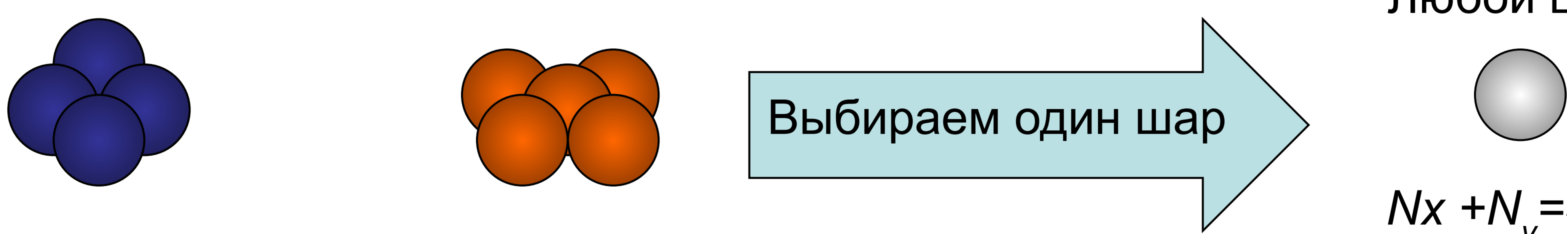
Комбинаторика

Правила и формулы

Правило суммы

- Если элемент ***x*** можно выбрать способами n_x и если элемент *y* можно выбрать n_y способами, то выбор «либо ***x***, либо ***y***» можно осуществить способами $n_x + n_y$.

Любой цвет



N_x=4

N_y=5

$Nx + N_y = 4 + 5 = 9$ *способов*

Правило суммы

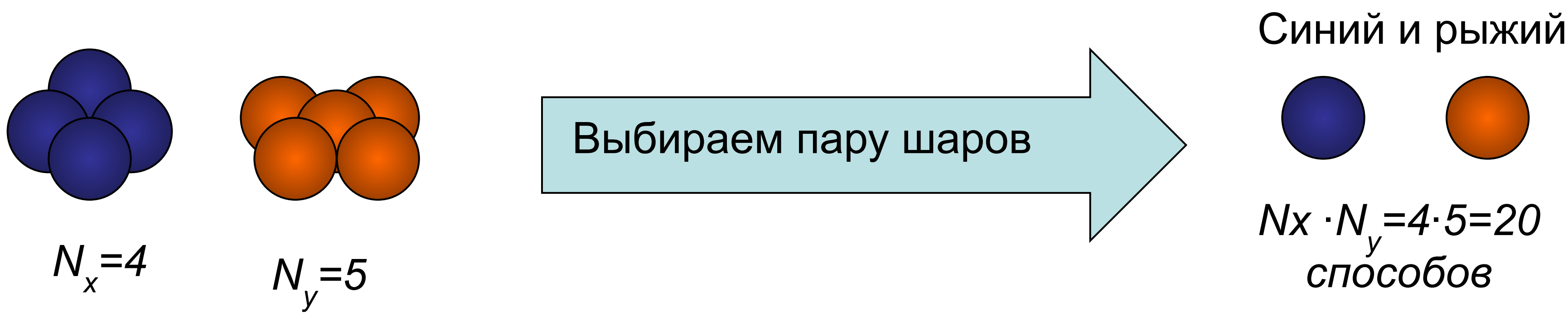
- Правило суммы используется тогда, когда варианты соединяются словом «**ИЛИ**»

Пример 1

- Сколько различных символов можно закодировать, используя код Морзе длиной не менее 5 и (**или**) не более 6 сигналов(точек и тире)?
- **Одновременно это никак не может произойти.**

Правило произведения

- Если элемент $\boldsymbol{x}$ можно выбрать $\boldsymbol{n_x}$ способами и если после его выбора элемент $\boldsymbol{y}$ можно выбрать $\boldsymbol{n_y}$ способами, то выбор упорядоченной пары $\boldsymbol{(x, y)}$ можно осуществить $\boldsymbol{n_x \cdot n_y}$ способами.



