

# Лекция 3

## Интегралы по фигуре

1. **Фигура. Мера, диаметр фигуры. Ранг дробления**
2. **Задача о вычислении массы фигуры**
3. **Определение интеграла по фигуре**
4. **Механический смысл интеграла по фигуре**
5. **Геометрический смысл интеграла по фигуре**
6. **Свойства интегралов, выражаемых равенствами**
7. **Свойства интегралов, выражаемых неравенствами**

1.

# Фигура. Мера, диаметр фигуры. Ранг дробления

*Определение 1.*

Под *фигурой* будем понимать один из следующих геометрических объектов:

I.  $[a,b]$  - отрезок

II.  $L$  - дуга кривой

III.  $D$  – часть плоскости

IV.  $\Sigma$  – часть поверхности

V.  $T$  – часть тела

## Определение 2.

Под *мерой фигуры*  $\mu_F$  будем понимать соответственно:

I.  $\mu_{[a,b]} = l$  длина отрезка

II.  $\mu_l = l$  длина дуги кривой

III.  $\mu_D = S_D$  площадь фигуры  $D$

IV.  $\mu_\Sigma = S_\Sigma$  - площадь поверхности  $\Sigma$

IV.  $\mu_T = V_T$  объем тела  $T$

### Определение 3.

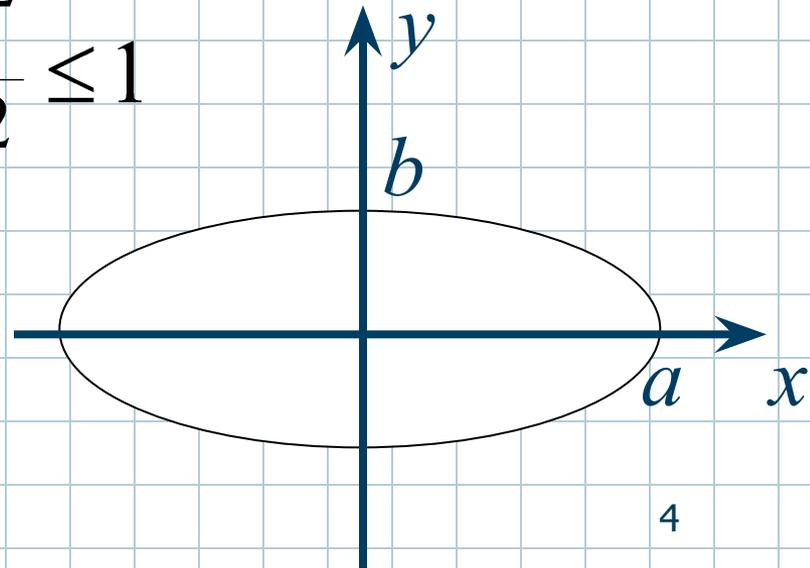
**Диаметром фигуры** называется максимальное расстояние между двумя любыми точками фигуры

$$d_{\Phi} = \max \rho(P_1, P_2), \quad P_1, P_2 \in \Phi$$

Пример 1.

$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

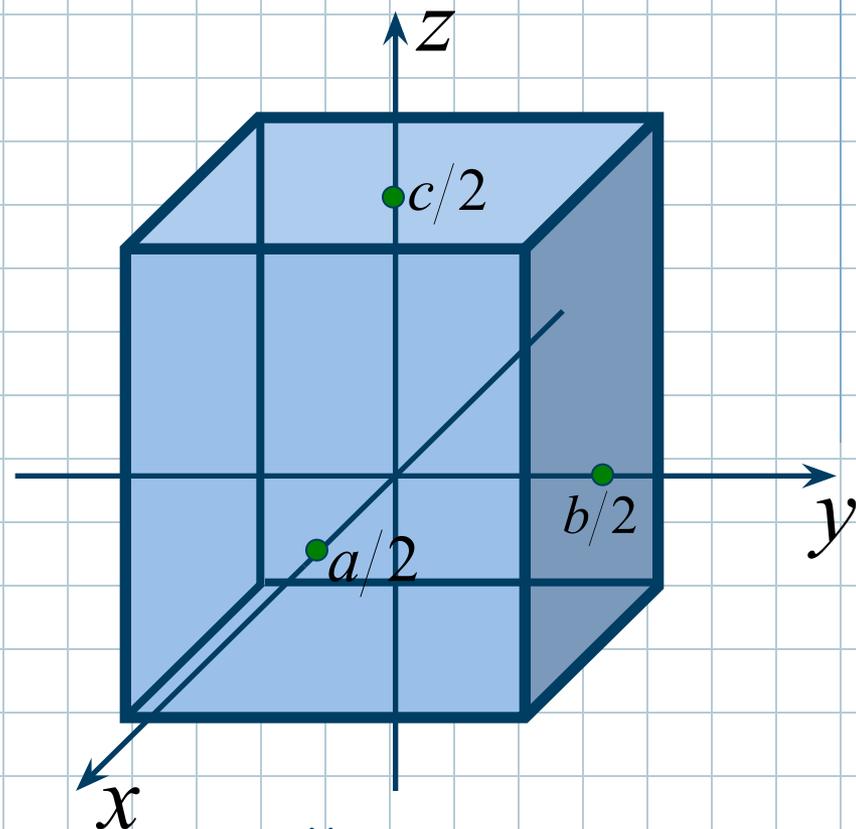
$$a > b \Rightarrow d_D = 2a$$



Пример 2.

$$T: \begin{cases} -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2} \end{cases}$$

$d_T$  — ?



