# Основи логічного програмування

2010

# Скулемівська нормальна форма. Безкванторна форма

1. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)(\exists w)M(x,y,z,u,v,w)$

**Скулемівська нормальна форма:**

$$(\forall x)(\forall z)(\forall u)M(x,f(x),z,u,g(x,z,u),h(x,z,u))$$

**Безкванторна форма:**

$$M(x,f(x),z,u,g(x,z,u),h(x,z,u))$$

2. $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)N(x,y,z,u,v)$

**Безкванторна форма:** $N(a,y,f(y),u,g(y,u))$

3. $(\exists x)(\forall y)P(y,x,y)$

**Безкванторна форма:** $P(y,e,y)$

(при інтерпретації I

$$P_I(y,z,u)=true \Leftrightarrow y\bullet z=u$$

маємо умову існування правої одиниці: “e – права одиниця”)

# Кон’юнктивна нормальна форма. Множина диз’юнктів (1/2)

1. **Кон’юнктивна нормальна форма (матриці або безкванторної частини):**
   $(\neg P(x) \vee Q(x,f(x)))\ \&\ P(g(a))\ \&\ \neg Q(y,z)$
   **Множина диз’юнктів:**
   $\{\neg P(x) \vee Q(x,f(x)),$
   $P(g(a)),$
   $\neg Q(y,z)\}$

2. $P(x,y,u)\ \&\ P(y,z,v) \& P(x,v,w) \supset P(u,z,w)$
   (при інтерпретації I:
   $P_I(y,z,u)=true \Leftrightarrow y \bullet z=u$
   маємо умову асоціативності).
   **Множина диз'юнктів:**
   $\{\neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(x,v,w) \vee P(u,z,w)\}$

# Кон'юнктивна нормальна форма. Множина диз'юнктів (2/2)

3. $P(x,y)\ \&\ P(y,z) \supset Q(x,z)$

(при інтерпретації I:

$P_I(x,y)=true \Leftrightarrow$ "x є батьком y";

$Q_I(x,y)=true \Leftrightarrow$ "x є дідом y"

маємо умову, що пов'язує відношення батьківства і дідівства).

**Множина диз'юнктів:**

$\{\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee Q(x,z)\}$

# Метод резолюцій для логіки висловлювань (1/4)

- **Правило резолюції:**

$$\frac{\Delta_1 \vee C,\ \Delta_2 \vee \neg C}{\Delta_1 \vee \Delta_2}$$

$\Delta_1 \vee \Delta_2$ – резольвента диз'юнктів $\Delta_1 \vee C$, $\Delta_2 \vee \neg C$.

- **Резолютивний вивід.**

Приклад.

Множина диз'юнктів:

$$\{ P \vee Q,\ P \vee \neg Q,\ \neg P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q \}$$

1) $P \vee Q$;
2) $P \vee \neg Q$;
3) $\neg P \vee Q$;
4) $\neg P \vee \neg Q$;

---------------

5) $P$ (резольвента диз'юнктів 1 та 2) ;
6) $\neg P$ (резольвента диз'юнктів 3 та 4);
7) $\square$ – порожній диз'юнкт (резольвента диз'юнктів 5 та 6).

# Метод резолюцій для логіки висловлювань (2/4)

- **Теорема про повноту.** Множина диз'юнктів $M$ є суперечливою тоді і тільки тоді, коли для множини $M$ існує резолютивний вивід порожнього диз'юнкту.

- Типова задача: Чи є $Q$ логічним наслідком $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ?
  $P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_k \supset Q$ - true ?
  $\neg(P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_k \supset Q)$ - false ? (Суперечливість!)
  Перетворимо $\neg(P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_k \supset Q)$:
  $\neg(\neg(P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_k) \vee Q)$;
  $P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_k \& (\neg Q)$.
  Отже, диз'юнкти можуть визначатись безпосередньо з формул $P_1$, $P_2, \ldots, P_k$ та $\neg Q$.

# Метод резолюцій для логіки висловлювань (3/4)

- **Теорема про повноту.** Множина диз'юнктів $M$ є суперечливою тоді і тільки тоді, коли для множини $M$ існує резолютивний вивід порожнього диз'юнкту.

- Типова задача: Чи є $Q$ логічним наслідком $P_1, P_2, \dots, P_k$ ?

Диз'юнкти можуть визначатись безпосередньо з формул $P_1, P_2, \dots, P_k$ та $\neg Q$.

# Метод резолюцій для логіки висловлювань (4/4)

**Приклад**. Чи є $P \supset R$ логічним наслідком $P \supset Q$ та $Q \supset R$? (Транзитивність імплікації)

1) $\neg P \vee Q$ (диз'юнкт для $P \supset Q$);
2) $\neg Q \vee R$ (диз'юнкт для $Q \supset R$);
3-4) $P$, $\neg R$ (два диз'юнкти для $\neg(P \supset R)$);

---------------

5) $Q$ (резольвента диз'юнктів 1 та 3) ;
6) $\neg Q$ (резольвента диз'юнктів 2 та 4);
7) $\square$ порожній диз'юнкт (резольвента диз'юнктів 5 та 6).

