

Основи логічного програмування

2010

Скулемівська нормальна форма. Безкванторна форма

1. $(\forall x) (\exists y) (\forall z) (\forall u) (\exists v) (\exists w) M(x, y, z, u, v, w)$

Скулемівська нормальна форма:

$$(\forall x) (\forall z) (\forall u) M(x, f(x), z, u, g(x, z, u), h(x, z, u))$$

Безкванторна форма:

$$M(x, f(x), z, u, g(x, z, u), h(x, z, u))$$

2. $(\exists x) (\forall y) (\exists z) (\forall u) (\exists v) N(x, y, z, u, v)$

Безкванторна форма: $N(a, y, f(y), u, g(y, u))$

3. $(\exists x) (\forall y) P(y, x, y)$

Безкванторна форма: $P(y, e, y)$

(при інтерпретації I

$$P_I(y, z, u) = \text{true} \Leftrightarrow y \cdot z = u$$

маємо умову існування правої одиниці: "e – права одиниця")

Кон'юнктивна нормальна форма. Множина диз'юнктивів (1/2)

1. Кон'юнктивна нормальна форма (матриці або безкванторної частини):

$$(\neg P(x) \vee Q(x, f(x))) \& P(g(a)) \& \neg Q(y, z)$$

Множина диз'юнктивів:

$$\{ \neg P(x) \vee Q(x, f(x)), \\ P(g(a)), \\ \neg Q(y, z) \}$$

2. $P(x, y, u) \& P(y, z, v) \& P(x, v, w) \supset P(u, z, w)$

(при інтерпретації I:

$$P_I(y, z, u) = \text{true} \Leftrightarrow y \cdot z = u$$

маємо умову асоціативності).

Множина диз'юнктивів:

$$\{ \neg P(x, y, u) \vee \neg P(y, z, v) \vee \neg P(x, v, w) \vee P(u, z, w) \}$$

Кон'юнктивна нормальна форма. Множина диз'юнктивів (2/2)

$$3. P(x, y) \ \& \ P(y, z) \ \supset \ Q(x, z)$$

(при інтерпретації I:

$$P_I(x, y) = \text{true} \Leftrightarrow \text{"x є батьком y"};$$

$$Q_I(x, y) = \text{true} \Leftrightarrow \text{"x є дідом y"}$$

маємо умову, що пов'язує відношення батьківства і дідівства).

Множина диз'юнктивів:

$$\{\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, z)\}$$

Метод резолюцій для логіки висловлювань (1/4)

- **Правило резолюції:**

$$\frac{\Delta_1 \vee C, \Delta_2 \vee \neg C}{\Delta_1 \vee \Delta_2}$$

$\Delta_1 \vee \Delta_2$ – резольвента диз'юнктивів $\Delta_1 \vee C, \Delta_2 \vee \neg C$.

- **Резолютивний вивід.**

Приклад.

Множина диз'юнктивів:

$$\{ P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee Q, \neg P \vee \neg Q \}$$

1) $P \vee Q$;

2) $P \vee \neg Q$;

3) $\neg P \vee Q$;

4) $\neg P \vee \neg Q$;

5) P (резольвента диз'юнктивів 1 та 2) ;

6) $\neg P$ (резольвента диз'юнктивів 3 та 4);

7) $\neg \square$ спорожній диз'юнкт (резольвента диз'юнктивів 5 та 6).

Метод резолюцій для логіки висловлювань (2/4)

- **Теорема про повноту.** Множина диз'юнктивів M є суперечливою тоді і тільки тоді, коли для множини M існує резолютивний вивід порожнього диз'юнкту.
- Типова задача: Чи є Q логічним наслідком P_1, P_2, \dots, P_k ?
 $P_1 \& P_2 \& \dots \& P_k \supset Q$ - true ?
 $\neg(P_1 \& P_2 \& \dots \& P_k \supset Q)$ - false ? (Суперечливість!)
Перетворимо $\neg(P_1 \& P_2 \& \dots \& P_k \supset Q)$:
 $\neg(\neg(P_1 \& P_2 \& \dots \& P_k) \vee Q)$;
 $P_1 \& P_2 \& \dots \& P_k \& (\neg Q)$.
Отже, диз'юнкти можуть визначатись безпосередньо з формул P_1, P_2, \dots, P_k та $\neg Q$.

