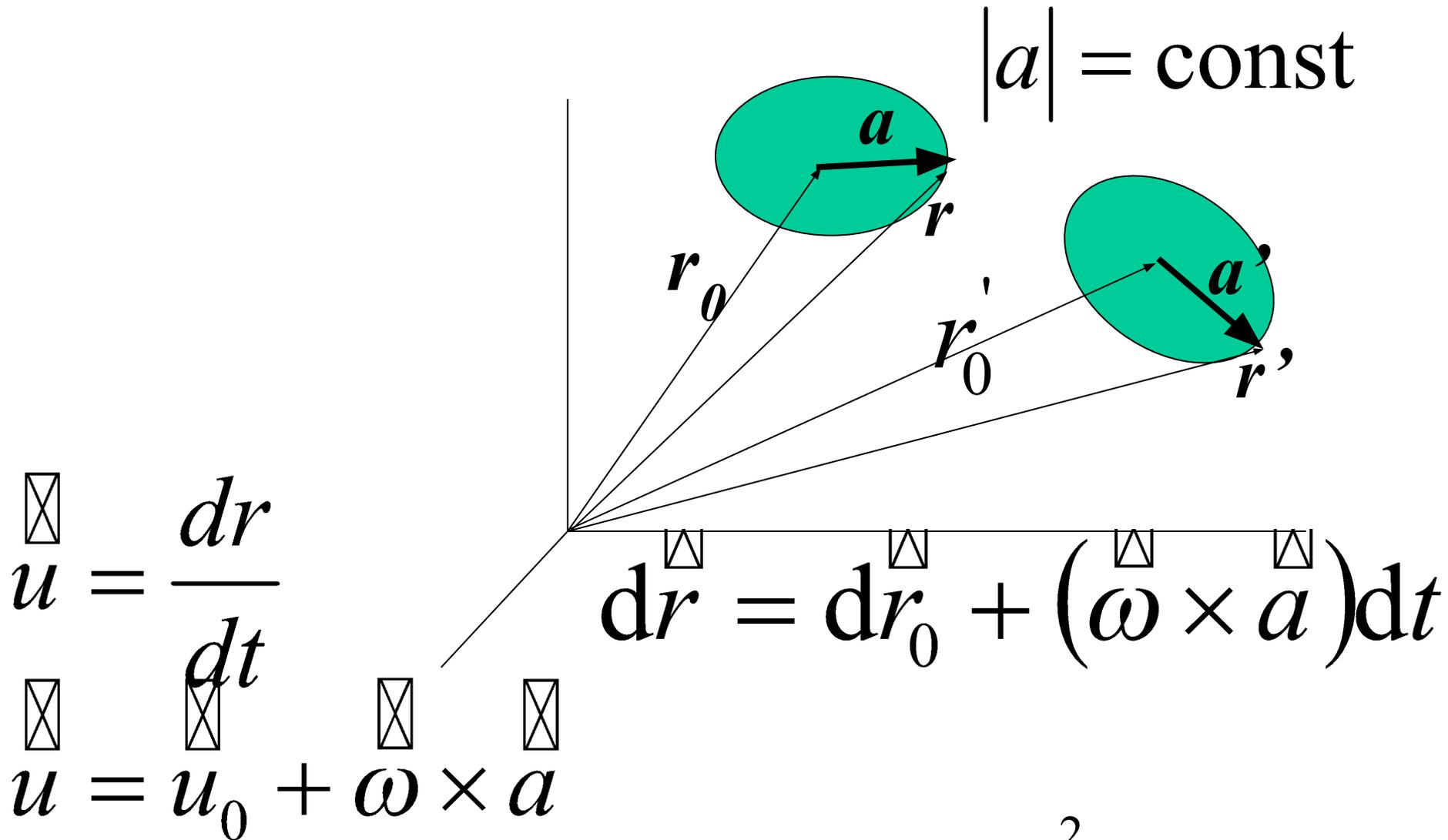


Эйлер, Ляпунов, Навье и Стокс

Перемещение твердого тела



Перемещение и деформация жидкой частицы

$|a| \neq \text{const}$

С точностью до малых величин второго порядка

$$da = (a \nabla) u dt$$

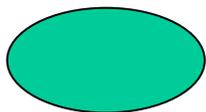
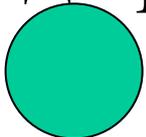
$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Распишем по осям координат:

$$da_i = \frac{\partial F}{\partial a_i} dt + \left(\frac{1}{2} \text{rot} u \times a \right) dt$$

Чистая

деформация

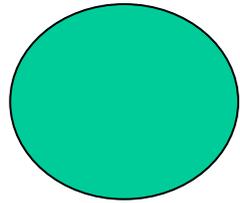


$$da_i = \frac{\partial F}{\partial a_i} dt + \left(\frac{1}{2} \text{rot} u \times a \right) dt$$

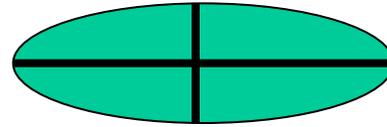
Вращательное перемещение, которое получает точка А, если бы частица затвердела при вращении вокруг мгновенной оси с угловой скоростью

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot} u$$

Чистая деформация

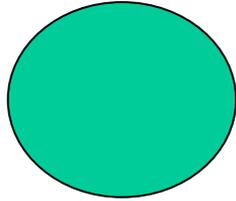


шар

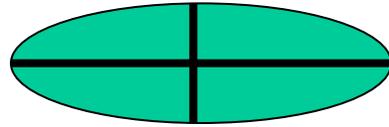


эллипсоид

Главные оси эллипсоида – главные оси деформации (перпендикулярны поверхности эллипсоида в точках соприкосновения).



шар



ЭЛЛИПСОИД

Если жидкость несжимаема, то объем элемента жидкости не меняется.

Изменение объема элемента жидкости при деформации определяет дивергенция скорости.

Дивергенция скорости - скорость кубического расширения жидкости

в точке

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_S \frac{u ds}{\tau}$$

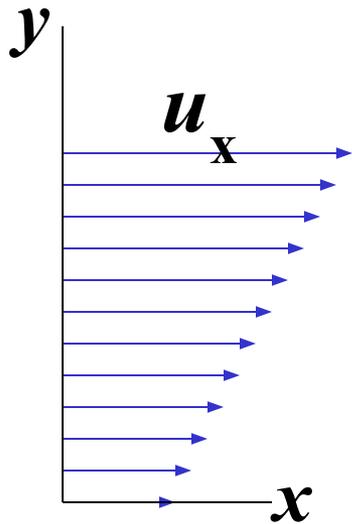
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

В несжимаемой жидкости $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

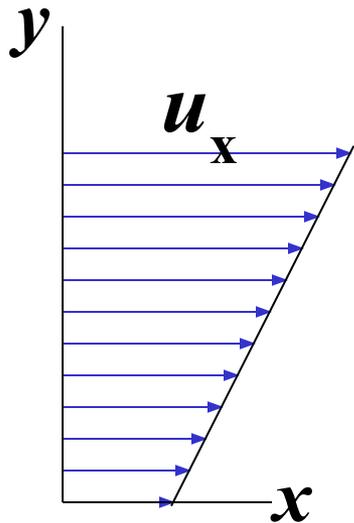
Задача 1

Записать поле скорости в проекциях на оси для плоского течения жидкости вида



Задача 1

Записать поле скорости в проекциях на оси для плоского течения вида



$$u_x = u_0 + Cy$$

$$u_y = 0$$

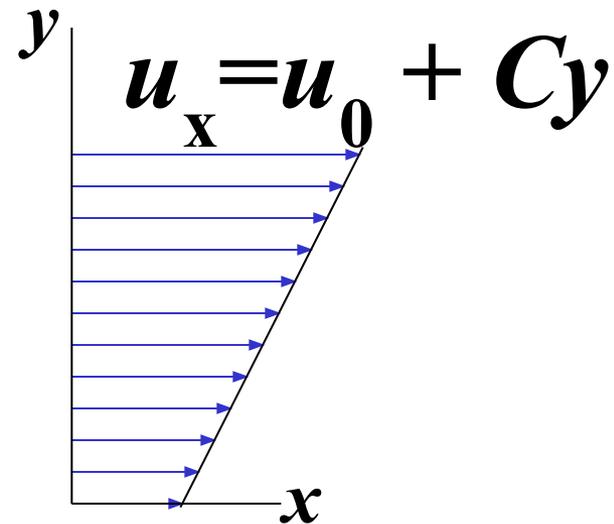
$$u_z = 0$$

Такой профиль скорости существует в вязком слое потока жидкости у твердой границы. Этот экспериментальный факт установил Ньютон

