# Программирование 1

## Лекция 1 (часть 2)

## Вводный пример

## РАЗРАБОТКА и ФОРМЫ ЗАПИСИ АЛГОРИТМА и ПРОГРАММЫ

# РАЗРАБОТКА и ФОРМЫ ЗАПИСИ АЛГОРИТМА

***Пример*** основных этапов работы над алгоритмом

## Наибольший общий делитель (НОД) двух натуральных чисел

Greatest Common Divisor (GCD)

***Дано*** : два натуральных числа $a$ и $b$ ($a, b > 0$).
***Требуется*** : найти натуральное число $c$ = НОД($a, b$).

Школьный способ: вычислять НОД на основе разложения чисел $a$ и $b$ на ***простые множители***

$$a = 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5} 7^{a_7} \ldots = \prod_{q \text{ простое}} q^{a_q},$$

$$b = 2^{b_2} 3^{b_3} 5^{b_5} 7^{b_7} \ldots = \prod_{q \text{ простое}} q^{b_q},$$

где целые $a_q$ и $b_q \geq 0$.

$$\text{НОД}(a, b) = \gcd(a, b) = \prod_{q \text{ простое}} q^{\min(a_q, b_q)}.$$

## Пример

$a = 754, \quad b = 143$

$a = 2 \times 13 \times 29, \quad b = 11 \times 13$

$НОД\ (a, b) = 2^0 \times 11^0 \times 13^1 \times 29^0 = 13$

! Получение разложения произвольного числа на простые множители само по себе является *непростой* задачей

# Другой способ вычисления НОД

Сначала рассмотрим
*формальное* (точное) определение НОД(*a*, *b*).

Запись $p \mid q$ для натуральных $p$ и $q$ далее означает, что $q$ является делителем (делит нацело) $p$.

Например, $754 \mid 13$ $(754 : 13 = 58)$

***Определение.*** *Натуральное число* $c = НОД(a, b)$, *если*

1) $c$ – *делитель* $a$, *т. е.* $a \mid c$;

2) $c$ – *делитель* $b$, *т. е.* $b \mid c$;

$c = ОД(a, b)$

3) $c$ – *наибольшее из натуральных чисел, удовлетворяющих* 1) *и* 2).

4) *для натуральных* $p$ *и* $q$ *запись* $p \mid q$ *означает, что существует такое натуральное* $s$, *что* $p = s\,q$;

5) *наибольшим из множества* $M$ *натуральных чисел является такое* $p \in M$, *что не существует другого числа* $q \in M$, *такого, что* $q > p$.

# Способ вычисления НОД на основе определения

Последовательно перебираем числа $c = 1, 2, 3, \ldots, \min(a, b)$ и находим ***максимальное*** среди тех из них, для которых справедливо $a \mid c$ и $b \mid c$.

Улучшенный способ: числа перебираются в порядке убывания от $\min(a, b)$ до $1$, тогда первое встретившееся $c$, такое, что $a \mid c$ и $b \mid c$, и будет $НОД(a, b)$.

! Оказывается, существует более эффективный (по количеству операций) алгоритм.

Алгоритм Евклида

# Полезно строить вычисления не непосредственно на определении вычисляемой величины, а на её **свойствах**.

Свойства (очевидные):

1. $gcd(a, b) = gcd(b, a)$
2. $gcd(a, a) = a$

Можно расширить область значений входных чисел $a$ и $b$, допуская, что одно из них может быть равно $0$.

Тогда

3. $gcd(a, 0) = a$.

Для формулировки важного свойства НОД, напомним определения операций

*деления нацело* **div** и *нахождения остатка* от деления **mod**.

Пусть $a, b \in N$ и $a > b > 0$, тогда существуют, и притом единственные $q \in N$ и $r \in N_0$, такие, что имеет место представление

$$a = q\,b + r, \quad 0 \le r < b.$$

Например, 25=3*7+4.

Обычно используют обозначения

$$q = a \textbf{ div } b, \qquad r = a \textbf{ mod } b,$$

и тогда

$$a = (a \textbf{ div } b)\,b + (a \textbf{ mod } b).$$

# Свойство НОД

Пусть $a, b \in N$ и $a > b > 0$, тогда
$gcd(a, b) = gcd(b, r)$, где $r = a \bmod b$,

В других обозначениях
$gcd(a, b) = gcd(b, a \bmod b)$,
$gcd(a, b) = gcd(b, a - q\,b)$.

*Доказательство* см. в учеб. пособии

Пример: $gcd(\mathbf{754}, \mathbf{143}) = gcd(\mathbf{143}, \mathbf{39})$,
$754 = 5*143 + 39$

Можно сформулировать и доказать аналогичное свойство НОД, включающее операцию вычитания:
$(a > b > 0) \rightarrow gcd(a, b) = gcd(a - b, b)$.

# Разработка алгоритма

В основу алгоритма положим два свойства НОД:

1. $(a > b > 0) \rightarrow gcd(a, b) = gcd(b, a \bmod b)$;
2. $gcd(a, 0) = a$.

Общая идея алгоритма:

последовательно от пары чисел $(a, b)$ переходить к новой паре чисел $(b, a \bmod b)$.

При этом $max(b, a \bmod b) < max(a, b)$,

т. е. каждый такой шаг «***уменьшает***» текущую пару.

