Лекция 3

Интегралы по фигуре

1. Фигура. Мера, диаметр фигуры. Ранг дробления
2. Задача о вычислении массы фигуры
3. Определение интеграла по фигуре
4. Механический смысл интеграла по фигуре
5. Геометрический смысл интеграла по фигуре
6. Свойства интегралов, выражаемых равенствами
7. Свойства интегралов, выражаемых неравенствами

1. Фигура. Мера, диаметр фигуры. Ранг дробления

Определение 1.

Под ***фигурой*** будем понимать один из следующих геометрических объектов:

I. [a,b] - отрезок

II. L - дуга кривой

III. D – часть плоскости

IV. Σ – часть поверхности

V. T – часть тела

Определение 2.

Под ***мерой фигуры*** μ_Φ будем понимать соответственно:

I. $\mu_{[a,b]} = b - a$ - длина отрезка

II. $\mu_l = l$ - длина дуги кривой

III. $\mu_D = S_D$ - площадь фигуры D

IV. $\boldsymbol{\mu_\Sigma = S_\Sigma}$ - площадь поверхности Σ

IV. $\mu_T = V_T$ - объем тела T

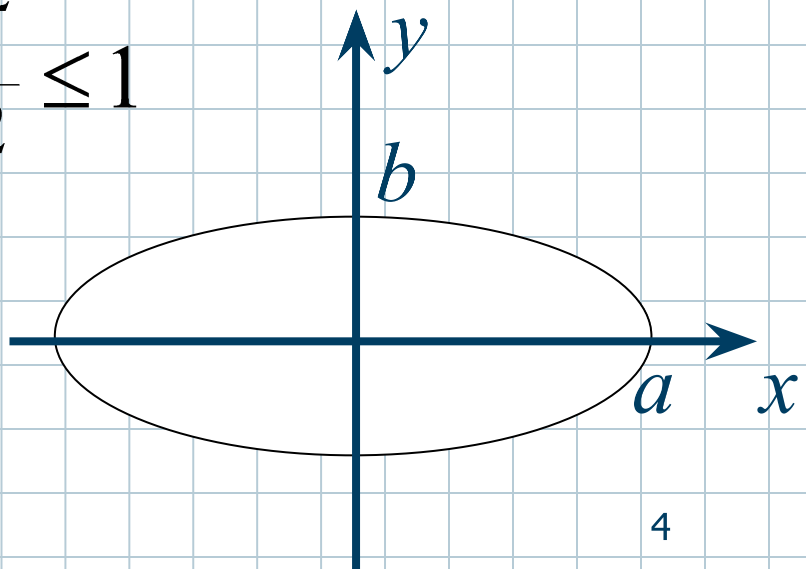
Определение 3.

Диаметром фигуры называется максимальное расстояние между двумя любыми точками фигуры

$$d_\Phi = \max \rho(P_1, P_2), \qquad P_1, P_2 \in \Phi$$

Пример 1.

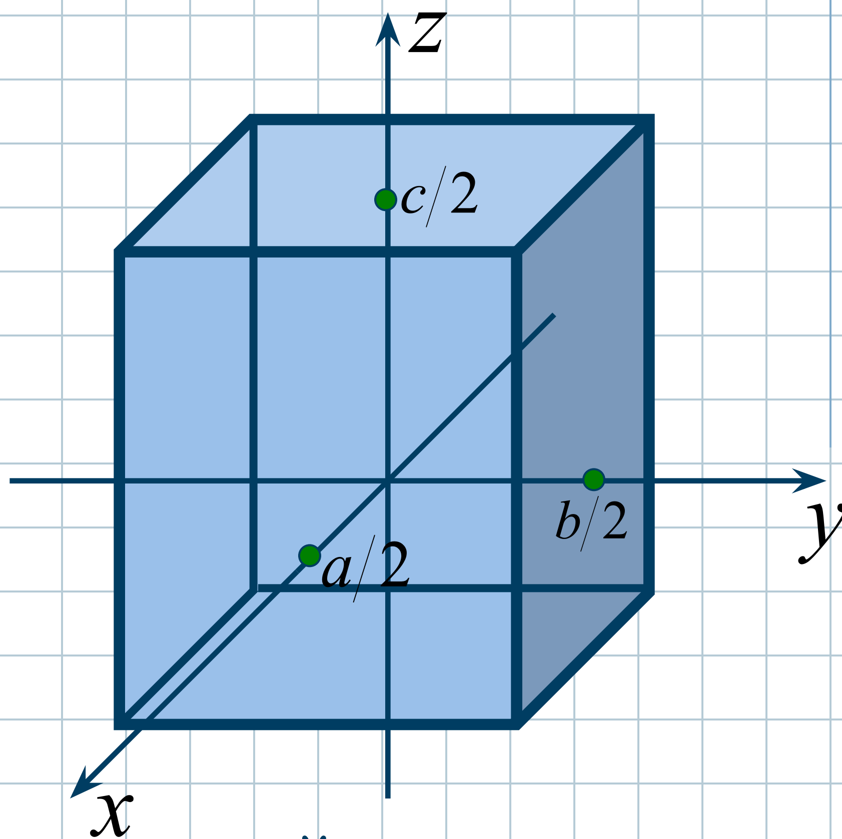
$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$



$$a > b \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d_D = 2a}$$

Пример 2.