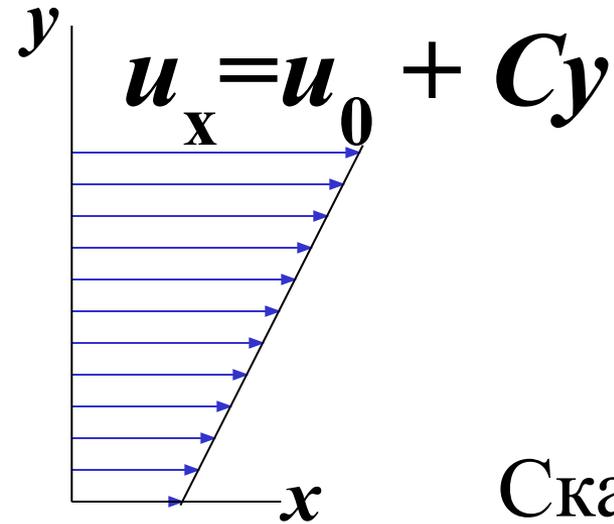
Задача 2

Найти для этого течения

$$\nabla^2 \mathcal{U}$$



Задача 2



Найти для этого течения

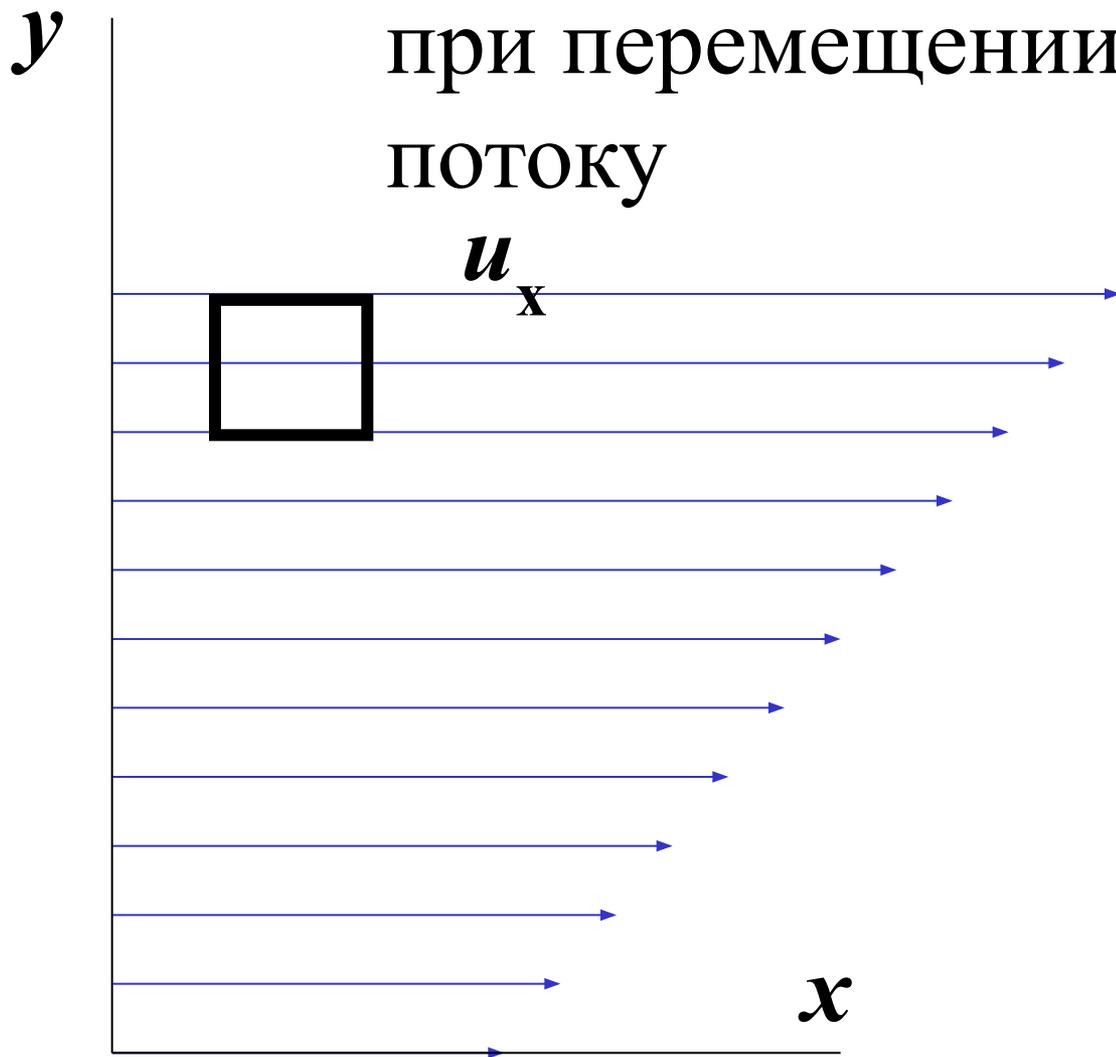
$$\nabla \mathcal{U}$$

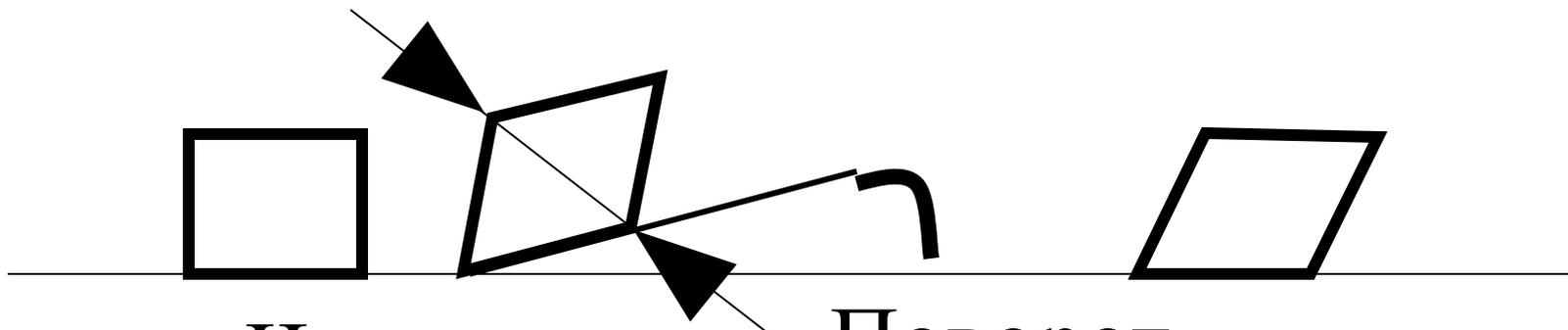
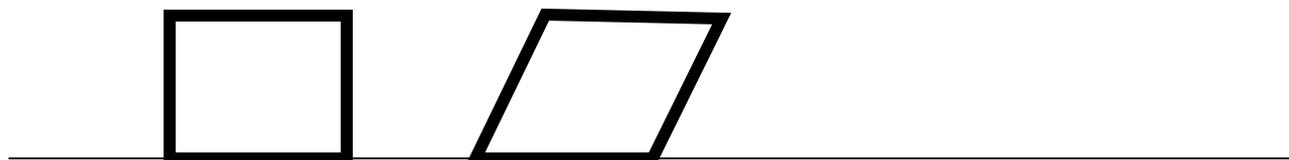
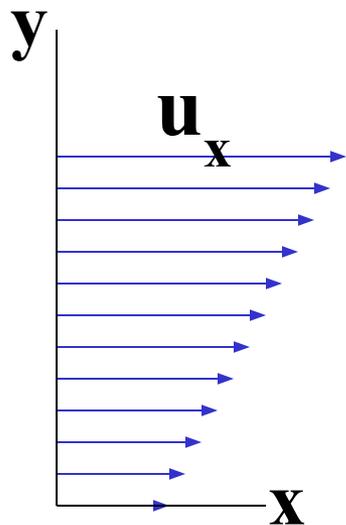
Скалярное произведение векторов