- прямоугольный параллелепипед со сторонами  $a, b, c$ .

$$d_T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

В дальнейшем будем часто использовать следующий прием:

○ разбиение (дробление) фигуры  $\Phi$  на  $n$  непересекающихся областей  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ .

Каждой полученной фигуре соответствует свой диаметр

$$\Phi_i \rightarrow d_i$$

*Определение.*

*Рангом дробления  $\lambda_n$  называется максимальный диаметр элементарных фигур*

$$\lambda_n = \max\{d_i\}$$

## 2. Задача о вычислении массы фигуры

Рассмотрим фигуру  $\Phi$ .  $P \in \Phi$

$\rho(P)$  - плотность распределения массы по фигуре.

Найти массу фигуры  $m_\Phi$ .

*Решение*

I. Если  $\Phi$  однородная фигура, то

$$\rho(P) = \text{const}$$



$$m_\Phi = \rho(P) \cdot \mu_\Phi, \rho(P) = \text{const}$$

## II. Если $\Phi$ - неоднородная фигура

$$\rho(P) \neq \text{const}$$

Выполним следующие действия:

1. Разобьем  $\Phi$  на  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ .

Каждая из элементарных фигур характеризуется своей мерой

$$\Phi_i \leftrightarrow \Delta\mu_i$$

При этом все разбиение в целом характеризуется определенным значением ранга дробления  $\lambda_n$ .

2. Зафиксируем по одной точке  $P_i$  на каждой фигуре  $\Phi_i$

Вычислим  $\rho(P_i)$

3. Будем считать элементарные фигуры  $\Phi_i$  однородными с плотностью  $\rho(P_i)$

- приближение!



$$m_i \approx \rho(P_i) \cdot \Delta\mu_i$$

#### 4. Вычисление массы $m_{\Phi}$

$$m_{\Phi} \approx \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \cdot \Delta\mu_i$$

- приближенный результат, точность которого повышается при увеличении  $n$ , и уменьшении  $\lambda_n$

$$m_{\Phi} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda_n \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \cdot \Delta\mu_i$$

- точный результат

### 3. Определение интеграла по фигуре

Рассмотрим фигуру  $\Phi$ .

Функция  $f(P)$  задана на фигуре  $\Phi$ ,  $P \in \Phi$

Выполним последовательность действий, аналогичную п. 2.

1. Разобьем  $\Phi$  на  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ .

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ \Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \dots, \Delta\mu_n & & \Rightarrow \lambda_n \end{array}$$

$$P_i \in \Phi_i$$

2. 
$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\mu_i$$

- интегральная сумма для  $f(P)$  по  $\Phi$

### 3. Организуем последовательность дроблений

$$n \rightarrow \infty \quad \lambda_n \rightarrow 0$$



имеем последовательность интегральных сумм

*Определение.*

Интегралом функции  $f(P)$  на фигуре  $\Phi$  называется число

$$\int_{\Phi} f(P) d\mu = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda_n \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\mu_i$$

при условии, что этот предел существует и не зависит от способа разбиения и выбора

точек  $P_i$

## *Теорема (о существовании интеграла по фигуре)*

Если

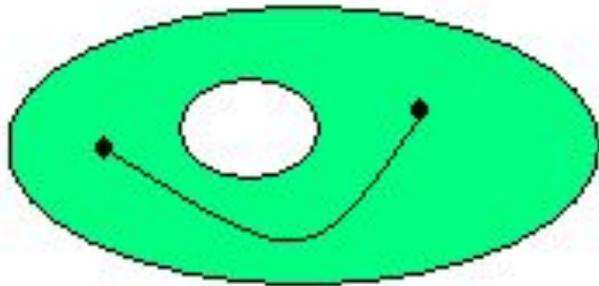
1. функция  $f(P)$  непрерывна по фигуре  $\Phi$
2. фигура  $\Phi$  – замкнутая, ограниченная, односвязная,