- Пример 2. Номер автомобиля состоит из шести мест, на первом – буква, затем – три цифры, за ними еще две буквы. Сколько существует автомобильных номеров ?
- Могут быть использованы любые из 33 букв русского алфавита, кроме «ь», «ъ» и «й».
- *Решение.* На первое место можно поставить любую из 30 букв. На второе, третье, четвертое – любую из 10-ти цифр. На пятое, шестое место можно поставить любую из 30-ти букв. По правилу умножения имеем:
- $30*10*10*10*30*30=27*10^6$
- Такое количество номеров автомобилей может быть выдано ГАИ в Саратовской области

Формулы комбинаторики

Перестановки

Размещения

Сочетания

Два главных вопроса

1. В задаче требуется ***переставить все элементы*** или требуется ***выбрать несколько из них? (все элементы – перестановки, выбрать несколько – сочетания*** или ***размещения).***
2. Если нужен ***выбор, то важен ли порядок? Если важен – размещения, если не важен – сочетания.***

Перестановки

Используются все элементы

Порядок элементов важен

Перестановки без повторений

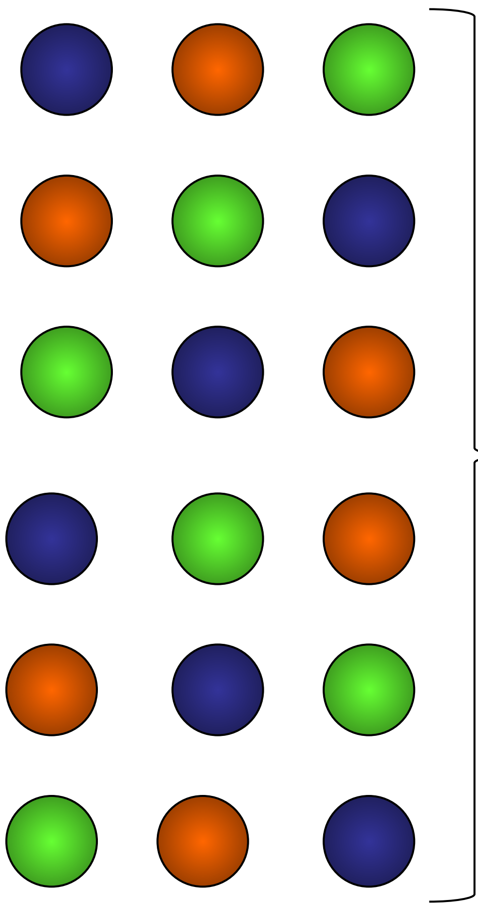
- Перестановками без повторений из ***n*** различных элементов называются все возможные последовательности этих ***n*** элементов. Число перестановок без повторений из ***n*** элементов равняется

