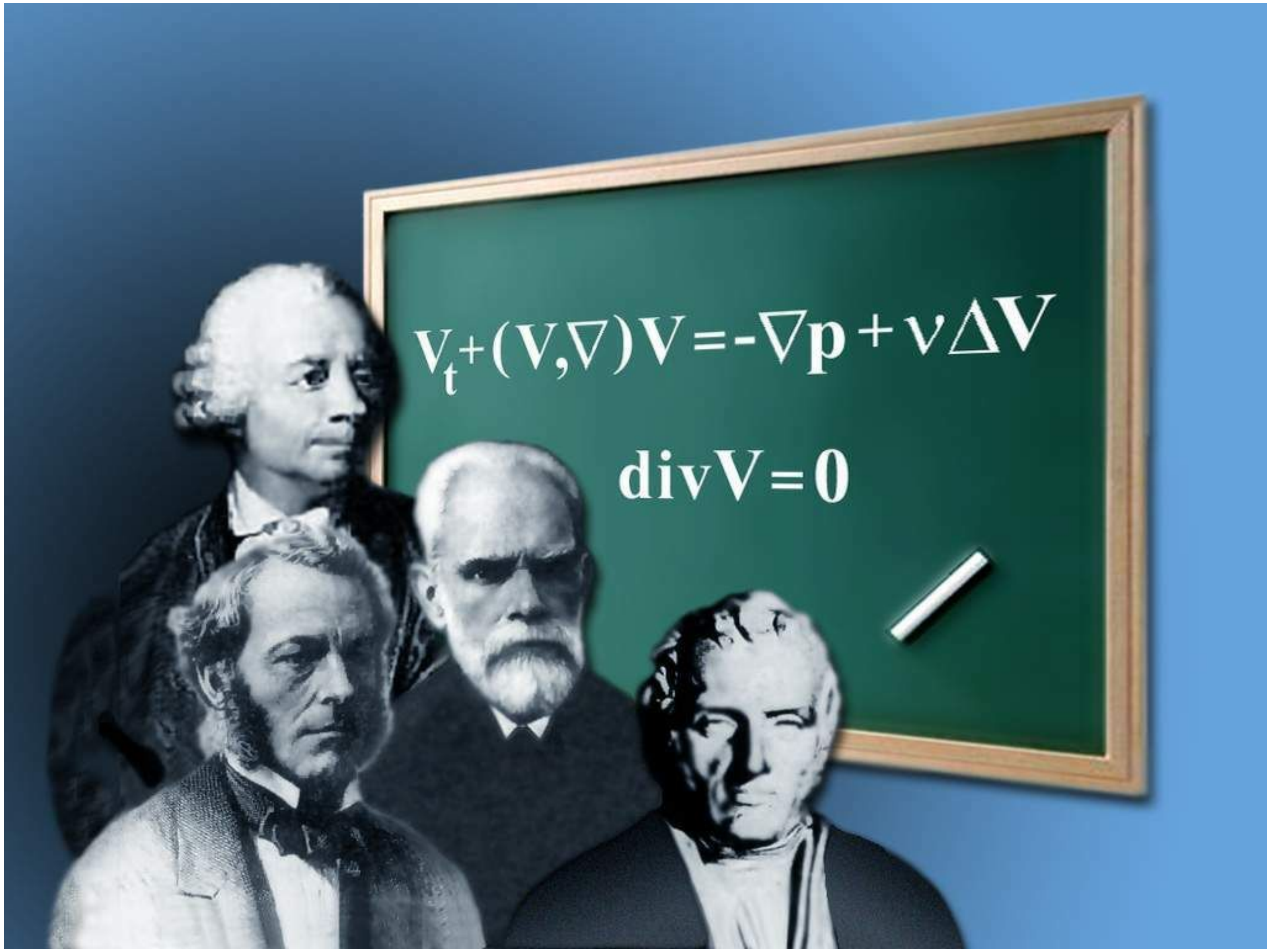
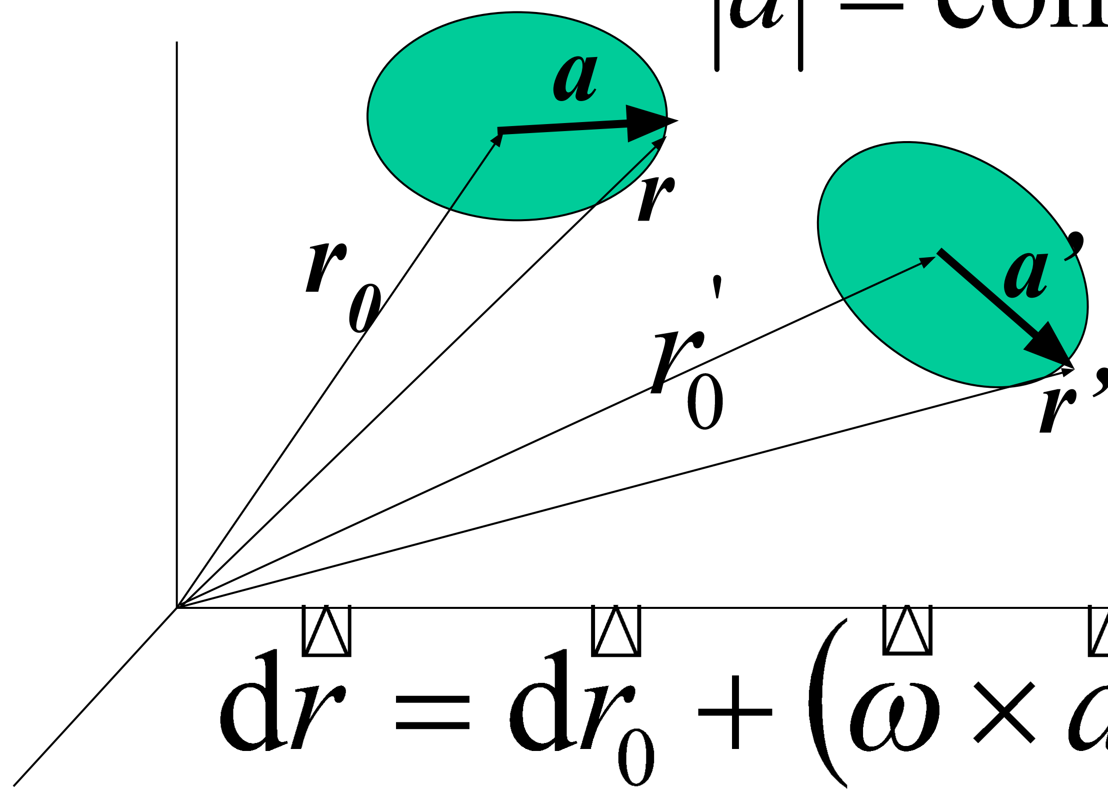


Эйлер, Ляпунов, Навье и Стокс

Перемещение твердого тела

$$|a| = \mathrm{const}$$



$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{a})\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

Перемещение и деформация жидкой частицы

$$\left|a\right| \neq \mathrm{const}$$

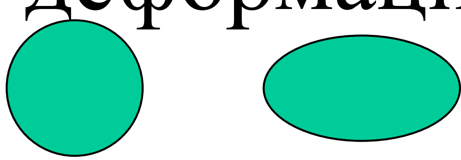
С точностью до малых величин второго порядка $\mathrm{d}\vec{a} = \left(\vec{a}\vec{\nabla}\right)\vec{u}\,\mathrm{d}t$

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Распишем по осям координат:

$$\mathrm{d}a_i = \frac{\partial F}{\partial a_i}dt + \left(\frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{u} \times \vec{a}\right)\mathrm{d}t$$

Чистая деформация

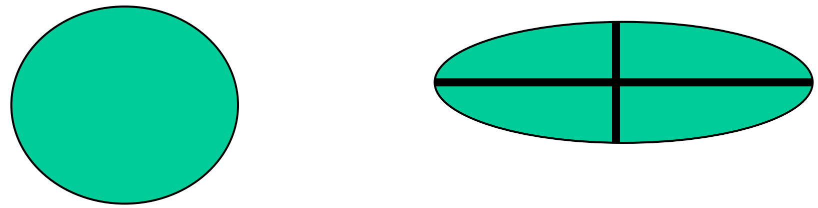


$$\mathrm{d}a_i = \frac{\partial F}{\partial a_i} dt + \left(\frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{u} \times \vec{a}\right)\mathrm{d}t$$

Вращательное перемещение , которое получает точка А, если бы частица затвердела при вращении вокруг мгновенной оси с угловой скоростью

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{u}$$

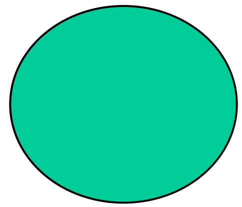
Чистая деформация



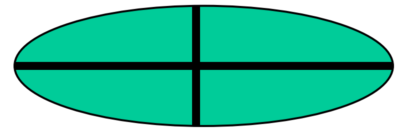
эллипсоид

шар

Главные оси эллипсоида – главные оси деформации (перпендикулярны поверхности эллипсоида в точках соприкосновения).