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{и} \quad \mathcal{U} = i u_x$$

$$\nabla \mathcal{U} = 0$$

Задача 3 Построить деформацию
выделенного объема жидкости
при перемещении вниз по
потоку





Чистая
деформация

Поворот
«затвердевшей»
частицы

Поле скорости.

Установившееся (стационарное) течение

$$u=f(x, y, z)$$

Неустановившееся (нестационарное)

течение

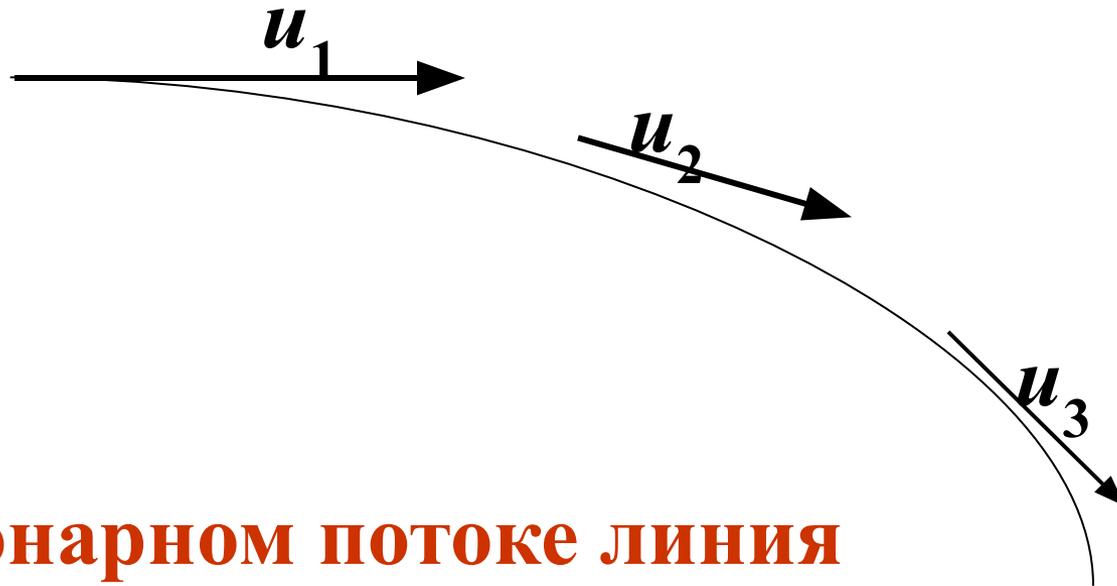
$$u=f(x, y, z, t)$$

Равномерное установившееся движение

- скорость не меняется вдоль

траектории

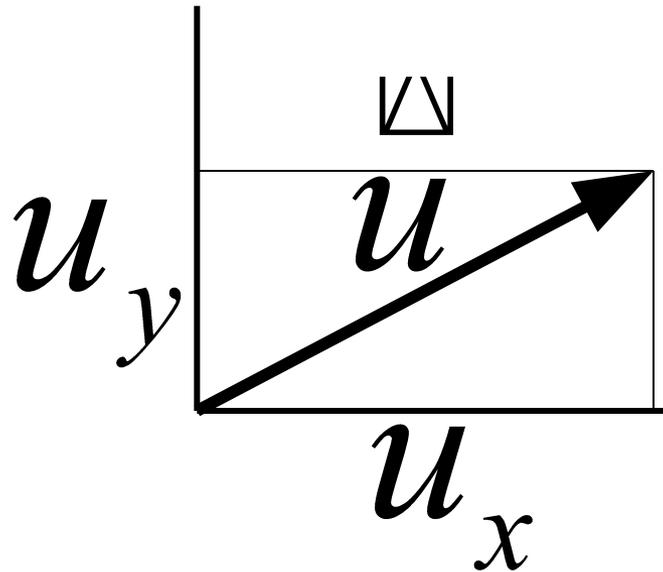
Линия тока: для данного момента времени t касательная к линии тока в любой ее точке совпадает по направлению со скоростью течения



В стационарном потоке линия тока совпадает с траекторией

Уравнение линии тока

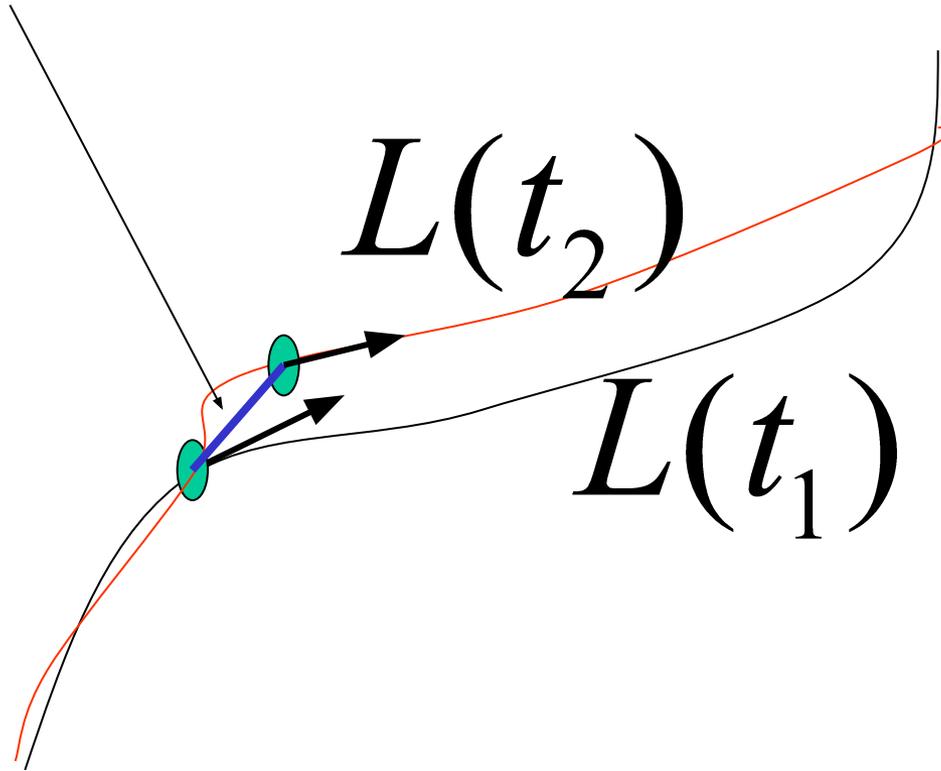
$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)}$$



**Показать, что
в нестационарном потоке
линия тока не совпадает с
траекторией**

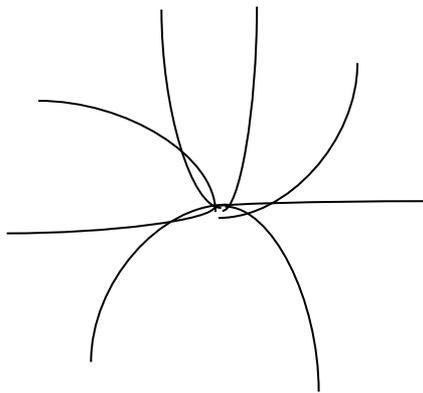
Линии тока в 2 разных момента времени в нестационарном потоке жидкости.