# Протиріччя у випадках логіки висловлювань і логіки предикатів

1) **P v Q;**
2) **P v ¬Q;**
3) **¬P v Q;**
4) **¬P v ¬Q;**

**Дві формули, що відрізняються лише знаком**

**---------------**

5) **P** (резольвента диз'юнктів 1 та 2) ;
6) **¬P** (резольвента диз'юнктів 3 та 4);
7) ⊟ порожній диз'юнкт (резольвента диз'юнктів 5 та 6).

- Протиріччя у випадку логіки предикатів може бути не таке наочне:

  **P(x), ¬P(f(a)).**

  - Застосування підстановок, у даному випадку замість **x** можна підставити **f(a).**
  - Процедура (алгоритм) уніфікації. Підстановки замість змінних.

# Процедура (алгоритм) уніфікації. Приклад 1

P(x,f(x),a), P(g(z),y,u)

1. x←g(z);

   P(g(z),f(g(z)),a), P(g(z),y,u).

2. y←f(g(z));

   P(g(z),f(g(z)),a), P(g(z),f(g(z)),u).

3. u←a;

   P(g(z),f(g(z)),a), P(g(z),f(g(z)),a).

$\sigma$ = {x←g(z)}•{y←f(g(z))}•{u←a} — найбільш загальний уніфікатор (НЗУ)

---------------------------------------------

$\sigma_1$ = {x←g(a)}•{y←f(g(a))}•{u←a} — інший уніфікатор (але не НЗУ)

$\sigma_1 = \sigma$•{z←a}

# Процедура (алгоритм) уніфікації. Приклад 2

У прикладі 1
було P(g(z),y,u)

**P(x,f(x),a), P(g(z),b,u)**

1. **x←g(z);**

   **P(g(z),f(g(z)),a), P(g(z),b,u).**
2. Можна зробити висновок про неможливість уніфікації.

# Правило бінарної резолюції

- **Правило (бінарної) резолюції:**

$$\frac{F_1 = \Delta_1 \vee C_1,\ F_2 = \Delta_2 \vee \neg C_2 \quad (C_1,\ C_2 \text{ — уніфіковані з НЗУ } \sigma)}{\sigma(\Delta_1 \vee \Delta_2)}$$

$\sigma(\Delta_1 \vee \Delta_2)$ — (бінарна) резольвента диз'юнктів $F_1 = \Delta_1 \vee C_1$, та $F_2 = \Delta_2 \vee \neg C_2$.

- **Резолютивний вивід.**

Приклад.

Множина диз'юнктів:

$\{P(x),\ \neg P(f(a))\}$

1) $P(x)$;
2) $\neg P(f(a))$;

---------------

3) $\square$ бінарна резольвента диз'юнктів 1 та 2 з НЗУ $\sigma = (x \leftarrow f(a))$.

# Правило бінарної резолюції. Приклад 1 (1/3)

Приклад 1.

1. $P(x,y)\ \&\ P(y,z) \supset Q(x,z)$

(при інтерпретації I:

$P_I(x,y)=true \Leftrightarrow$ "x є батьком y";

$Q_I(x,y)=true \Leftrightarrow$ "x є дідом y"

маємо умову, що пов'язує відношення батьківства і дідівства).

**Множина диз'юнктів:**

$\{\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee Q(x,z)\}$

2. $(\forall v)(\exists y)\ P(y,v)$ – "у кожного є батько".

**Множина диз'юнктів:**

$\{P(f(v),v)\}$ ( $f(v)$ – батько $v$)

---

Спробуємо довести, що "кожен має діда" – $(\forall y)(\exists u)\ Q(u,y)$.

Для $\neg(\forall y)(\exists u)\ Q(u,y)$ множина диз'юнктів:

$\{\neg Q(u,a)\}$

# Приклад 1. Продовження

1) ¬ P(x,y) v ¬ P(y,z) v Q(x,z);

2) P(f(v),v) ;

3) ¬Q(u,a);

--------------------

4) ¬ P(y,z) v Q(f(y),z) (бінарна резольвента диз'юнктів 1 та 2 при σ= (x←f(v))•(v←y);

5) Q(f(f(z)),z) (бінарна резольвента диз'юнктів 4 та 2 при $\sigma_1$= (y←f(v))•(v←z);

6) $\boxed{}$ бінарна резольвента диз'юнктів 3 та 5 при можна отримати відповідь на питання, хто ж є дідом a

$\sigma_2$= (u←f(f(z))•(z←a).