шар



эллипсоид

Если жидкость несжимаема, то объем элемента жидкости не меняется.

Изменение объема элемента жидкости при деформации определяет дивергенция скорости.

Дивергенция скорости **- скорость кубического расширения жидкости в точке**

$$\operatorname{div}\vec{u} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint_S \vec{u}\, d\vec{s}}{\tau}$$

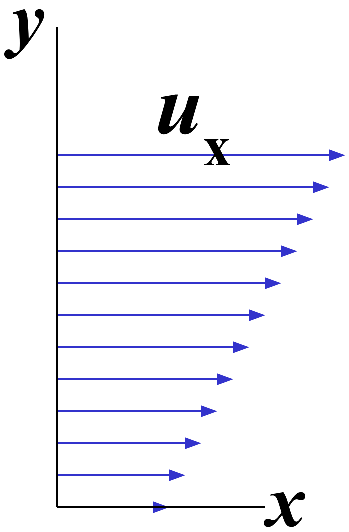
$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

В несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\vec{u} = 0$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = 0$$

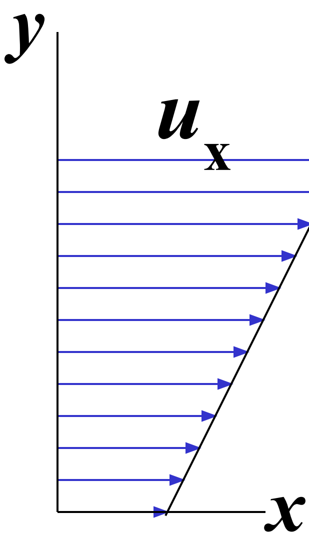
Задача 1

Записать поле скорости в проекциях на оси для плоского течения жидкости вида



Задача 1

Записать поле скорости в проекциях на оси для плоского течения вида



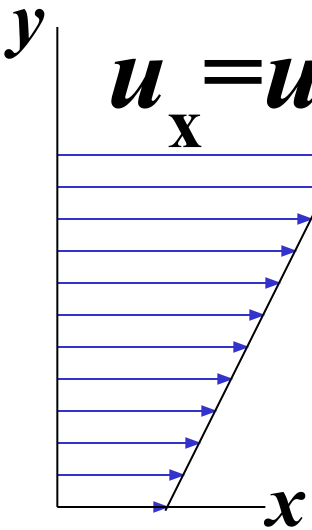
$$u_x = u_0 + Cy$$

$$u_y = 0$$

$$u_z = 0$$

Такой профиль скорости существует в вязком слое потока жидкости у твердой границы. Этот экспериментальный факт установил Ньютон