Траектория не совпадает с линией тока

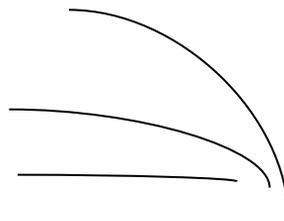


Если в некоторой точке $u \neq 0$, то через эту точку проходит только одна линия тока

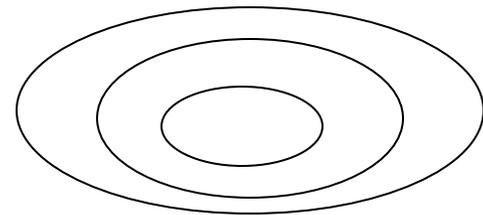
Если в некоторой точке $u = 0$, то это особая точка



узел



фокус



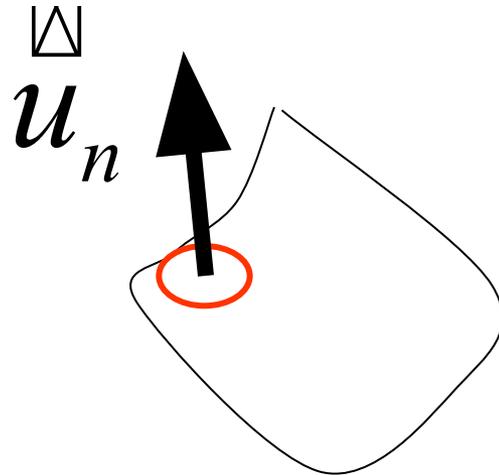
центр

Характеристики движения жидкости

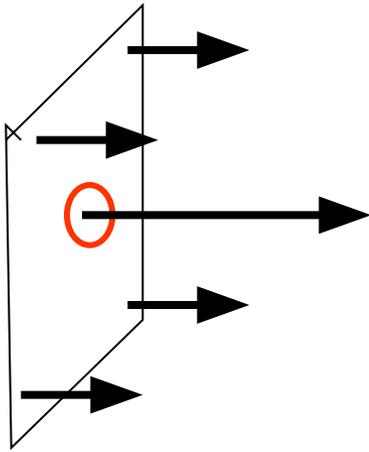
Поток скорости через поверхность S

$$\int_S \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_S u_n ds = \int_S (u_x dydz + u_y dxdz + u_z dxdy)$$

- это объем жидкости протекающий через S за единицу времени (**объемный расход**)



Средняя скорость течения в канале
или трубе с поперечным сечением S :



$$\overline{u} = \frac{\int_S u_n ds}{S}$$

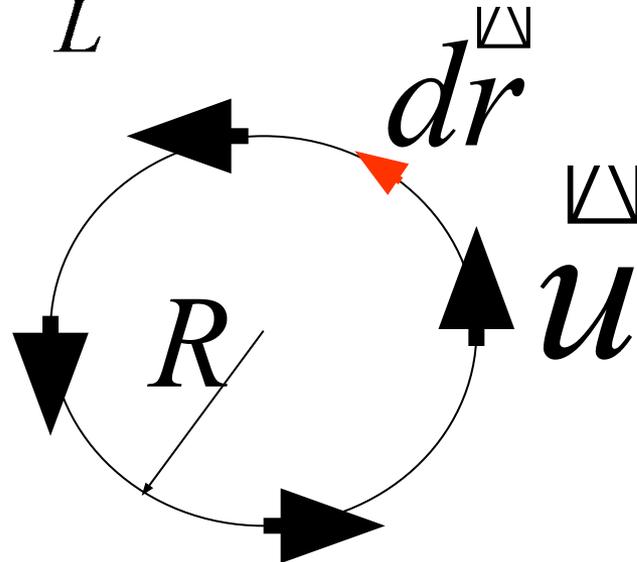
Дивергенция скорости - скорость кубического расширения жидкости в точке

$$\operatorname{div} \vec{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_S \frac{\vec{u} \cdot d\vec{s}}{\tau}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Циркуляция скорости по замкнутой кривой с определенным направлением обхода

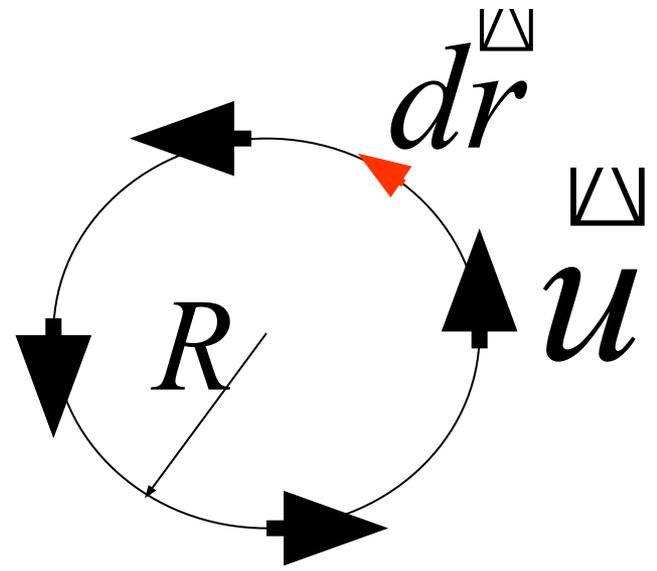
$$\gamma = \int_L \mathbf{u} d\mathbf{r} = \int_L u_x dx + u_y dy + u_z dz$$



Положительным считается направление обхода против часовой стрелки

Записать циркуляцию скорости, если жидкость
вращается с постоянной скоростью вдоль
окружности радиуса R