$$T:\begin{cases} -\dfrac{a}{2}\le x\le \dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{b}{2}\le y\le \dfrac{b}{2} \\ -\dfrac{c}{2}\le z\le \dfrac{c}{2} \end{cases}$$



$$d_T - ?$$

- прямоугольный параллелепипед со сторонами a, b, c.

$$d_T=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

В дальнейшем будем часто использовать следующий прием:

- разбиение (дробление) фигуры Ф на n непересекающихся областей $Ф_1$, $Ф_2$, … $Ф_n$.

  Каждой полученной фигуре соответствует свой диаметр

$$\Phi_i \to d_i$$

Определение.

Рангом дробления λ_n называется максимальный диаметр элементарных фигур

$$\lambda_n = \max\{d_i\}$$

2. Задача о вычислении массы фигуры

Рассмотрим фигуру Ф. $P \in \Phi$

$\rho(P)$ - плотность распределения массы по фигуре.

Найти массу фигуры m_Φ .

Решение

I. Если Ф однородная фигура, то

$$\rho(P) = const$$

$$\Downarrow$$

$$m_\Phi = \rho(P) \cdot \mu_\Phi , \rho(P) = const$$

II. Если Ф - неоднородная фигура

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\rho(P) \neq const}$$

Выполним следующие действия:

1. Разобьем Ф на Ф$_1$, Ф$_2$, … Ф$_n$.

   Каждая из элементарных фигур характеризуется своей мерой

$$\Phi_i \leftrightarrow \Delta\mu_i$$

   При этом все разбиение в целом характеризуется определенным значением ранга дробления λ_n .

2. Зафиксируем по одной точке P_i на каждой фигуре Φ_i

Вычислим $\rho\left(P_i\right)$

3. Будем считать элементарные фигуры Φ_i однородными с плотностью $\rho\left(P_i\right)$

- приближение!

$$\Downarrow$$

$$m_i \approx \rho\left(P_i\right)\cdot\Delta\mu_i$$

4. Вычисление массы $m_Ф$

$$m_Ф \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\cdot\Delta\mu_i$$

- приближенный результат, точность которого повышается при увеличении n, и уменьшении λ_n

$$m_Ф = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\cdot\Delta\mu_i$$

- точный результат

3. Определение интеграла по фигуре

Рассмотрим фигуру Ф.

Функция f(Р) задана на фигуре Ф, $\boldsymbol{P \in \Phi}$

Выполним последовательность действий, аналогичную п. 2.

1. Разобьем Ф на $Ф_1$, $Ф_2$, … $Ф_n$.

$$\downarrow$$

$$\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \ldots, \Delta\mu_n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n$$

$$\boldsymbol{P_i \in \Phi_i}$$

2. $$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\mu_i}$$

- интегральная сумма для f(Р) по Ф

3. Организуем последовательность дроблений

$$n \to \infty \qquad \lambda_n \to 0$$

$$\Downarrow$$

имеем последовательность интегральных сумм

Определение.

Интегралом функции f(P) на фигуре Ф называется число

$$\int\limits_{\Phi} f(P)\,d\mu = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta\mu_i$$

при условии, что этот предел существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек P_i

Теорема *(о существовании интеграла по фигуре)*

Если

1. функция *f*(P) непрерывна по фигуре Ф

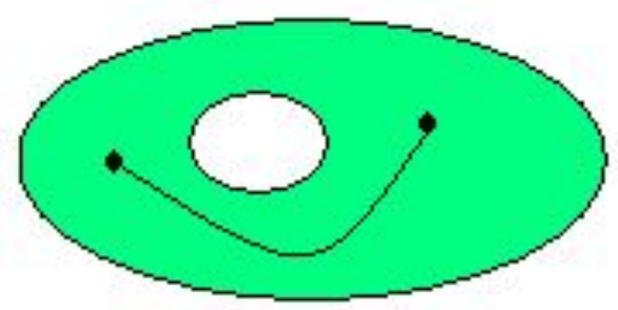
2. фигура Ф – замкнутая, ограниченная, односвязная,

то существует интеграл по фигуре

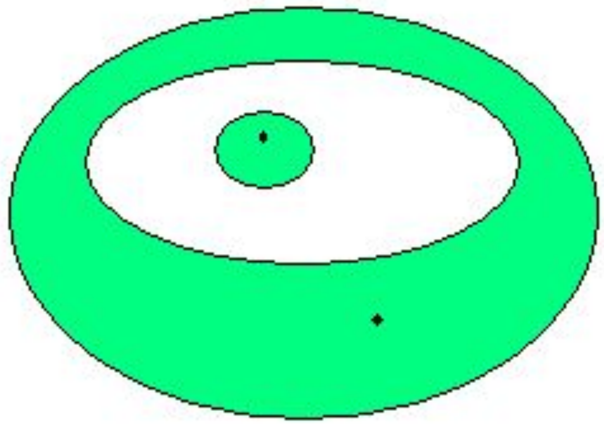
$$\int_{\Phi} f(P)\,d\mu$$

Определение.