Задача 2

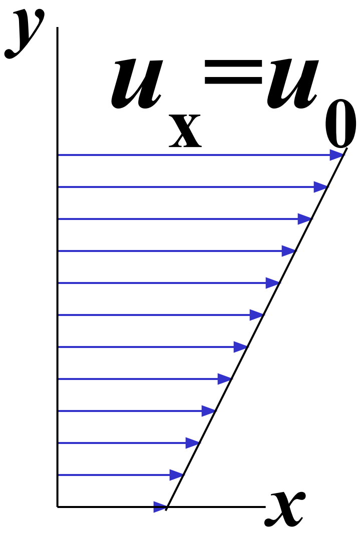


$$u_x = u_0 + Cy$$

Найти для этого течения

$$\vec{\nabla}\vec{u}$$

Задача 2



$$u_x = u_0 + Cy$$

Найти для этого течения

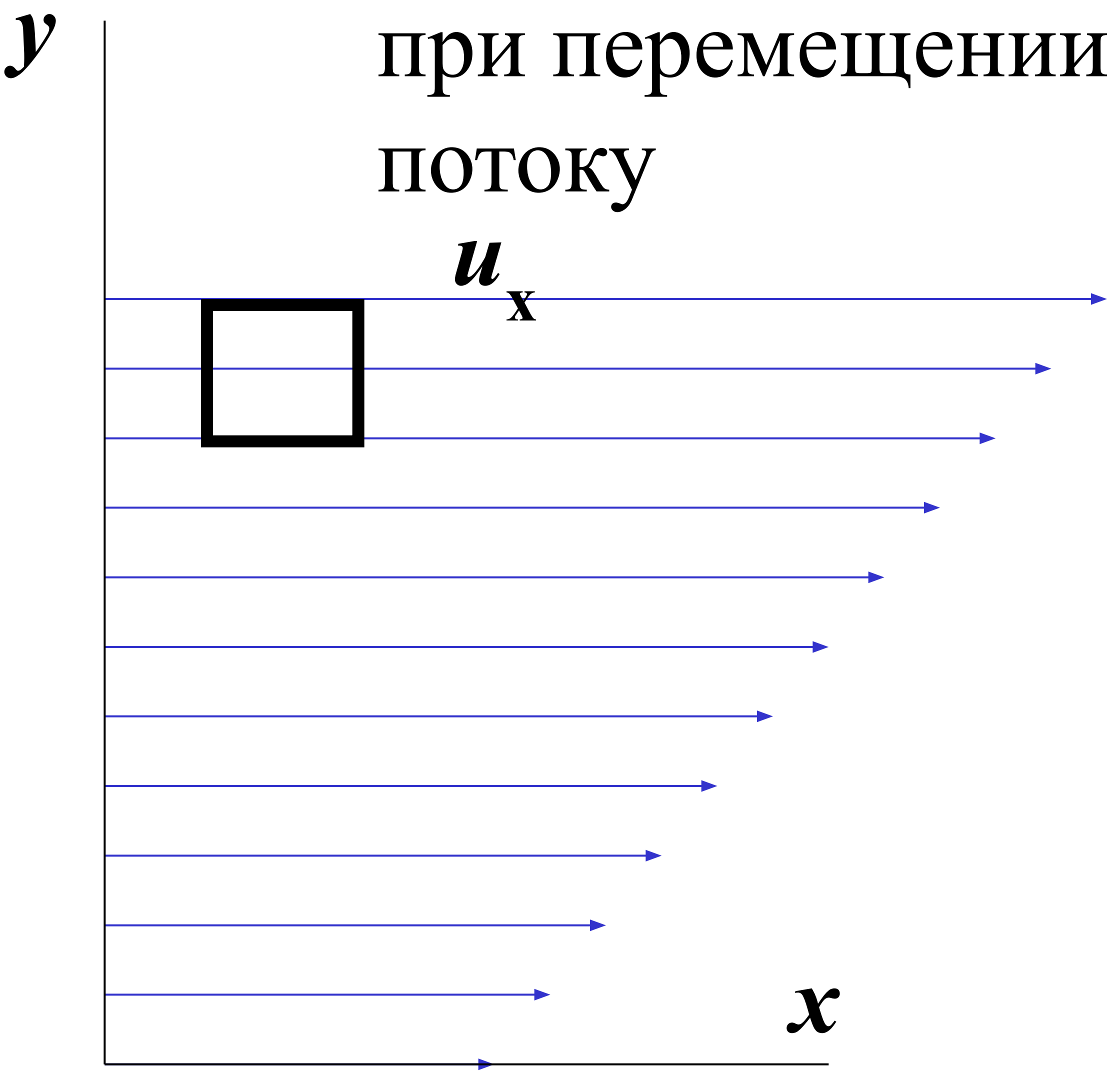
$$\vec{\nabla}\vec{u}$$

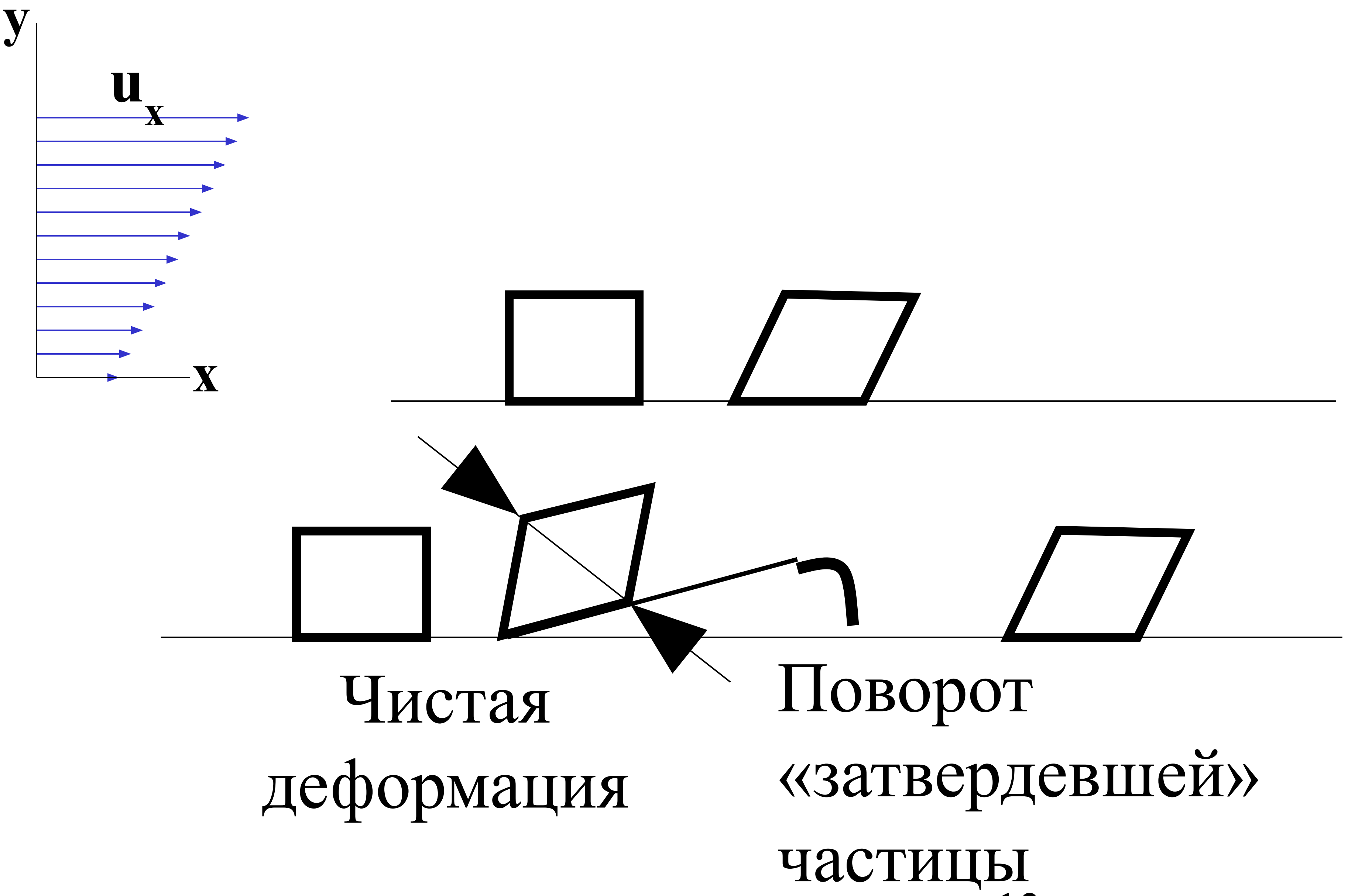
Скалярное произведение векторов

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{и} \quad \vec{u} = \vec{i}\,u_x$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = 0$$

Задача 3 Построить деформацию выделенного объема жидкости при перемещении вниз по потоку




y
u_x
x
Чистая деформация
Поворот «затвердевшей» частицы

Поле скорости.

Установившееся (стационарное) течение

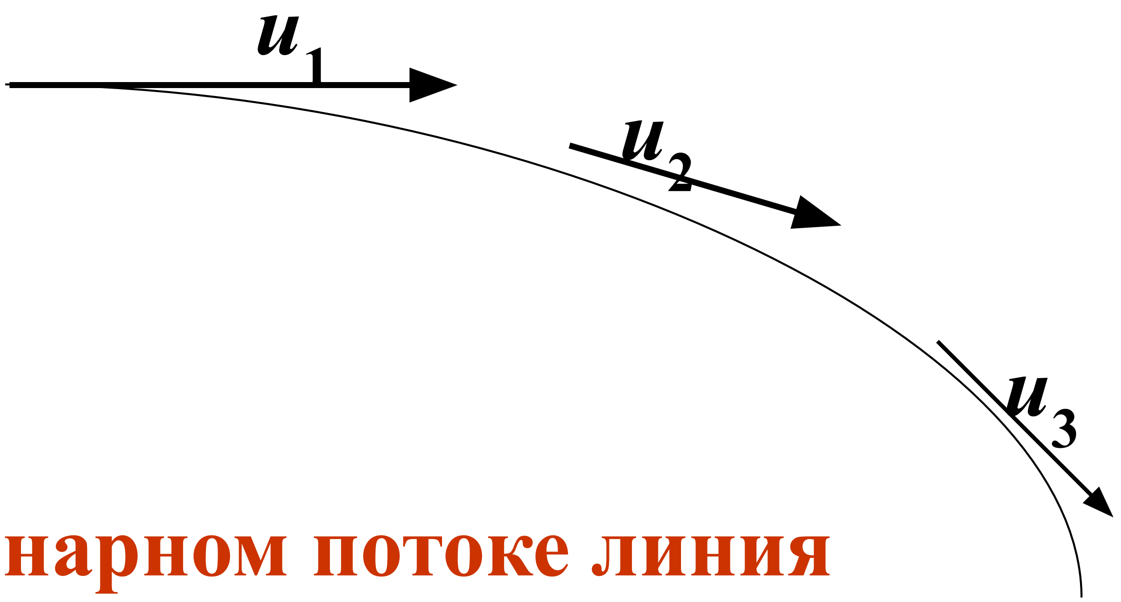
$$u=\mathrm{f}(x, y, z)$$

Неустановившееся (нестационарное) течение

$$u=\mathrm{f}(x, y, z, t)$$

Равномерное установившееся движение - скорость не меняется вдоль траектории

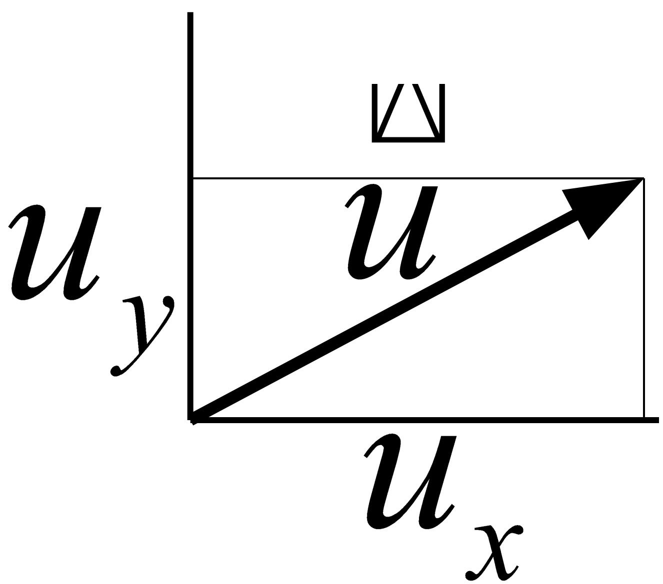
Линия тока: для данного момента времени t касательная к линии тока в любой ее точке совпадает по направлению со скоростью течения



В стационарном потоке линия тока совпадает с траекторией

Уравнение линии тока

$$\frac{dx}{u_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{u_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{u_z(x,y,z,t)}$$