Q(u,a)=true ⇔ "u є дідом a"

**Аналізуючи** $\sigma_2$, можна по суті отримати відповідь на поставлене питання, хто ж є дідом a:

u←f(f(a))

# Приклад 1. ANS-предикат

**Q(u,a) ⊃ ANS(u);** “Хто ж є дідом **a**?”

**¬Q(u,a) v ANS(u);**

1) **¬ P(x,y) v ¬ P(y,z) v Q(x,z);**
2) **P(f(v),v) ;**
3) **¬Q(u,a) v ANS(u);**

   **--------------------**

4) **¬ P(y,z) v Q(f(y),z) (бінарна резольвента** диз'юнктів 1 та 2 при $\sigma = (\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{f(v)}) \bullet (\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{y})$;
5) **Q(f(f(z)),z) (бінарна резольвента** диз'юнктів 4 та 2 при $\sigma_1 = (\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{f(v)}) \bullet (\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{z})$;
6) **ANS(f(f(a)))** – бінарна резольвента диз'юнктів 3 та 5 при $\sigma_1 = (\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{f(f(z)}) \bullet (\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{a})$.

Відповідь на поставлене запитання – “Хто ж є дідом а?”

# Правило бінарної резолюції. Приклад 2

$(\forall x1)(\forall y1)(\exists y)\ P(y,x1,y1)$ – “існування лівого розв'язку”

Приклад 2.

1) $\neg P(\boxed{x,y,u)\ v\ \neg}\ P(y,z,v)\ v\ \neg P(x,v,w)\ v\ P(u,z,w)$;

2) $P(g(x1,y1),x1,y1)$; “існування лівого розв'язку”

3) $P(x2,h(x2,y2),y2)$; “існування правого розв'язку”

4) $\neg P(k(e),e,k(e))$; заперечення “існування правої одиниці”

--------------------

$\neg(\exists e)(\forall x)\ P(x,e,x)$

$(\forall e)(\exists x)\neg P(x,e,x)$

5) $\neg P(y,z,v)\ v\ \neg P(\boxed{g(y,u),v,w)\ v\ P}(u,z,w)$;

(з 1, 2 при $x \leftarrow g(x1,y1), x1 \leftarrow y,\ y1 \leftarrow u$ )

6) $\neg P(\boxed{y,z,y)\ v\ P}(u,z,u)$;

(з 5, 2 при $x1 \leftarrow y,\ y1 \leftarrow u\ v \leftarrow y,\ w \leftarrow u$);

7) $P(u,\ h(y,y),u)$;

(з 6, 3 при $x2 \leftarrow y,\ z \leftarrow h(y,y2),\ y2 \leftarrow y$);

8) $\square$ (з 7, 4 при $u \leftarrow k(e),\ e \leftarrow h(y,y)$)

# Приклад 2. Продовження

1) $\neg P(\boxed{x,y,u)\ v\ \neg}\ P(y,z,v)\ v\ \neg P(x,v,w)\ v\ P(u,z,w);$

2) $P(g(x1,y1),x1,y1);$

3) $P(x2,h(x2,y2),y2);$

4) $\neg P(k(e),e,k(e))\ v\ ANS\boxed{(e);}$

-------------------------------

5) $\neg\ P(y,z,v)\ v\ \neg P(\boxed{g(y,u),v,w)\ v\ P}(u,z,w);$

(з 1, 2 при $x \leftarrow g(x1,y1), x1 \leftarrow y,\ y1 \leftarrow u$ )

6) $\neg\ P\boxed{(y,z,y)\ v\ P}(u,z,u);$

(з 5, 2 при $x1 \leftarrow y,\ y1 \leftarrow u\ \ v \leftarrow y,\ w \leftarrow u$);

7) $P(u,h(y,y),u);$

(з 6, 3 при $x2 \leftarrow y,\ z \leftarrow h(y,y2),\ y2 \leftarrow y$);

8) $ANS(h(y,y));$ (з 7, 4 при $u \leftarrow k(e),\ e \leftarrow h(y,y)$).

Правою одиницею є значення $e=h(y,y)$, тобто розв’язок X рівняння yX=y для довільного y.

# Метод резолюцій для логіки предикатів

- **Склеювання.** Якщо два або більше доданків диз'юнкта *C* мають НЗУ σ , то σ*C* називають ***склеюванням*** диз'юнкта *C*.
  - Приклад на склеювання: **`P(x,y) v P(f(z),f(b)) v Q(x)`** результат склеювання **`P(f(z),f(b)) v Q(f(z))`**

- **Резольвента (правило резолюції).** Резольвентою диз'юнктів $C_1$ та $C_2$ є одна з наступних бінарних резольвент:

1) бінарна резольвента $C_1$ і $C_2$ ;
2) бінарна резольвента $C_1$ і склеювання $C_2$ ;
3) бінарна резольвента склеювання $C_1$ і $C_2$ ;
4) бінарна резольвента склеювання $C_1$ і склеювання $C_2$.

- **Резолютивний вивід.**
- **Теорема про повноту.** Множина диз'юнктів ***M*** є суперечливою тоді і тільки тоді, коли для множини ***M*** існує резолютивний вивід порожнього диз'юнкту.