Вращение с постоянной скоростью вдоль окружности радиуса R

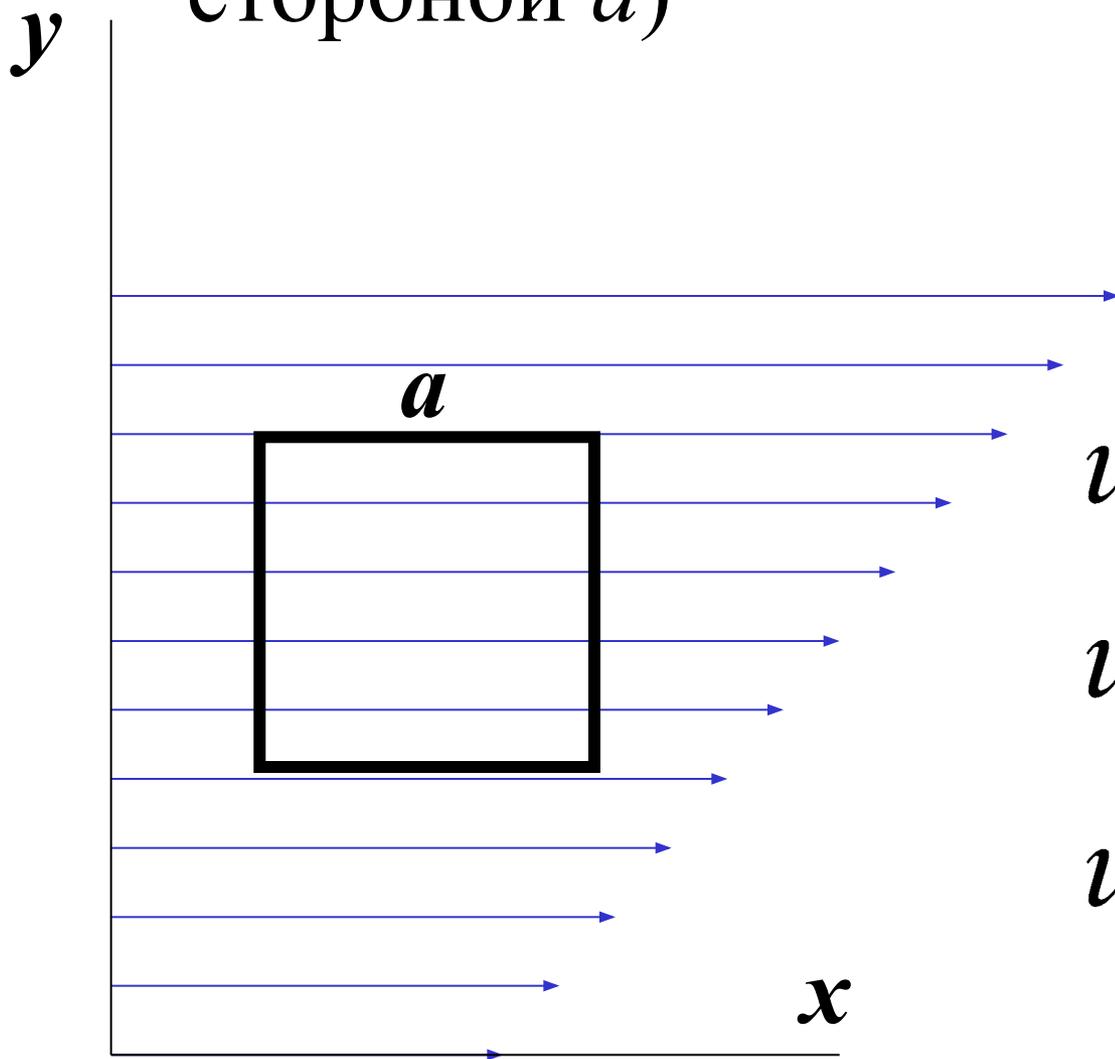


$$\gamma = \oint_L u dr = u 2\pi R$$

$$u = \omega R$$

$$\gamma = \oint_L u dr = 2\omega\pi R^2$$

Определить циркуляцию скорости по выделенному контуру (квадрат со стороной a)