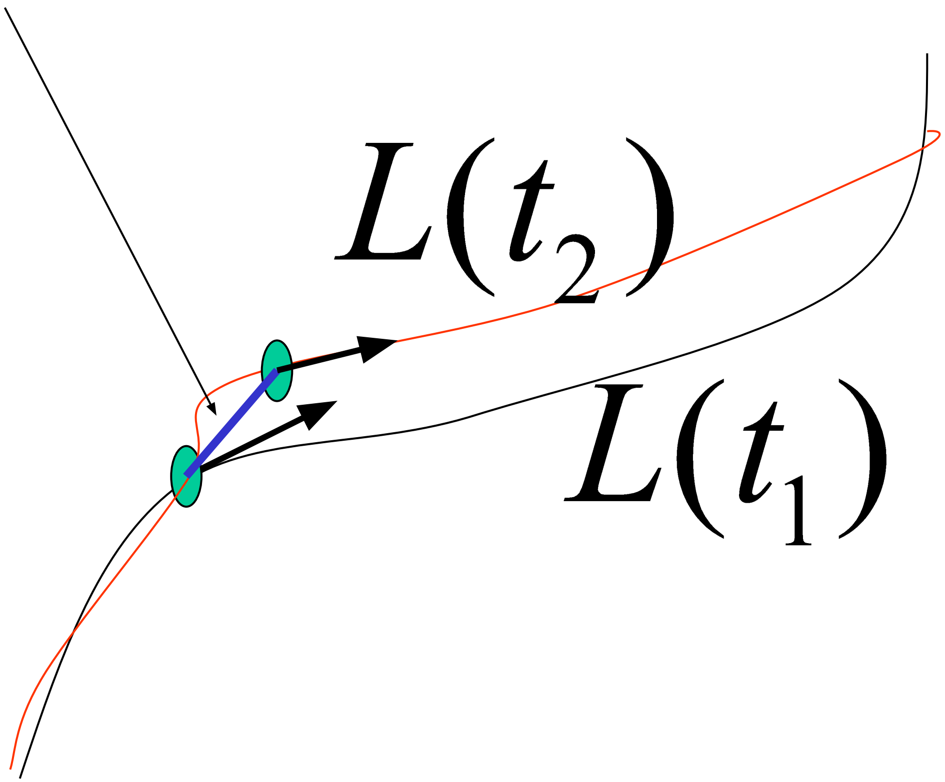


Показать, что

в нестационарном потоке линия тока не совпадает с траекторией

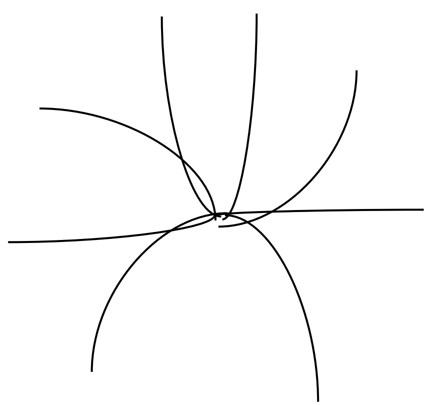
Линии тока в 2 разных момента времени в нестационарном потоке жидкости.

Траектория не совпадает с линией тока

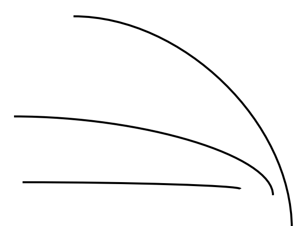


Если в некоторой точке $u \neq 0$, то через эту точку проходит только одна линия тока

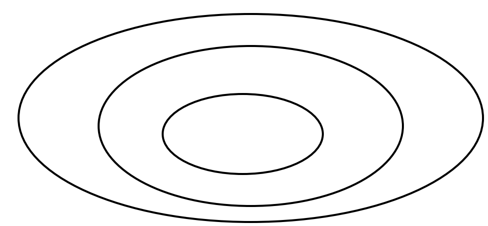
Если в некоторой точке $u = 0$, то это особая точка



узел



фокус



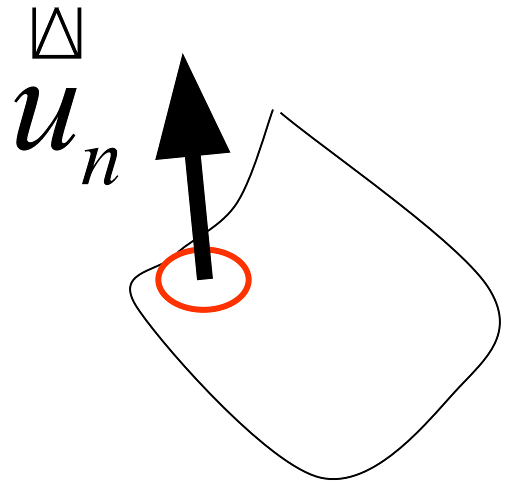
центр

Характеристики движения жидкости

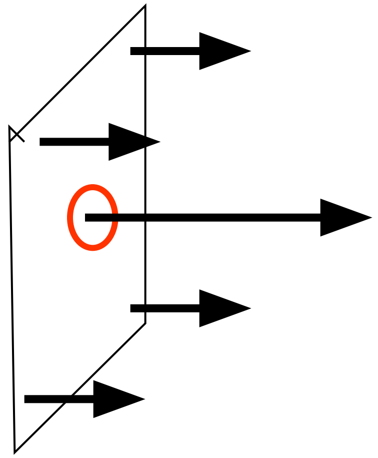
Поток скорости через поверхность S

$$\int_S \vec{u}\,d\vec{s} = \int_S u_n\,ds = \int_S (u_x\,dydz + u_y\,dxdz + u_z\,dxdy)$$

- это объем жидкости протекающий через S за единицу времени (**объемный расход**)



Средняя скорость течения в канале или трубе с поперечным сечением S:



$$\bar{u} = \frac{\int\limits_S u_n ds}{S}$$

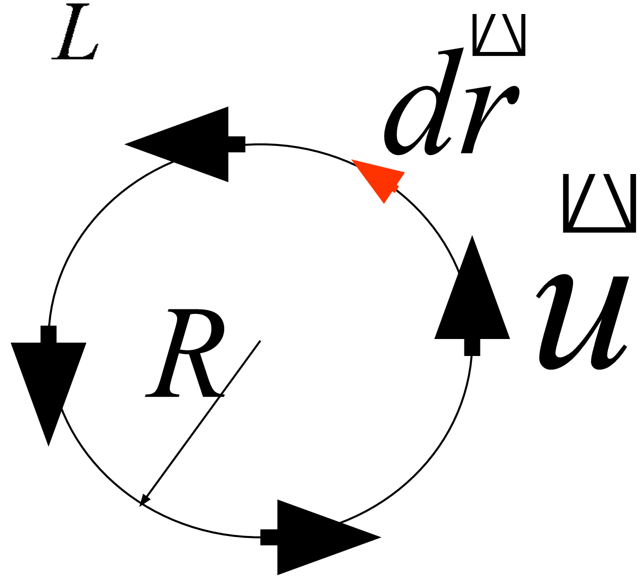
Дивергенция скорости - скорость кубического расширения жидкости в точке

$$\operatorname{div}\vec{u} = \lim_{\tau \to 0} \oint_S \frac{\vec{u}\,d\vec{s}}{\tau}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Циркуляция скорости по замкнутой кривой с определенным направлением обхода

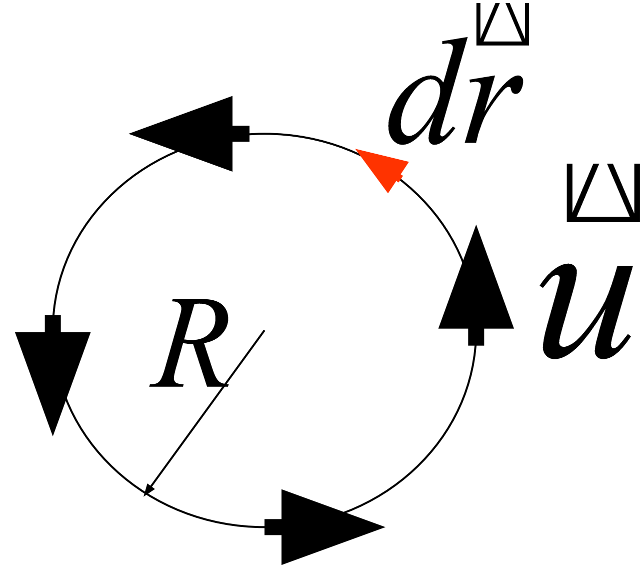
$$\gamma = \oint_L \vec{u}\,d\vec{r} = \oint_L u_x dx + u_y dy + u_z dz$$



Положительным считается направление обхода против часовой стрелки

Записать циркуляцию скорости, если жидкость вращается с постоянной скоростью вдоль окружности радиуса R