Метод резолюцій для логіки висловлювань (3/4)

- **Теорема про повноту.** Множина диз'юнктивів M є суперечливою тоді і тільки тоді, коли для множини M існує резолютивний вивід порожнього диз'юнкту.
- Типова задача: Чи є Q логічним наслідком P_1, P_2, \dots, P_k ?

Диз'юнкти можуть визначатись безпосередньо з формул P_1, P_2, \dots, P_k та $\neg Q$.

Метод резолюцій для логіки висловлювань (4/4)

Приклад. Чи є $P \supset R$ логічним наслідком $P \supset Q$ та $Q \supset R$?

(Транзитивність імплікації)

1) $\neg P \vee Q$ (диз'юнкт для $P \supset Q$);

2) $\neg Q \vee R$ (диз'юнкт для $Q \supset R$);

3-4) $P, \neg R$ (два диз'юнкти для $\neg(P \supset R)$);

5) Q (резольвента диз'юнктів 1 та 3);

6) $\neg Q$ (резольвента диз'юнктів 2 та 4);

7) \square порожній диз'юнкт (резольвента диз'юнктів 5 та 6).

Протиріччя у випадках логіки висловлювань і логіки предикатів

- 1) $P \vee Q$;
- 2) $P \vee \neg Q$;
- 3) $\neg P \vee Q$;
- 4) $\neg P \vee \neg Q$;

Дві формули, що відрізняються лише знаком

-
- 5) P (резольвента диз'юнктивів 1 та 2) ;
 - 6) $\neg P$ (резольвента диз'юнктивів 3 та 4);
 - 7) \exists порожній диз'юнкт (резольвента диз'юнктивів 5 та 6).

- Протиріччя у випадку логіки предикатів може бути не таке наочне:

$P(x), \neg P(f(a))$.

- Застосування підстановок, у даному випадку замість x можна підставити $f(a)$.
- Процедура (алгоритм) уніфікації. Підстановки замість змінних.

Процедура (алгоритм) уніфікації. Приклад 1

$$P(x, f(x), a), P(g(z), y, u)$$

$$1. x \leftarrow g(z);$$

$$P(g(z), f(g(z)), a), P(g(z), y, u).$$

$$2. y \leftarrow f(g(z));$$

$$P(g(z), f(g(z)), a), P(g(z), f(g(z)), u).$$

$$3. u \leftarrow a;$$

$$P(g(z), f(g(z)), a), P(g(z), f(g(z)), a).$$

$\sigma = \{x \leftarrow g(z)\} \cdot \{y \leftarrow f(g(z))\} \cdot \{u \leftarrow a\}$ – найбільш загальний уніфікатор (НЗУ)

$\sigma_1 = \{x \leftarrow g(a)\} \cdot \{y \leftarrow f(g(a))\} \cdot \{u \leftarrow a\}$ – інший уніфікатор (але не НЗУ)

$$\sigma_1 = \sigma \cdot \{z \leftarrow a\}$$

Процедура (алгоритм) уніфікації. Приклад 2

$P(x, f(x), a), P(g(z), b, u)$

У прикладі 1
було $P(g(z), y, u)$

1. $x \leftarrow g(z);$

$P(g(z), f(g(z)), a), P(g(z), b, u).$

2. Можна зробити висновок про неможливість уніфікації.