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

по определению

$$0! = 1$$

Перестановки без повторений



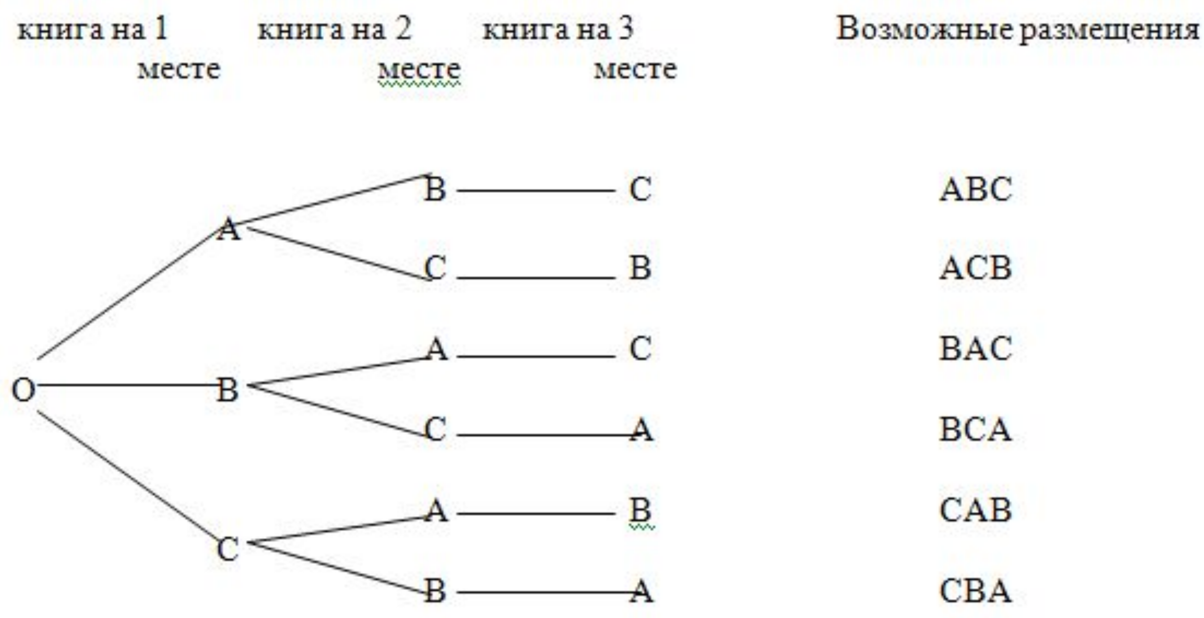
6 различных перестановок

$$n = 3$$

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Пример 4.Сколькими способами можно расставить на полке 4 книги ? (Обозначим их A, B, C,D).

- Основным различием этих размещений служит ***порядок объектов***; изменение порядка дает другое размещение.
- 4*3*2*1=24



Пример 5

- По следствию должны пройти пять человек: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.
- Сколько вариантов того, что в списке из этих пяти человек, составленном случайным образом *B* будет следовать сразу после *A*?

Решение

AB??? - таких вариантов $P_3=3!=6$

?AB??

??AB?

???AB

Всего вариантов M=6*4=24

Перестановки с повторениями

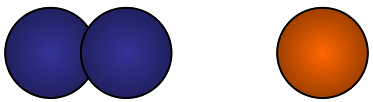
- *Перестановки с повторением* из ***n*** элементов ***k*** типов $(k \le n)$
- число элементов 1-го типа $\boldsymbol{n_1}$;
  число элементов 2-го типа $\boldsymbol{n_2}$;
  число элементов *k*-го типа $\boldsymbol{n_k}$,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

- все возможные последовательности исходных ***n*** элементов.
- Число перестановок с повторениями обозначают $\overline{P}_{n=n_1+n_2+...+n_k}$

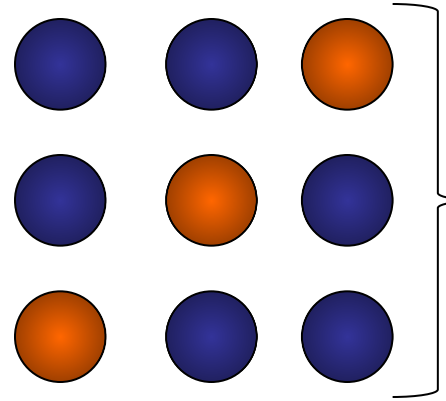
подсчитывают так: $$\overline{P}_{n=n_1+n_2+...+n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Перестановки с повторениями



$n_1=2$ $\quad$ $n_2=1$

$n=n_1+n_2=2+1=3$



3 различные перестановки

$$\overline{P}_{3=2+1}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{6}{2}=3$$

Пример 6. Сколько чисел можно создать из двух цифр «2» и двух цифр «1»?

1122

1212

1221

2211

2121

2112

4!/2!/2!=6

Пример 7.

- Существует конечное число неэквивалентных друг другу логических функций, зависящих от трех аргументов. Среди них есть функции, для каждой из которых существует только два набора значений аргументов, при которых функция становится тождественно равна значению "Истина" (для всех остальных наборов значений аргументов такая функция тождественно равна значению "Ложь"). Сколько существует таких функций? В ответе укажите целое число.