Вращение с постоянной скоростью вдоль окружности радиуса *R*

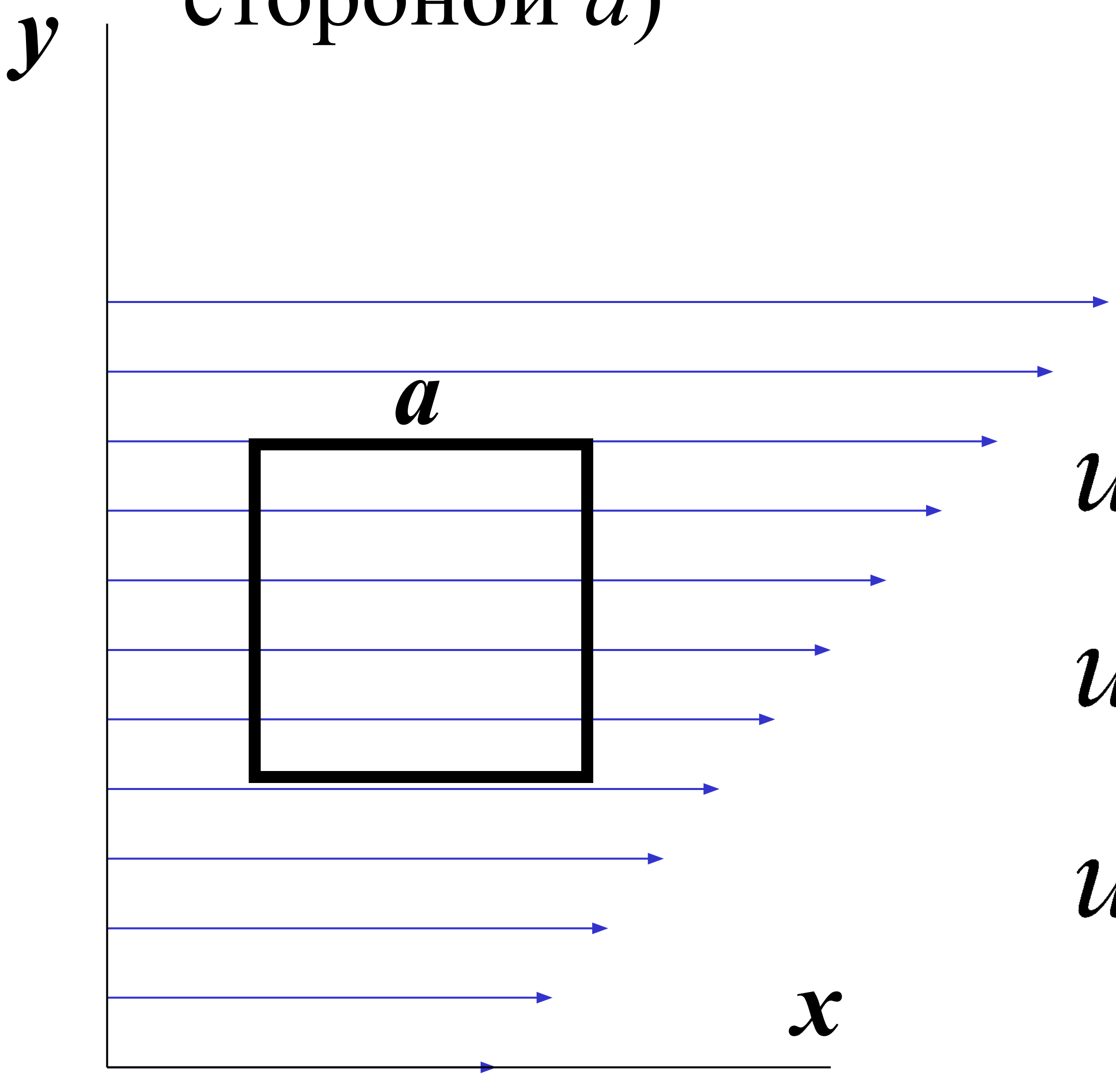


$$\gamma = \oint_L \vec{u}\,d\vec{r} = u2\pi R$$

$$u = \omega R$$

$$\gamma = \oint_L \vec{u}\,d\vec{r} = 2\omega\pi R^2$$

Определить циркуляцию скорости по выделенному контуру (квадрат со стороной a)