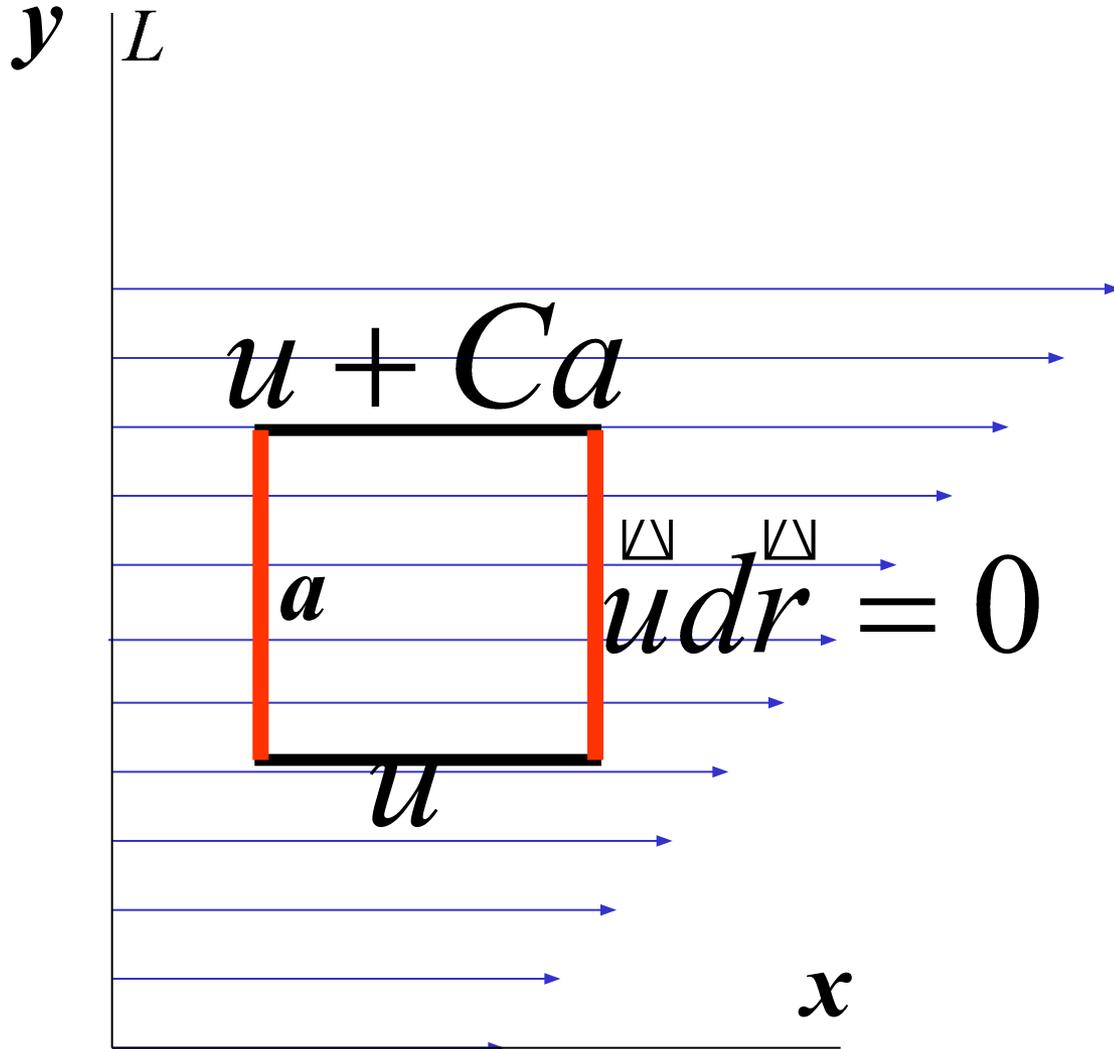


$$u_x = u_0 + Cy$$

$$u_y = 0$$

$$u_{z=0}$$

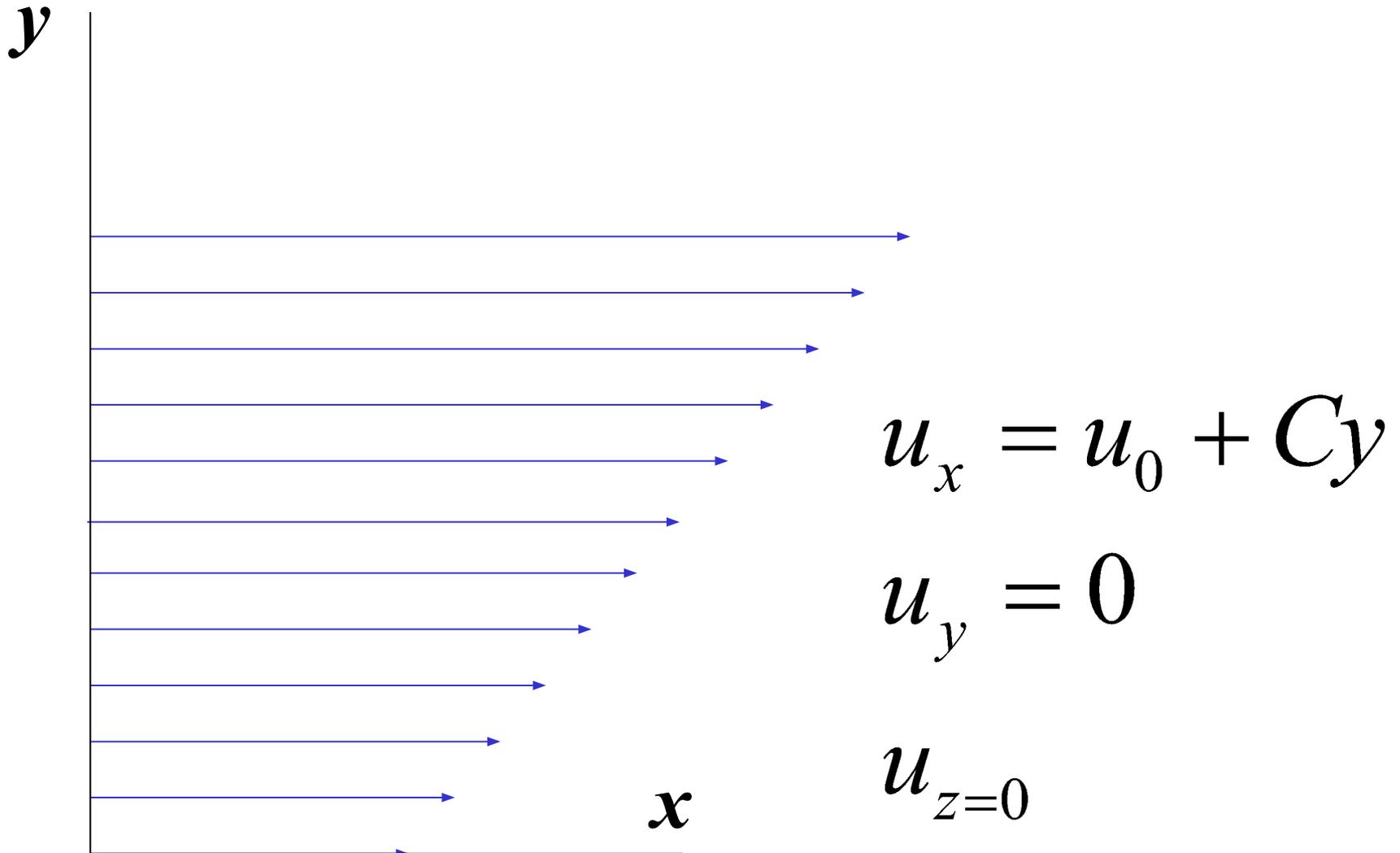
$$\gamma = \oint u dr = -a(u + Ca) + au = -a^2 C$$



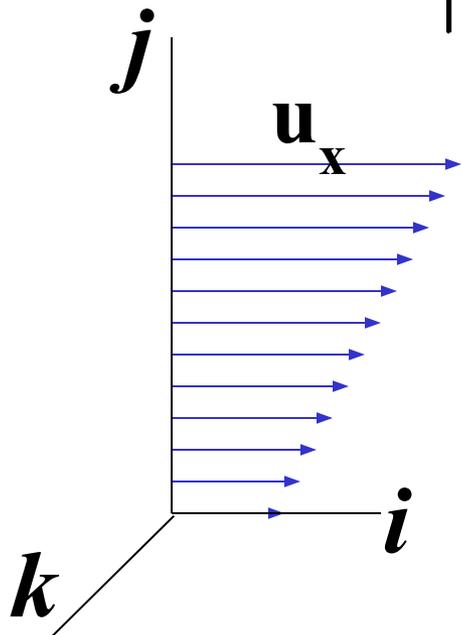
Вихрь **rot***u* скорости векторное произведение оператора набла на скорость

$$\text{rot } \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

Определить ротор скорости



$$\text{rot } \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_0 + Cy & 0 & 0 \end{vmatrix} = -kC$$



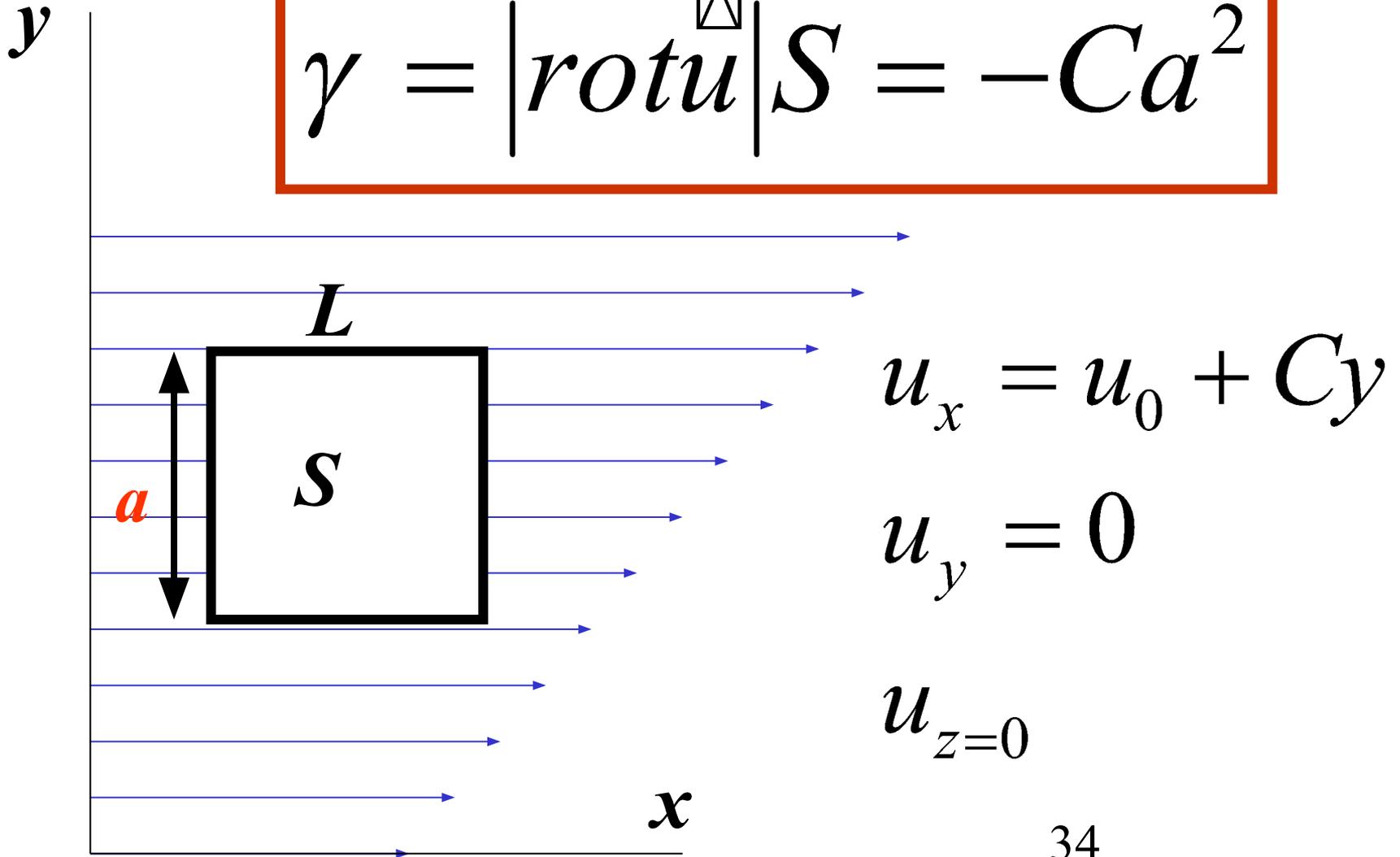
Вихрь $\text{rot}u$ и циркуляция скорости γ

$$\gamma = \oint_L u dr = \int_S \text{rot}u ds \quad (\text{теорема Стокса})$$

Если $\text{rot}u = \text{const} \cdot n \rightarrow \gamma = \text{rot}u n S$

$$\gamma = \text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} S = -Ca^2$$

$$\gamma = |\text{rot} \mathbf{u}| S = -Ca^2$$



Полная производная сложной функции

$$F(x, y, z, t)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

Обозначим компоненты скорости u_x, u_y, u_z

Найти компоненты ускорения w_x, w_y, w_z

Найти производную $\frac{d\rho}{dt}$

$$w_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_x}{\partial t}$$

$$w_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_y}{\partial t}$$

$$w_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_z}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} u_x + \frac{\partial\rho}{\partial y} u_y + \frac{\partial\rho}{\partial z} u_z \end{aligned}$$