Решение

8!/(2!*6!)=23

Размещения

(выборки)

Используются не все элементы

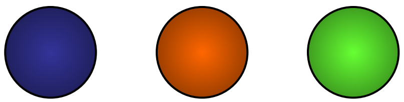
Порядок элементов важен

Размещения без повторений

- *Размещениями без повторений* из ***n*** различных элементов по ***m*** элементов называются все такие последовательности ***m*** различных элементов, выбранных из исходных ***n***, которые отличаются друг от друга или порядком следования элементов, или составом элементов.
- Число размещений без повторений из ***n*** элементов по ***m*** обозначается символом

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (m < n)$$

Размещения без повторений

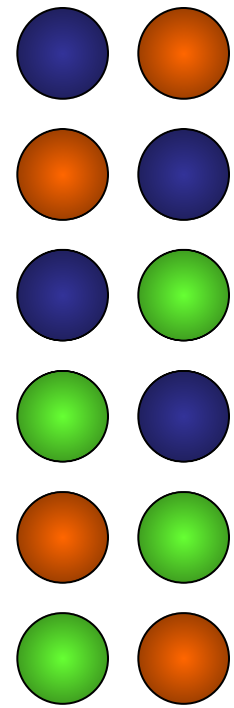


Выбираем два шара

n=3

Порядок выбора важен!

m=2



6 различных выборок

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Пример 8

- В фирме работают 8 человек одинаковой квалификации, среди них Иванов, Петров, Сидоров. Сколькими способами можно случайно выбрать трех из восьми?

Решение

- Всего вариантов - выбрать три из восьми без повторения, т.к. один и тот же не может выполнять две работы

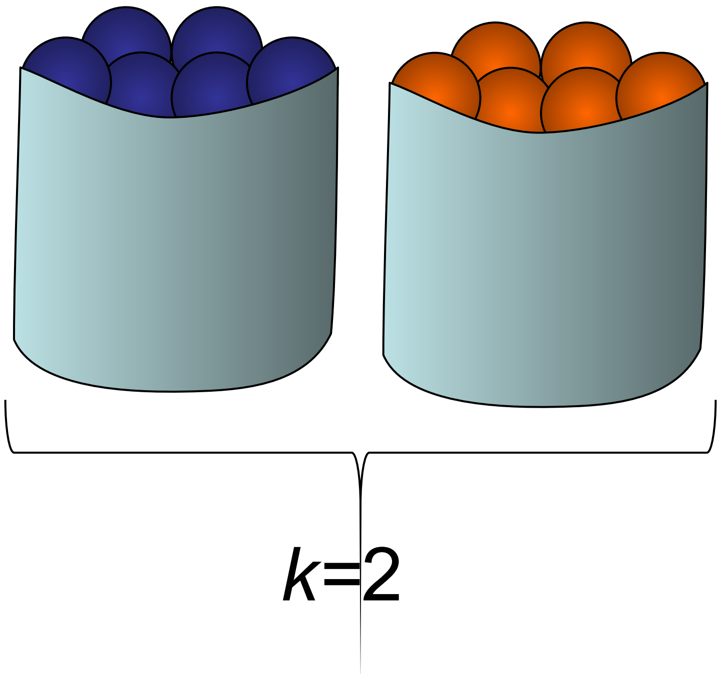
$$N = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8*7*6 = 336$$