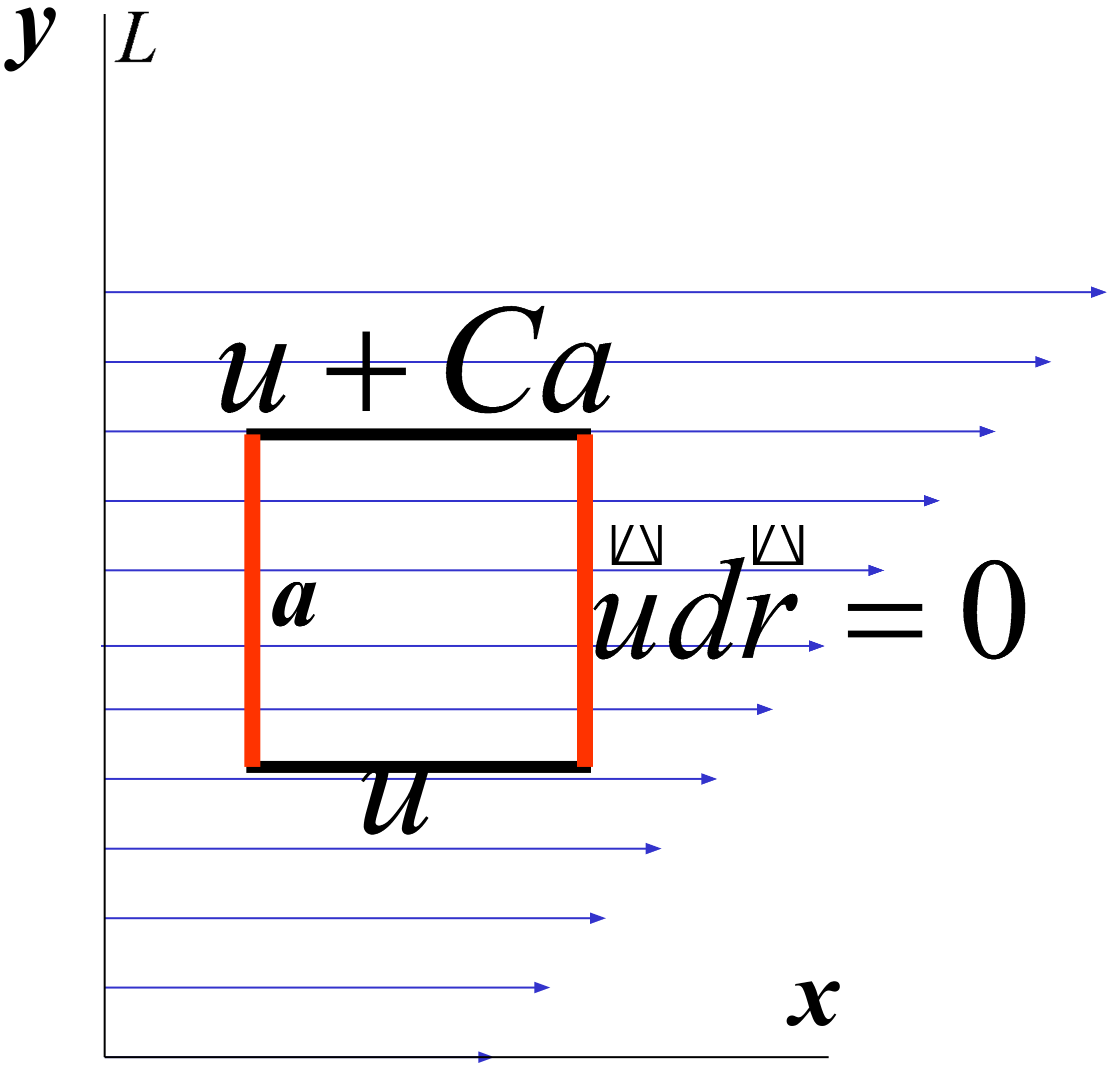


$$u_x = u_0 + Cy$$

$$u_y = 0$$

$$u_{z=0}$$

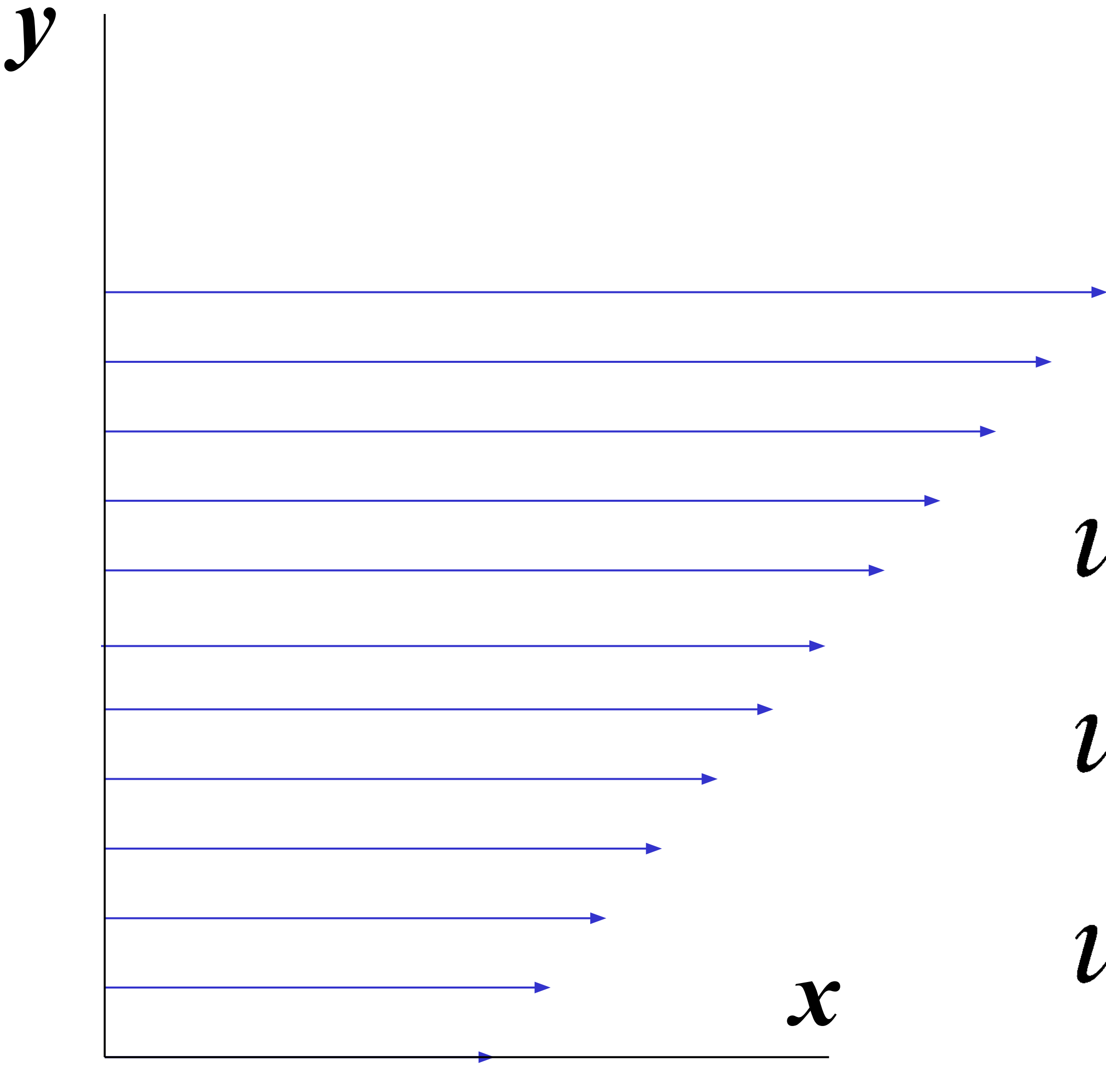
$$\gamma = \oint \vec{u}\, d\vec{r} = -a(u + Ca) + au = -a^2 C$$



Вихрь rot$u$ скорости векторное произведение оператора набла на скорость

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

Определить ротор скорости

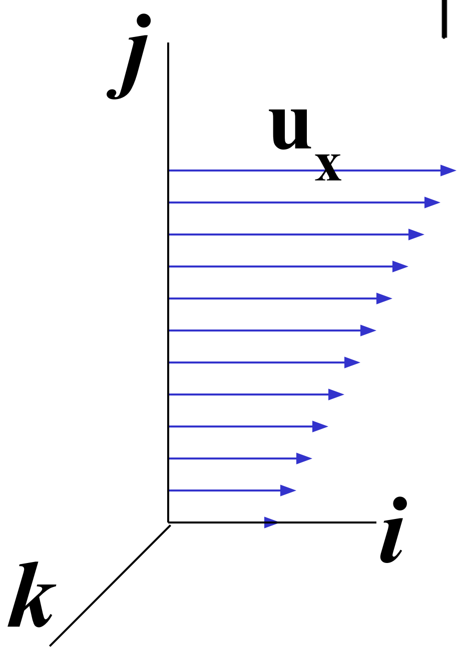


$$u_x = u_0 + Cy$$

$$u_y = 0$$

$$u_{z=0}$$

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_0 + Cy & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k}C$$



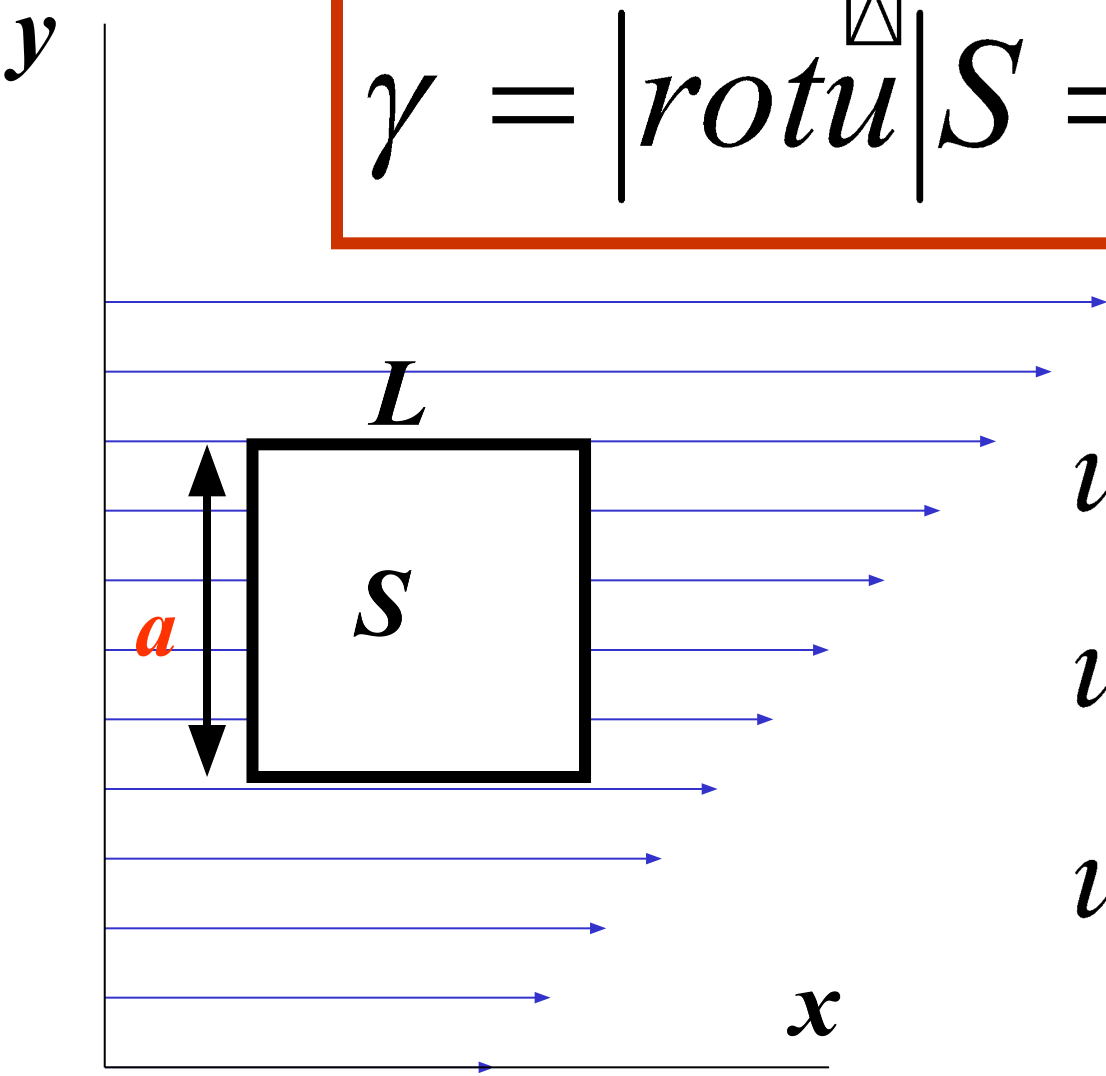
Вихрь rot$u$ и циркуляция скорости γ

$$\gamma = \oint_L \vec{u}\,d\vec{r} = \int_S rot\vec{u}\,d\vec{s}$$ (теорема Стокса)