Записать, $\frac{d\rho}{dt}$ используя оператор ∇

Записать, $\frac{d\rho}{dt}$ используя оператор



$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$$

Контрольная работа

1. Определить циркуляцию скорости для потока с компонентами скорости $u_x = u_0 + cy$, $u_y = 0$, $u_z = 0$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$
2. В сужающейся круглой трубе, ось которой направлена по оси x , радиус сечения уменьшается как линейная функция координаты x . На входе трубы радиуса R скорость потока равна U . Определить скорость потока на расстоянии L от входа
3. Записать по компонентам и в векторном виде $\frac{d\rho}{dt}$

Уравнение неразрывности

**Масса элементарного объема жидкости
не изменяется при переходе от момента
времени t_0 к t**

$$\iiint_{\tau_0} \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0 = \iiint_{\tau} \rho dx dy dz$$

$$\rho \delta \tau = \rho_0 \delta \tau_0 = \text{const}$$

$$\frac{d(\rho \delta \tau)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} \delta\tau + \rho \frac{d(\delta\tau)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\frac{d(\delta\tau)}{dt}}{\delta\tau} = 0$$

$$\frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau dt}$$

**Скорость относительного
кубического расширения
жидкости в данной точке**

$\text{div} \mathbf{u}$

Уравнение неразрывности -

следует из

закона

сохранения

массы

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

Задача

Показать, что уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{умножаем на } \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

Записать уравнение
неразрывности для:

1. несжимаемой неоднородной
по плотности жидкости
2. стационарного движения
неоднородной по плотности
жидкости

Несжимаемая неоднородная жидкость

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Стационарное движение неоднородной жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$

Используя уравнение
неразрывности и теорему Гаусса

$$\int_S \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_V \operatorname{div} \vec{u} d\tau$$

показать, что объем несжимаемой жидкости
втекающей через неподвижную замкнутую
поверхностью S равен объему вытекающей
жидкости через ту же поверхность.

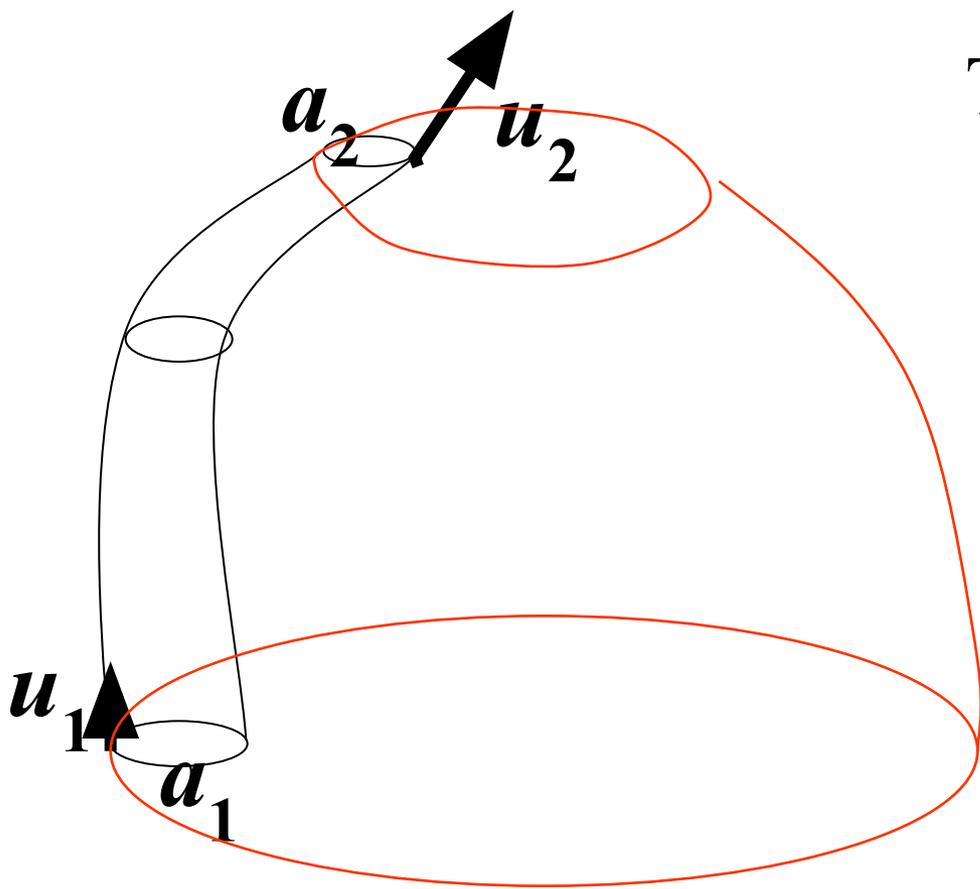
$$\int_S \vec{u} \cdot \vec{ds} = \int_S u_n ds = \int_S (u_x dydz + u_y dxdz + u_z dxdy)$$

$$\int_S \vec{u} \cdot \vec{ds} = \int_{\tau} \text{div} \vec{u} d\tau$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\int_S u_n ds = 0$$

Пусть **несжимаемая** жидкость поступает в замкнутую область, ограниченную поверхностью S . Малые площадки a перпендикулярны линиям тока. Для каждой такой трубки тока $u_1 a_1 = u_2 a_2$



Так как $\int_S u_n ds = 0$

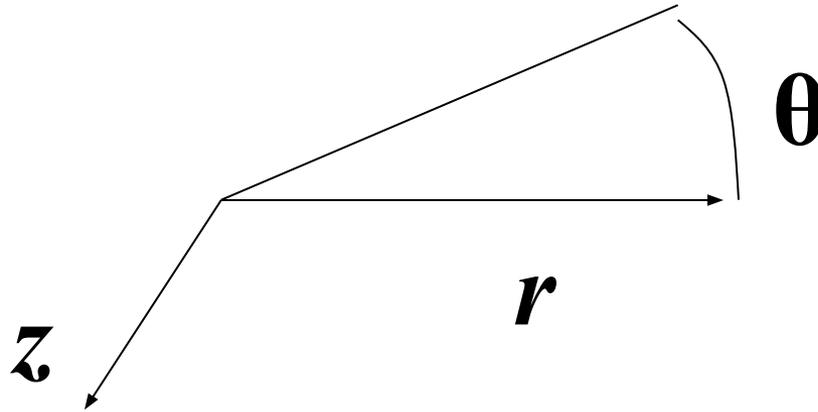
то число входящих трубок тока равно числу выходящих трубок тока.

ВЫВОД

Внутри любой замкнутой поверхности линии тока несжимаемой жидкости не могут ни начинаться, ни заканчиваться.