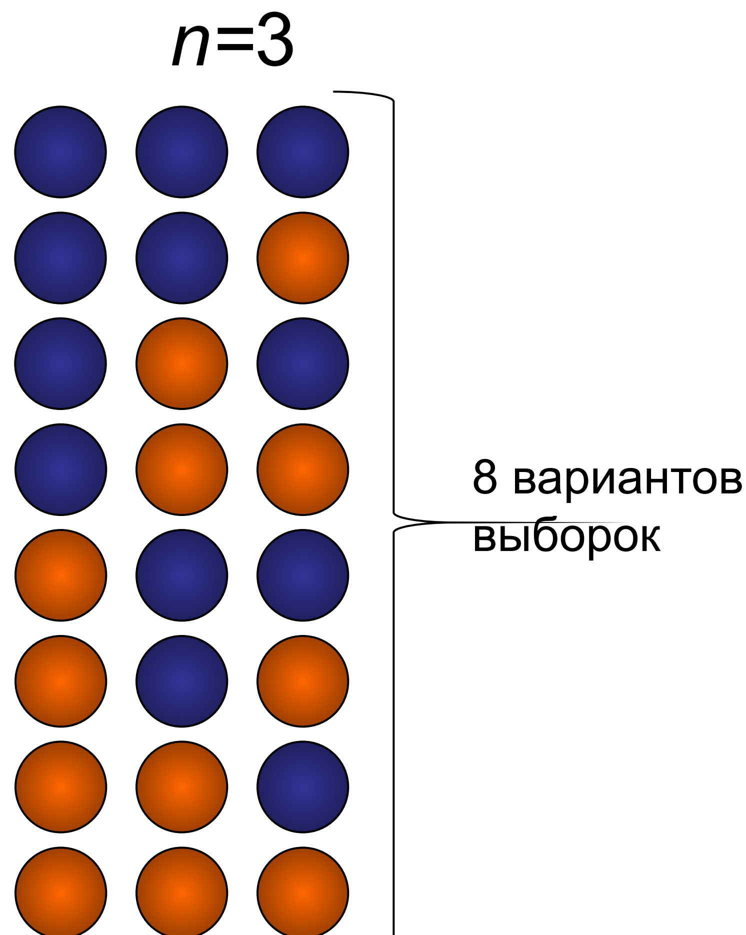
Размещения с повторениями

- *Размещения с повторениями* из элементов ***k*** типов по ***m*** элементов (***k*** и ***m*** могут быть в любых соотношениях) называются все такие последовательности ***m*** элементов, принадлежащих исходным типам, которые отличаются друг от друга или порядком следования элементов, или составом элементов.

$$\overline{A_k^m} = k^m$$

Размещения с повторениями





$$\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$$

Пример 9

- Замок камеры хранения имеет четыре диска, каждый из которых разделен на 10 секторов; на секторах каждого из дисков написаны цифры 0, 1, …, 9.
- Какова вероятность открыть закрытую камеру для человека:

1. забывшего все, что он набрал на дисках, закрывая камеру;
2. помнящего только цифру, набранную на первом диске;
3. помнящего только, что ни на втором, ни на третьем, ни на четвертом, диске не набирал цифру 6?