Если $rot\vec{u} \underset{S}{=} \mathrm{const}\cdot\vec{n}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma = rot\vec{u}\,\vec{n}\,S}$

$$\gamma = rot\,u\,n\,S = -Ca^2$$

$$\gamma = |rot\,u|\,S = -Ca^2$$



$$u_x = u_0 + Cy$$

$$u_y = 0$$

$$u_{z=0}$$

Полная производная сложной функции

$$F(x, y, z, t)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

Обозначим компоненты скорости u_x, u_y, u_z

Найти компоненты ускорения w_x, w_y, w_z

Найти производную $\frac{d\rho}{dt}$

$$w_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_x}{\partial t}$$

$$w_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_y}{\partial t}$$

$$w_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_z}{\partial t}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}u_x + \frac{\partial\rho}{\partial y}u_y + \frac{\partial\rho}{\partial z}u_z$$

Записать, $\frac{d\rho}{dt}$ используя оператор ∇

Записать, $\dfrac{d\rho}{dt}$ используя оператор $\vec{\nabla}$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\,\nabla\rho$$

Контрольная работа

1. Определить циркуляцию скорости для потока с компонентами скорости $u_x = u_0 + cy$, $u_y = 0$, $u_z = 0$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R$
2. В сужающейся круглой трубе, ось которой направлена по оси x, радиус сечения уменьшается как линейная функция координаты x. На входе трубы радиуса R скорость потока равна U. Определить скорость потока на расстоянии L от входа
3. Записать по компонентам и в векторном виде $\dfrac{d\rho}{dt}$

Уравнение неразрывности

Масса элементарного объема жидкости не изменяется при переходе от момента времени t_0 к t

$$\iiint\limits_{\tau_0} \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0 = \iiint\limits_{\tau} \rho \; dx \; dy \; dz$$

$$\rho\delta\tau = \rho_0\delta\tau_0 = const$$

$$\frac{d(\rho\delta\tau)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt}\delta\tau + \rho\frac{d(\delta\tau)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\frac{d(\delta\tau)}{dt}}{\delta\tau} = 0$$

$$\frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau dt}$$

Скорость относительного кубического расширения жидкости в данной точке

$$\operatorname{div}\vec{u}$$

Уравнение неразрыности - **следует из закона сохранения массы**

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \nabla\vec{u} = 0$$

$$\frac{d\ln\rho}{dt} + \mathrm{div}\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

Задача

Показать, что уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \nabla \vec{u} = 0$$

можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\vec{u} = 0$$ умножаем на ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho\vec{u}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

Записать уравнение неразрывности для:

1. несжимаемой неоднородной по плотности жидкости
2. стационарного движения неоднородной по плотности жидкости

Несжимаемая неоднородная жидкость

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$$

$$\nabla \vec{u} = 0$$

Стационарное движение неоднородной жидкости

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \rho \vec{u} = 0$$

Используя уравнение неразрывности и теорему Гаусса

$$\int\limits_S \vec{u}\,d\vec{s} = \int\limits_\tau \mathrm{div}\,\vec{u}\,d\tau$$

показать, что объем несжимаемой жидкости втекающей через неподвижную замкнутую поверхностью *S* равен объему вытекающей жидкости через ту же поверхность.

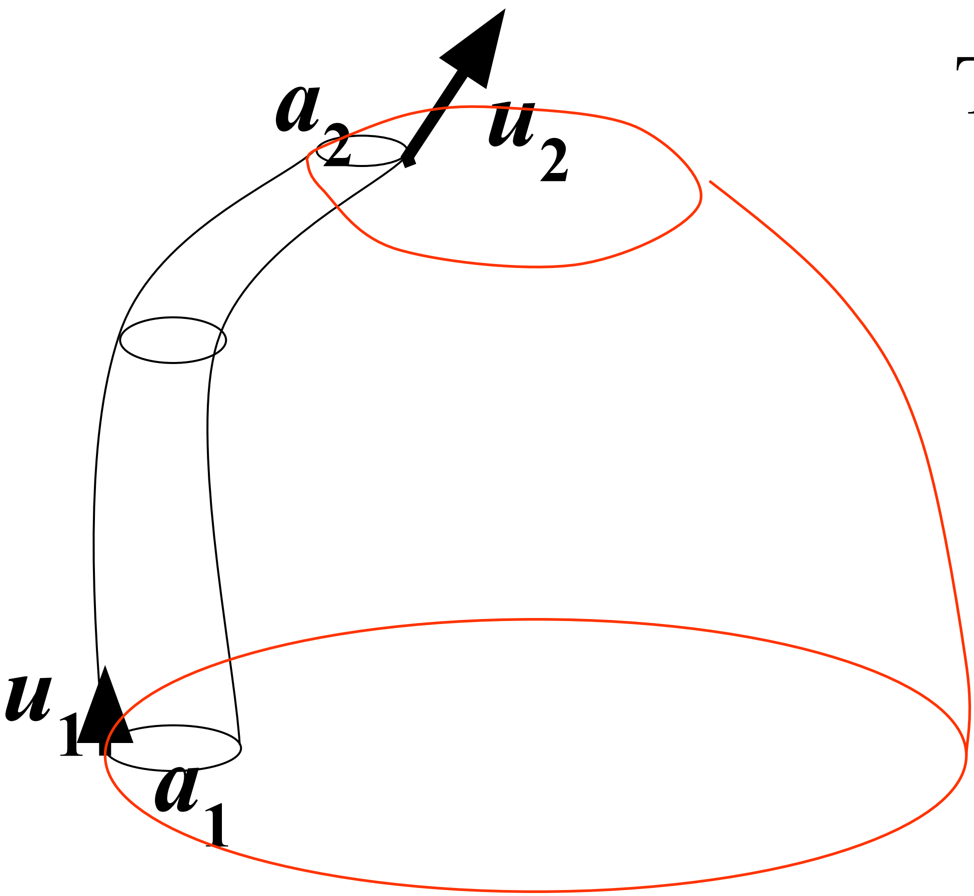
$$\int_S \vec{u}\,d\vec{s} = \int_S u_n\,ds = \int_S (u_x\,dydz + u_y\,dxdz + u_z\,dxdy)$$

$$\int_S \vec{u}\,d\vec{s} = \int_\tau \mathrm{div}\vec{u}\,d\tau$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = 0$$

$$\int_S u_n\,ds = 0$$

Пусть несжимаемая жидкость поступает в замкнутую область, ограниченную поверхностью *S*. Малые площадки ***a*** перпендикулярны линиям тока. Для каждой такой трубки тока $u_1 a_1 = u_2 a_2$



Так как $\int\limits_S u_n ds = 0$

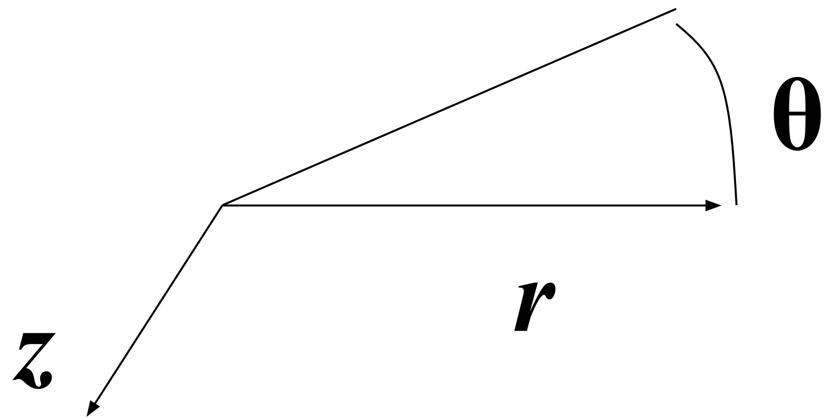
то число входящих трубок тока равно числу выходящих трубок тока.

ВЫВОД

Внутри любой замкнутой поверхности линии тока несжимаемой жидкости не могут ни начинаться, ни заканчиваться.