то существует интеграл по фигуре

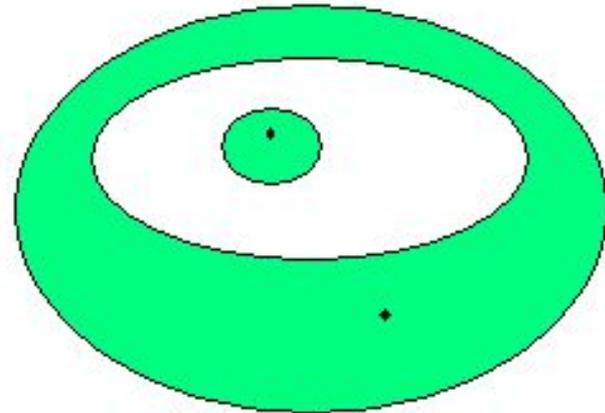
$$\int_{\Phi} f(P) d\mu$$

## Определение.

Если любые две точки области можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этой области, то область называется *односвязной*.



Односвязная  
область



Двусвязная  
область

## Классификация интегралов по фигуре

1.  $\Phi \equiv [a, b]$ ,  $P(x) \in [a, b]$ ,  $\Delta\mu_i = \Delta x_i$

$$\int_{\Phi} f(P) d\mu \Rightarrow \int_{[a, b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

- определенный интеграл

2.  $\Phi$  – дуга линии  $L$

$$P(x, y, z) \in L, \Delta\mu_i = \Delta l_i$$

$$\int_{\Phi} f(P) d\mu \Rightarrow \int_L f(P) dl$$

- криволинейный интеграл первого рода

3.  $\Phi \equiv D,$

$P(x, y) \in D, \quad \Delta\mu_i \approx \Delta x_i \cdot \Delta y_i$

$$\int_{\Phi} f(P) d\mu = \iint_D f(x, y) dx dy$$

- двойной интеграл

4.  $\Phi$  – часть поверхности  $\Sigma$ ,  $P(x, y, z) \in \Sigma$

$\Delta\mu_i = \Delta\sigma_i$  - площадь элементарной  
поверхности

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma$$

- поверхностный  
интеграл первого рода

5.  $\Phi \equiv T$ ,

Фигура – пространственная область

$$P(x, y, z) \in T, \quad \Delta\mu_i \approx \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$$

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$$

- тройной интеграл

## 4. Механический смысл интегралов по фигуре

$$f(P) \geq 0$$

Так как  $f(P) \geq 0$ , можно считать, что  $f(P)$  – плотность распределения массы на фигуре  $\Phi$

⇓ см.вопрос 2

$$\int_{\Phi} f(P) d\mu = m_{\Phi}$$

## 5. Геометрический смысл интегралов по фигуре

$$\circ f(P) \equiv 1 \quad \int_{\Phi} d\mu = \mu_{\Phi}$$

Из пункта 4  $\Rightarrow m_{\Phi} = \rho \cdot \mu_{\Phi} = 1 \cdot \mu_{\Phi}$

В частности:  $\int_a^b dx = b - a,$

$$\int_L dl = l_L,$$

$$\iint_D dx dy = S_D,$$

$$\iint_{\Sigma} d\sigma = S_{\Sigma},$$

$$\iiint_T dx dy dz = V_T$$

Полученными формулами необходимо уметь пользоваться и в прямом, и в обратном направлениях!

6.

# Свойства интегралов, выраженные равенствами

1.  $\int_{\Phi} cf(P)d\mu = c \int_{\Phi} f(P)d\mu$

2.  $\int_{\Phi} [f_1(P) \pm f_2(P)]d\mu =$   
 $= \int_{\Phi} f_1(P)d\mu \pm \int_{\Phi} f_2(P)d\mu$

линейность

3.  $\int_{\Phi_1 + \Phi_2} f(P)d\mu = \int_{\Phi_1} f(P)d\mu + \int_{\Phi_2} f(P)d\mu$

- аддитивность

Доказываются с помощью определения!

7.

# Свойства интегралов, выраженные неравенствами

1. Если  $f(P) \geq 0$

то

$$\int_{\Phi} f(P) d\mu \geq 0$$

2. Если

$$\forall P \in \Phi \quad f_1(P) \geq f_2(P)$$

то

$$\int_{\Phi} f_1(P) d\mu \geq \int_{\Phi} f_2(P) d\mu$$

3. Если

$$\forall P \in \Phi \quad m \leq f(P) \leq M$$

то

$$m\mu \leq \int_{\Phi} f(P) d\mu \leq M\mu$$

## *Теорема (о среднем)*

Если  $f(P)$  непрерывна на  $\Phi$  (ограниченная, замкнутая, связная),

то  $\exists c \in \Phi$

$$\int_{\Phi} f(P) d\mu = f(c) \cdot \mu_{\Phi}$$

$f(c)$  – *среднее значение*  $f(P)$  на  $\Phi$

$$f(c) = \frac{\int_{\Phi} f(P) d\mu}{\mu_{\Phi}}$$