Правило бінарної резолюції

- **Правило (бінарної) резолюції:**

$$\frac{F_1 = \Delta_1 \vee C_1, \quad F_2 = \Delta_2 \vee \neg C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ — уніфіковані з НЗУ } \sigma)}{\sigma(\Delta_1 \vee \Delta_2)}$$

$\sigma(\Delta_1 \vee \Delta_2)$ — (бінарна) резольвента диз'юнктив

$$F_1 = \Delta_1 \vee C_1, \quad \text{та} \quad F_2 = \Delta_2 \vee \neg C_2.$$

- **Резолютивний вивід.**

Приклад.

Множина диз'юнктив:

$$\{P(x), \neg P(f(a))\}$$

1) $P(x)$;

2) $\neg P(f(a))$;

3) \square бінарна резольвента диз'юнктив 1 та 2 з НЗУ
 $\sigma = (x \leftarrow f(a)).$

Правило бінарної резолюції. Приклад 1 (1/3)

Приклад 1.

$$1. P(x, y) \ \& \ P(y, z) \ \supset \ Q(x, z)$$

(при інтерпретації I:

$$P_I(x, y) = \text{true} \Leftrightarrow \text{"x є батьком y"};$$

$$Q_I(x, y) = \text{true} \Leftrightarrow \text{"x є дідом y"}$$

маємо умову, що пов'язує відношення батьківства і дідівства).

Множина диз'юнктив:

$$\{ \neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, z) \}$$

$$2. (\forall v) (\exists y) P(y, v) \text{ -- "y кожного є батько" .}$$

Множина диз'юнктив:

$$\{ P(f(v), v) \} \quad (f(v) \text{ -- батько } v)$$

Спробуємо довести, що "кожен має діда" -- $(\forall y) (\exists u) Q(u, y)$.

Для $\neg (\forall y) (\exists u) Q(u, y)$ множина диз'юнктив:

$$\{ \neg Q(u, a) \}$$

Приклад 1. Продовження

1) $\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, z)$;

2) $P(f(v), v)$;

3) $\neg Q(u, a)$;

4) $\neg P(y, z) \vee Q(f(y), z)$ (бінарна резольвента диз'юнктивів 1 та 2 при $\sigma = (x \leftarrow f(v)) \cdot (v \leftarrow y)$);

5) $Q(f(f(z)), z)$ (бінарна резольвента диз'юнктивів 4 та 2 при $\sigma_1 = (y \leftarrow f(v)) \cdot (v \leftarrow z)$);

6) $\neg \square$ бінарна резольвента диз'юнктивів 3 та 5 при можна отримати відповідь на питання, хто ж є дідом а
 $\sigma_2 = (u \leftarrow f(f(z))) \cdot (z \leftarrow a)$.

$Q(u, a) = \text{true} \Leftrightarrow$ "u є дідом а"

Аналізуючи σ_2 , можна по суті отримати відповідь на поставлене питання, хто ж є дідом а:

$u \leftarrow f(f(a))$

Приклад 1. ANS-предикат

$Q(u, a) \supset \text{ANS}(u)$; "Хто ж є дідом а?"

$\neg Q(u, a) \vee \text{ANS}(u)$;

1) $\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, z)$;

2) $P(f(v), v)$;

3) $\neg Q(u, a) \vee \text{ANS}(u)$;

4) $\neg P(y, z) \vee Q(f(y), z)$ (бінарна резольвента диз'юнктивів 1 та 2 при $\sigma = (x \leftarrow f(v)) \cdot (v \leftarrow y)$;

5) $Q(f(f(z)), z)$ (бінарна резольвента диз'юнктивів 4 та 2 при $\sigma_1 = (y \leftarrow f(v)) \cdot (v \leftarrow z)$;

6) $\text{ANS}(f(f(a)))$ – бінарна резольвента диз'юнктивів 3 та 5 при $\sigma = (u \leftarrow f(f(z))) \cdot (z \leftarrow a)$.

Відповідь на поставлене запитання
– "Хто ж є дідом а?"