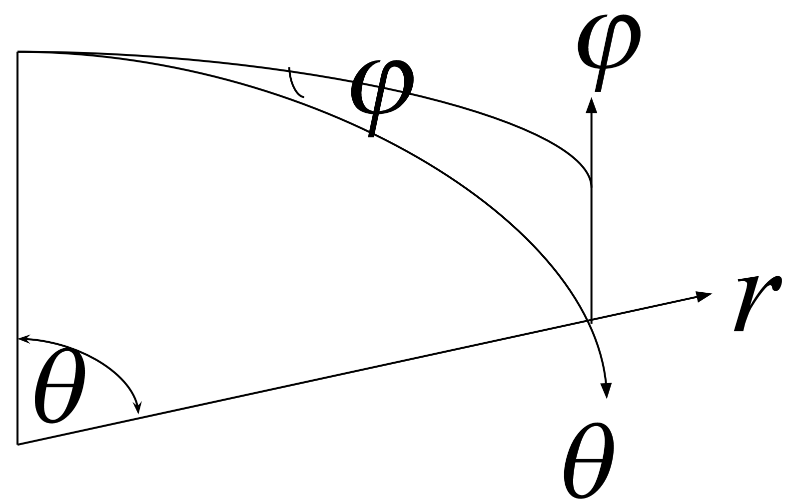
Уравнение неразрывности в цилиндрических и сферических координатах

Цилиндрические координаты



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho r u_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho u_\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(\rho u_z\right)}{\partial z} = 0$$

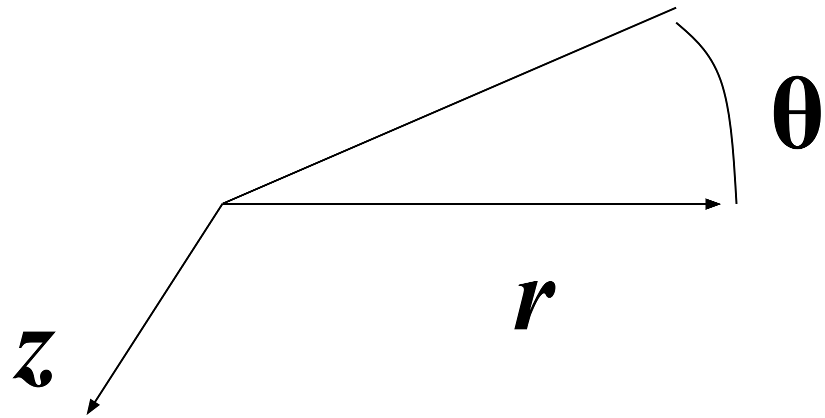
Сферические координаты



$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(\rho r^2 u_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(\rho u_\theta \sin\theta\right)}{\partial \theta}+\frac{\partial\left(\rho u_\varphi\right)}{\partial \varphi}\right)=0$$

Задача 1

Каждая частичка жидкости описывает окружность, перпендикулярную к постоянной оси и с центром на ней. Получить уравнение неразрывности.



Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial\theta}=0,\ u_r=0,\ u_z=0,\ u_\theta=\omega r$$

где ω - угловая скорость θ

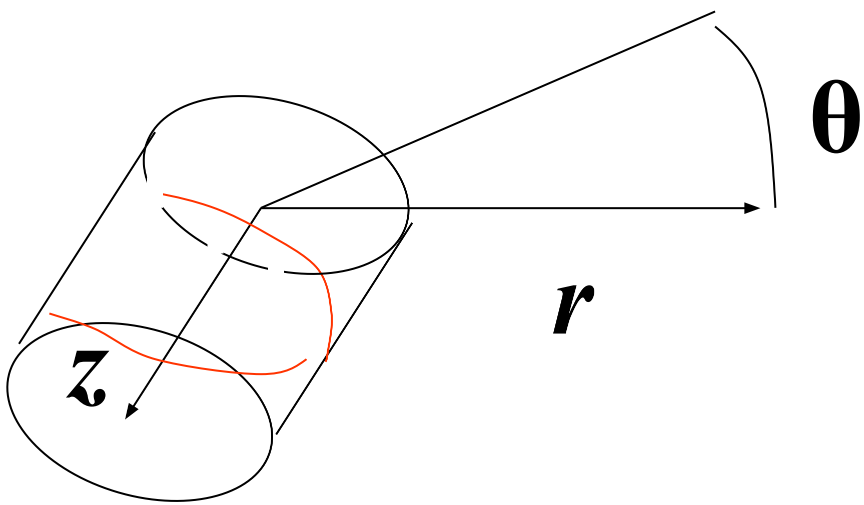
Задача 2

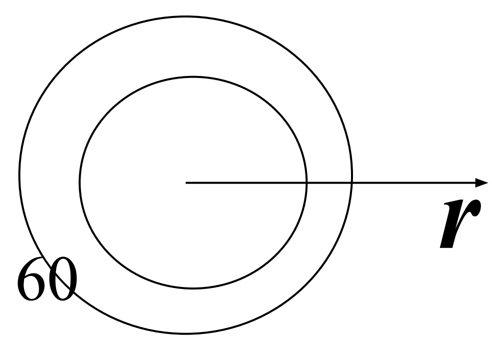
Траектории частиц расположены на поверхностях коаксиальных цилиндров. Найти уравнение неразрывности.

Ответ к задаче 2

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho u_\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(\rho u_z\right)}{\partial z} = 0$$

$$u_r = 0$$





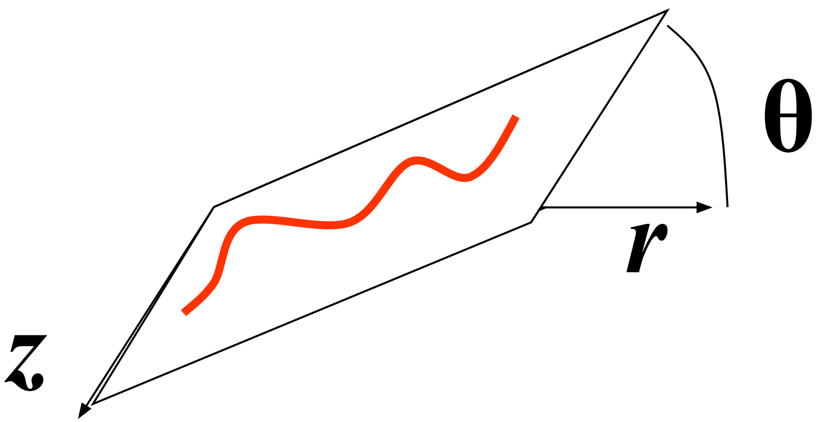
Задача 3

Каждая частичка жидкости движется в плоскости, проходящей через ось z.

Ответ к задаче 3

$$u_\theta = 0$$

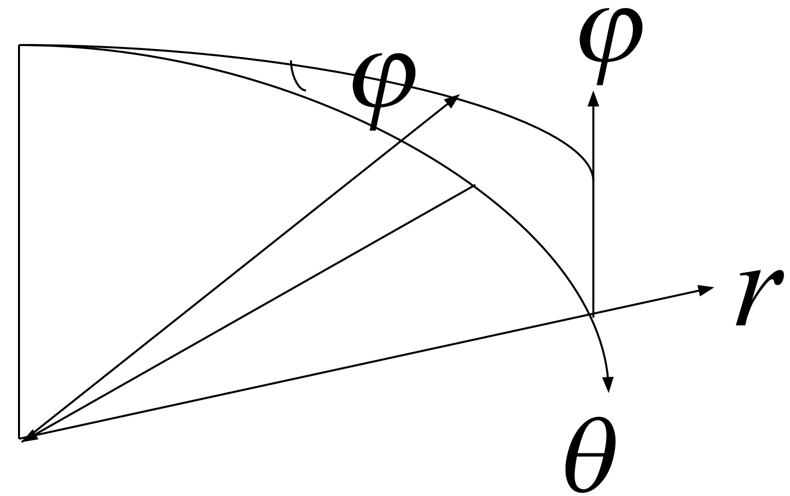
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$



Задача 4

Частицы жидкости движутся в пространстве симметрично по отношению к неподвижному центру так, что скорость каждой частицы направлена либо от центра, либо к центру и зависит только от расстояния ***r*** от центра

Ответ к задаче 4



$$u_\theta = 0$$

$$u_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial u_r r^2}{\partial r} = 0$$