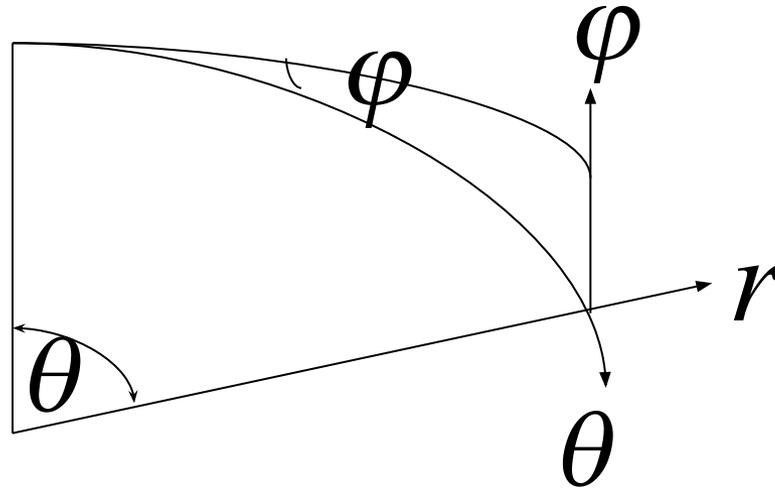
Уравнение неразрывности в цилиндрических и сферических координатах

Цилиндрические координаты



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

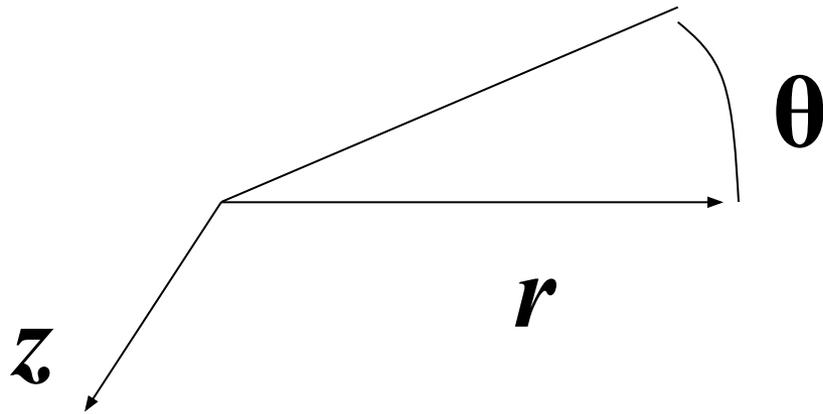
Сферические координаты



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\rho u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial \varphi} \right) = 0$$

Задача 1

Каждая частичка жидкости описывает окружность, перпендикулярную к постоянной оси и с центром на ней. Получить уравнение неразрывности.



Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial \theta} = 0, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\theta = \omega r$$

где ω - угловая скорость 

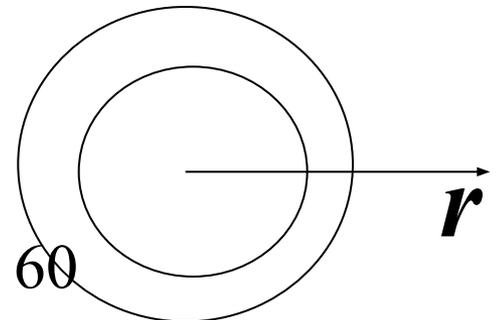
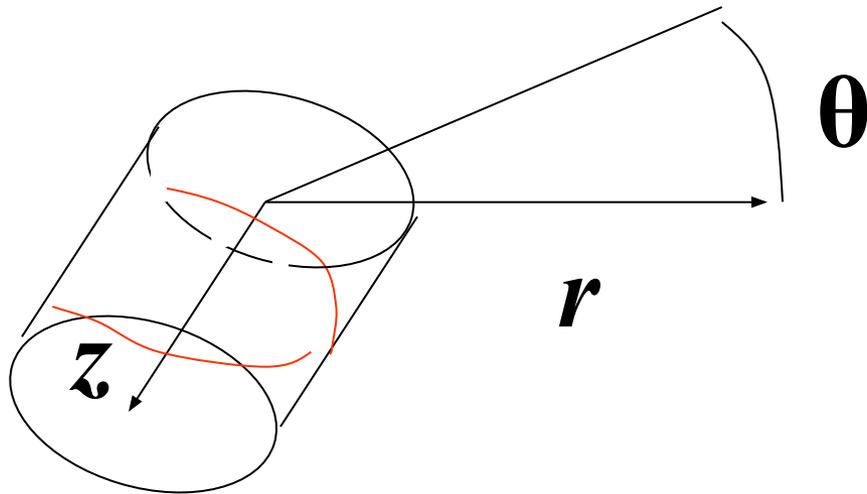
Задача 2

**Траектории частиц расположены на
поверхностях коаксиальных цилиндров.
Найти уравнение неразрывности.**

Ответ к задаче 2

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

$$u_r = 0$$



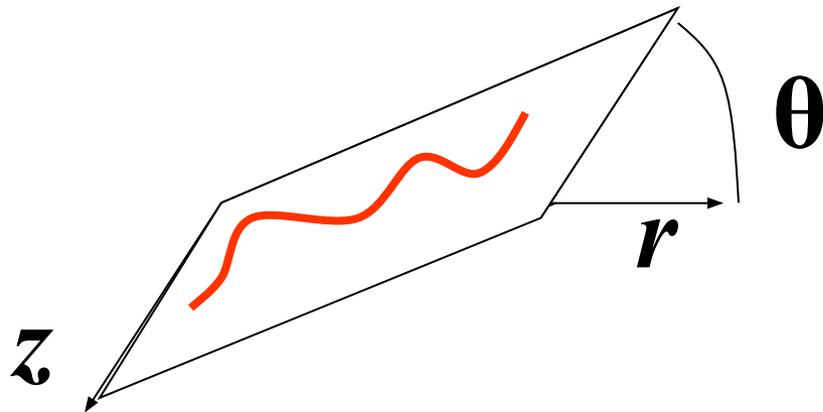
Задача 3

**Каждая частичка жидкости движется
в плоскости, проходящей через ось z .**

Ответ к задаче 3

$$u_{\theta} = 0$$

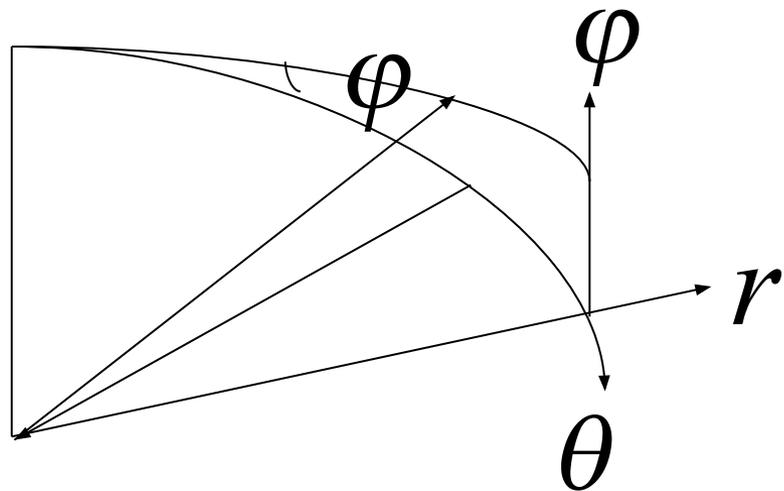
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$



Задача 4

Частицы жидкости движутся в пространстве симметрично по отношению к неподвижному центру так, что скорость каждой частицы направлена либо от центра, либо к центру и зависит только от расстояния r от центра

Ответ к задаче 4



$$u_{\theta} = 0$$

$$u_{\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial u_r r^2}{\partial r} = 0$$