Решение

1) Всего вариантов $N = \overline{A_{10}^{4}} = K^{m} = 10^{4}$

2) Всего вариантов $N = \overline{A_{10}^{3}} = K^{m} = 10^{3}$

3) Всего вариантов N=10*9*9*9

Сочетания

Используются не все элементы

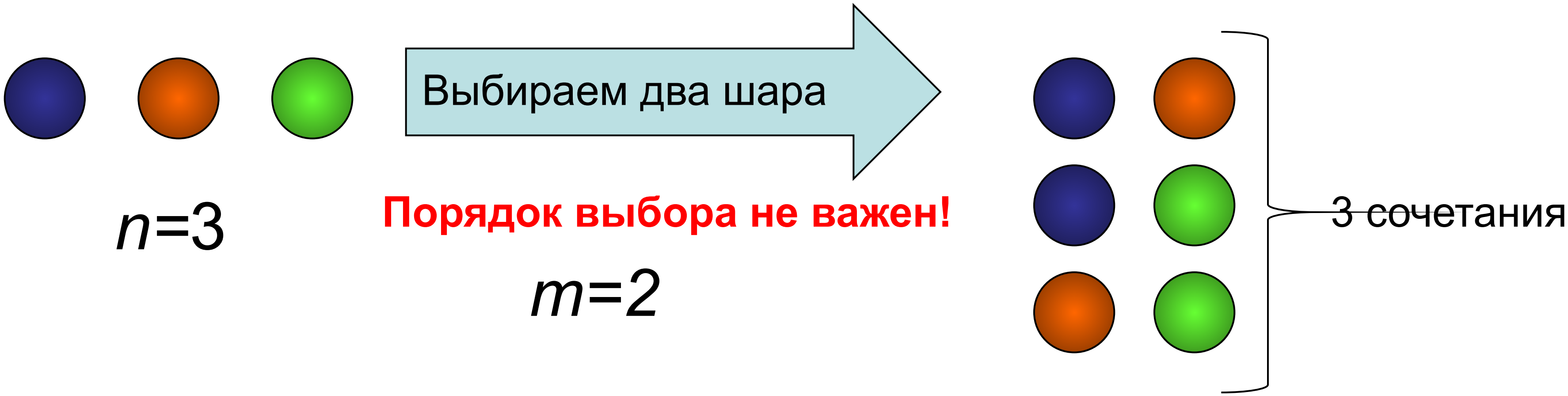
Порядок элементов не важен

Сочетания без повторений

- *Сочетаниями без повторений* из ***n*** различных элементов по ***m*** элементов называются все такие последовательности ***m*** различных элементов, выбранных из исходных ***n***, которые отличаются друг от друга составом элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (m < n)$$

Сочетания без повторений



$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

Пример 10

- В чемпионате по шахматам участвовало 40 спортсменов. Каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

Решение

$$C_{40}^{2} = \frac{40!}{2!*38!} = \frac{39*40}{2} = 780$$

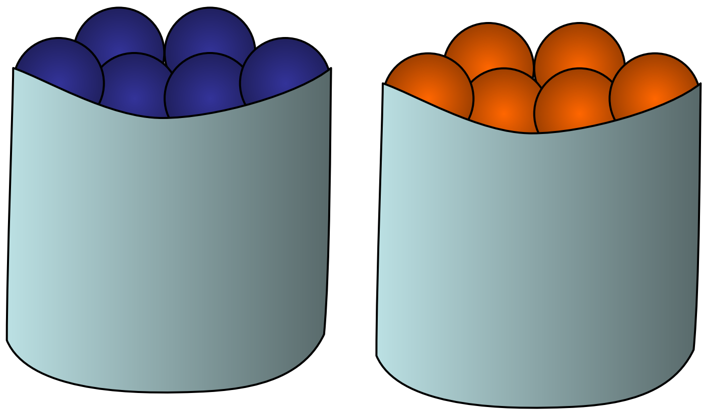
Сочетания с повторениями

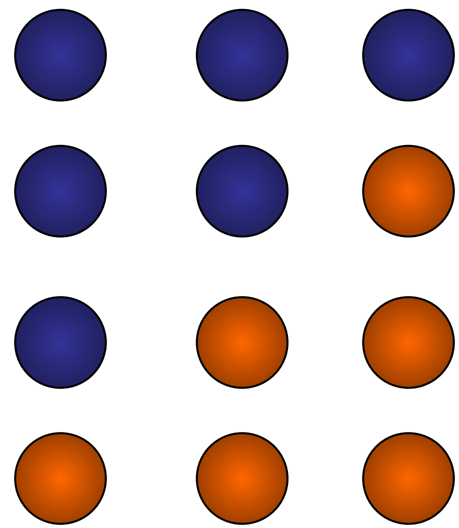
- *Сочетаниями с повторениями* из элементов ***k*** типов по ***m*** элементов (***m*** и ***k*** могут быть в любых соотношениях) называются все такие последовательности ***m*** элементов, принадлежащих исходным типам, которые отличают друг от друга составом элементов.

$$\overline{C_k^m} = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!}$$

Сочетания с повторениями

m=3





4 варианта сочетаний

k=2

$$\overline{C_2^3} = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

Пример 11

- Имеется 2 типа цветов, количество цветов не ограничено. Сколько различных букетов можно составить из 3-х цветов?
- 111
- 222
- 122
- 211
- Всего 4 различных букета

Пример 12

- Имеется 5 типов цветов, количество цветов не ограничено. Сколько различных букетов можно составить из 3-х цветов?