Правило бінарної резолюції. Приклад 2

Приклад 2.

$(\forall x_1) (\forall y_1) (\exists y) P(y, x_1, y_1) -$
"існування лівого розв'язку"

- 1) $\neg P(x, y, u) \vee \neg P(y, z, v) \vee \neg P(x, v, w) \vee P(u, z, w);$
- 2) $P(g(x_1, y_1), x_1, y_1);$ "існування лівого розв'язку"
- 3) $P(x_2, h(x_2, y_2), y_2);$ "існування правого розв'язку"
- 4) $\neg P(k(e), e, k(e));$ заперечення "існування правої одиниці"

5) $\neg P(y, z, v) \vee \neg P(g(y, u), v, w) \vee P(u, z, w);$

(з 1, 2 при $x \leftarrow g(x_1, y_1), x_1 \leftarrow y, y_1 \leftarrow u$)

6) $\neg P(y, z, y) \vee P(u, z, u);$

(з 5, 2 при $x_1 \leftarrow y, y_1 \leftarrow u, v \leftarrow y, w \leftarrow u$);

7) $P(u, h(y, y), u);$

(з 6, 3 при $x_2 \leftarrow y, z \leftarrow h(y, y_2), y_2 \leftarrow y$);

8) \square (з 7, 4 при $u \leftarrow k(e), e \leftarrow h(y, y)$)

$\neg (\exists e) (\forall x) P(x, e, x)$
 $(\forall e) (\exists x) \neg$
 $P(x, e, x)$

Приклад 2. Продовження

$$1) \neg P(x, y, u) \vee \neg P(y, z, v) \vee \neg P(x, v, w) \vee P(u, z, w);$$

$$2) P(g(x_1, y_1), x_1, y_1);$$

$$3) P(x_2, h(x_2, y_2), y_2);$$

$$4) \neg P(k(e), e, k(e)) \vee \text{ANS}(e);$$

$$5) \neg P(y, z, v) \vee \neg P(g(y, u), v, w) \vee P(u, z, w);$$

(з 1, 2 при $x \leftarrow g(x_1, y_1), x_1 \leftarrow y, y_1 \leftarrow u$)

$$6) \neg P(y, z, y) \vee P(u, z, u);$$

(з 5, 2 при $x_1 \leftarrow y, y_1 \leftarrow u, v \leftarrow y, w \leftarrow u$);

$$7) P(u, h(y, y), u);$$

(з 6, 3 при $x_2 \leftarrow y, z \leftarrow h(y, y_2), y_2 \leftarrow y$);

$$8) \text{ANS}(h(y, y)); \text{ (з 7, 4 при } u \leftarrow k(e), e \leftarrow h(y, y)\text{).}$$

Правою одиницею є значення $e = h(y, y)$, тобто розв'язок X рівняння $yX = y$ для довільного y .

Метод резолюцій для логіки предикатів

- **Склеювання.** Якщо два або більше доданків диз'юнкта C мають НЗУ σ , то σC називають **склеюванням** диз'юнкта C .
 - Приклад на склеювання: $P(x, y) \vee P(f(z), f(b)) \vee Q(x)$
результат склеювання $P(f(z), f(b)) \vee Q(f(z))$
- **Резольвента (правило резолюції).** Резольвентою диз'юнктів C_1 та C_2 є одна з наступних бінарних резольвент:
 - 1) бінарна резольвента C_1 і C_2 ;
 - 2) бінарна резольвента C_1 і склеювання C_2 ;
 - 3) бінарна резольвента склеювання C_1 і C_2 ;
 - 4) бінарна резольвента склеювання C_1 і склеювання C_2 .
- **Резолютивний вивід.**
- **Теорема про повноту.** Множина диз'юнктів M є суперечливою тоді і тільки тоді, коли для множини M існує резолютивний вивід порожнього диз'юнкту.