Если любые две точки области можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этой области, то область называется ***односвязной***.



Односвязная область



Двусвязная область

Классификация интегралов по фигуре

1. $\Phi \equiv [a,b],\ \ P(x) \in [a,b],\ \ \Delta\mu_i = \Delta x_i$

$$\int_{\Phi} f(P)d\mu \Rightarrow \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

- определенный интеграл

2. Ф – дуга линии L

$$P(x,y,z) \in L,\ \Delta\mu_i = \Delta l_i$$

$$\int_{\Phi} f(P)d\mu \Rightarrow \int_{L} f(P)dl$$

- криволинейный интеграл первого рода

$3.\ \Phi \equiv D,$

$$\boldsymbol{P(x, y) \in D}, \qquad \Delta\mu_i \approx \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

$$\int\limits_{\Phi} f\left(P\right) d\mu = \iint\limits_{D} f\left(x, y\right) dx dy$$

- двойной интеграл

4. Φ – часть поверхности Σ , $P(x, y, z) \in \Sigma$

$\Delta\mu_i = \Delta\sigma_i$ - площадь элементарной поверхности

$$\iint\limits_{\Sigma} f\left(x, y, z\right) d\sigma$$

- поверхностный интеграл первого рода

$$5.\ \Phi \equiv \mathrm{T},$$

Фигура – пространственная область

$$\boldsymbol{P(x, y, z) \in T}, \qquad \Delta\mu_i \approx \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$$

$$\iiint\limits_{\mathrm{T}} f(x, y, z)\, dxdydz$$

- тройной интеграл

4. Механический смысл интегралов по фигуре

$$f(P) \geq 0$$

Так как $f(P) \geq 0$, можно считать, что f(P) – плотность распределения массы на фигуре Ф

$\Downarrow$ см.вопрос 2

$$\int\limits_{\Phi} f(P)\,d\mu = m_{\Phi}$$

5. Геометрический смысл интегралов по фигуре

$f(P) \equiv 1$ $\qquad\qquad \int\limits_{\Phi} d\mu = \mu_{\Phi}$

Из пункта 4 $\Rightarrow$ $\quad m_{\Phi} = \rho \cdot \mu_{\Phi} = 1 \cdot \mu_{\Phi}$

В частности: $\quad \int\limits_{a}^{b} dx = b - a,$

$$\int\limits_{L} dl = l_{L}, \qquad \iint\limits_{D} dxdy = S_{D},$$

$$\iint\limits_{\Sigma} d\sigma = S_{\Sigma}, \qquad \iiint\limits_{\mathrm{T}} dxdydz = V_{\mathrm{T}}$$

Полученными формулами необходимо уметь пользоваться и в прямом, и в обратном направлениях!

6. Свойства интегралов, выраженные равенствами

1. $$\int_{\Phi} cf(P)\,d\mu = c\int_{\Phi} f(P)\,d\mu$$

2. $$\int_{\Phi} \left[f_1(P) \pm f_2(P)\right] d\mu = \int_{\Phi} f_1(P)\,d\mu \pm \int_{\Phi} f_2(P)\,d\mu$$

линейность

3. $$\int_{\Phi_1+\Phi_2} f(P)\,d\mu = \int_{\Phi_1} f(P)\,d\mu + \int_{\Phi_2} f(P)\,d\mu$$

- аддитивность

Доказываются с помощью определения!

7. Свойства интегралов, выраженные неравенствами

1. Если $f(P) \geq 0$ на Φ

то

$$\int_{\Phi} f(P)\,d\mu \geq 0$$

2. Если

$$\forall P \in \Phi \qquad f_1(P) \geq f_2(P)$$

то

$$\int_{\Phi} f_1(P)\,d\mu \geq \int_{\Phi} f_2(P)\,d\mu$$

3. Если

$$\forall P \in \Phi \qquad m \le f(P) \le M$$

то

$$\boldsymbol{m\mu \le \int_{\Phi} f(P)\,d\mu \le M\mu}$$

Теорема *(о среднем)*

Если f(P) непрерывна на Ф (ограниченная, замкнутая, связная),

то $\exists c \in \Phi$

$$\int_{\Phi} f(P)\,d\mu = f(c)\cdot \mu_{\Phi}$$

f(c) – ***среднее значение*** f(P) на Ф

$$f(c) = \frac{\int_{\Phi} f(P)\,d\mu}{\mu_{\Phi}}$$