Решение

- Сочетание с повторением:

(5+3-1)!/(3!*(5-1) !)=35

Формулы комбинаторики

Перестановки
Используются все элементы
Порядок элементов важен

Размещения
Используются не все элементы
Порядок элементов важен

Сочетания
Используются не все элементы
Порядок элементов не важен

- *Пример 13.* Сколькими способами можно выбрать четырех студентов, которые будут получать стипендию, из восьми.

  Решение.
  Мы выбираем четырех из восьми, следовательно, это не "перестановки", а "сочетания" или "размещения". Так как студенты все разные, и один студент не может получать две или более стипендий, то должна использоваться формула "без повторений".
  Так как по условию задачи не сказано, что стипендии разные по величине, то порядок отбора нам не важен. Следовательно, нам нужна формула "сочетания без повторений".
  Всего студентов: n=8 Всего студентов: n=8 ,
  количество выбираемых: m=4 .

  8!/4!/(8-4)!=70 вариантов.

Пример 14. Паша, Сережа, Андрей и Антон думают надеть ли на торжественный вечер галстуки или бабочки. Они хотят одеться так, чтобы количество бабочек было нечетным. Перечислите все способы так одеться.

Решение.
Хотя нас и не спрашивают, сколько вариантов, давайте найдем их количество, чтобы потом проверить себя.
Если бабочек должно быть нечетное число, то бабочка может быть или одна, или три.
Найдем, сколько вариантов может быть, если бабочка одна.
Воспользуемся формулой сочетания без повторений. Всего ребят четверо n=4, выбираем одного, кто оденет бабочку m=1.

4!/1!/(4-1)!=4
Теперь найдем количество вариантов, когда бабочек будет три.

4!/3!/(4-3)!=4,

Найдем общее количество вариантов одеваний, воспользовавшись правилом суммы 4+4=8.

Теперь собственно сделаем то, что требовалось в задаче.

	Паша	**Сережа**	**Андрей**	**Антон**
1	Галстук	Галстук	Галстук	Бабочка
2	Галстук	Галстук	Бабочка	Галстук
3	Галстук	Бабочка	Галстук	Галстук
4	Бабочка	Галстук	Галстук	Галстук
5	Галстук	Бабочка	Бабочка	Бабочка
6	Бабочка	Бабочка	Бабочка	Галстук
7	Бабочка	Бабочка	Галстук	Бабочка
8	Бабочка	Галстук	Бабочка	Бабочка

Задача1

- Световое табло состоит из лампочек. Каждая лампочка может находиться в одном из трех состояний («включено», «выключено» или «мигает»). Какое наименьшее количество лампочек должно находиться на табло, чтобы с его помощью можно было передать 18 различных сигналов?

Задача 2

- Для передачи сигналов на флоте используются специальные сигнальные флаги, вывешиваемые в одну линию (последовательность важна). Какое количество различных сигналов может передать корабль при помощи четырех сигнальных флагов, если на корабле имеются флаги трех различных видов (флагов каждого вида неограниченное количество)?

Задача 3

- Вася и Петя передают друг другу сообщения, используя синий, красный и зеленый фонарики. Это они делают, включая по одному фонарику на одинаковое короткое время в некоторой последовательности. Количество вспышек в одном сообщении – 3 или 4, между сообщениями – паузы. Сколько различных сообщений могут передавать мальчики?

Задача 4

- Для кодирования 300 различных сообщений используются 5 последовательных цветовых вспышек. Вспышки одинаковой длительности, для каждой вспышки используется одна лампочка определенного цвета. Лампочки скольких цветов должны использоваться при передаче (укажите минимально возможное количество)?

Задача 5

- Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых все цифры различны?

Задача 6

- Виктор хочет купить пять разных книг, но денег у него хватает только на три (любые) книги. Сколькими способами Виктор может выбрать три книги из пяти?

Задача 7

- Цепочка из трех бусин формируется по следующему правилу: На первом месте в цепочке стоит одна из бусин А, Б, В. На втором – одна из бусин Б, В, Г. На третьем месте – одна из бусин А, В, Г, не стоящая в цепочке на первом или втором месте. Сколько всего есть таких цепочек?