Шаги продолжаются, пока не будет получена пара $(a, 0)$ , и тогда $gcd(a, 0) = a$.

## **Пример 1**: $a = 754, \quad b = 143$

| Номер шага | Текущая пара чисел | Нахождение остатка | Следующая пара чисел |
|---|---|---|---|
| 1 | (754, 143) | 754 = 5*143 + 39 | (143, 39) |
| 2 | (143, 39) | 143 = 3*39 + 26 | (39, 26) |
| 3 | (39, 26) | 39 = 1*26 +13 | (26, 13) |
| 4 | (26, 13) | 26 = 2*13 + 0 | (13, 0) ! |

Ответ $\gcd(754,143) = 13$.

## **Пример 2**: a = 754, b = 144

| Номер шага | Текущая пара чисел | Нахождение остатка | Следующая пара чисел |
|---|---|---|---|
| 1 | (754, 144) | 754 = 5*144 + 34 | (144, 34) |
| 2 | (144, 34) | 144 = 4*34 + 8 | (34, 8) |
| 3 | (34, 8) | 34 = 4*8 +2 | (8, 2) |
| 4 | (8, 2) | 8 = 4*2 + 0 | (2, 0)! |

Ответ gcd(754,144) = 2.

# **Пример 3**: $a = 610$, $b = 144$

| Номер шага | Текущая пара чисел | Нахождение остатка | Следующая пара чисел |
|---|---|---|---|
| 1 | (610, 144) | 610 = 4*144 + 34 | (144, 34) |
| 2 | (144, 34) | 144 = 4*34 + 8 | (34, 8) |
| 3 | (34, 8) | 34 = 4*8 +2 | (8, 2) |
| 4 | (8, 2) | 8 = 4*2 + 0 | (2, 0)! |

Ответ $gcd(610,144) = 2$.

# Пример 4: a = 233, b = 144

| Номер шага | Текущая пара чисел | Нахождение остатка | Следующая пара чисел |
|---|---|---|---|
| 1 | (233, 144) | 233=1*144+89 | (144, 89) |
| 2 | (144, 89) | 144=1*89+55 | (89, 55) |
| 3 | (89, 55) | 89=1*55+34 | (55, 34) |
| 4 | (55, 34) | 55=1*34+21 | (34, 21) |
| См. продолжение на следующем слайде | | | |

| Номер шага | Текущая пара чисел | Нахождение остатка | Следующая пара чисел |
|---|---|---|---|
| 1 | (233, 144) | 233=1*144+89 | (144, 89) |
| 2 | (144, 89) | 144=1*89+55 | (89, 55) |
| 3 | (89, 55) | 89=1*55+34 | (55, 34) |
| 4 | (55, 34) | 55=1*34+21 | (34, 21) |
| 5 | (34, 21) | 34=1*21+13 | (21, 13) |
| 6 | (21, 13) | 21=1*13+8 | (13, 8) |
| 7 | (13, 8) | 13=1*8+5 | (8, 5) |
| 8 | (8, 5) | 8=1*5+3 | (5, 3) |
| 9 | (5, 3) | 5=1*3+2 | (3, 2) |
| 10 | (3, 2) | 3=1*2+1 | (2, 1) |
| 11 | (2, 1) | 2=2*1+0 | (1, 0)! |

**Ответ** **gcd(233,144) = 1.**

# Замечание о вычислительном процессе и алгоритме (программе)

Каждый пример содержит *последовательность шагов*.

*Шаг* определяется текущим состоянием (парой чисел) и вызывает определенное действие (нахождение остатка и замену предыдущей пары на новую).

В каждом примере набор конкретных состояний (в том числе начальное) и действий, вообще говоря, разные.

Все примеры – это один ***вычислительный процесс***, но разные его *реализации* (проявления), определяемые начальным состоянием – входными данными).

# О вычислительном процессе и алгоритме

(продолжение)

*Реальные осуществления вычислительного процесса* (ВП) – его *реализации.*

Сам ВП – это совокупность всех своих реализаций – уже абстракция.

Что объединяет все реализации ВП?

Ответ: алгоритм (или программа), как описание ВП.

Программа = набор правил (инструкций), который направляет эволюцию ВП.

Иногда мы не будем различать ВП и его реализацию (из контекста будет ясно о чём речь), но всегда различаем ВП и алгоритм (программу).

# Цитата


**Вычислительные процессы** – это *абстрактные* существа, которые живут в компьютерах.

Развиваясь, процессы манипулируют абстракциями другого типа, которые называются *данными*.

Эволюция процесса направляется набором правил, называемым *программой*.

В сущности, мы заколдовываем дух компьютера с помощью своих чар.

Абельсон Х., Сассман Д.Д., Сассман Д.
**Структура и интерпретация компьютерных программ** –
М.: Добросвет, КДУ, 2006

# Конец замечания об алгоритмах вычислительных процессах

Вернемся к алгоритму Евклида

# Алгоритм Евклида («Математическая запись»)

Пусть $c_0 = a$, $c_1 = b$ ($a > b > 0$). Тогда $gcd(a, b) = gcd(c_0, c_1)$.

| № | До шага | Действия шага | После шага |
|---|---|---|---|
| 1: | $\{c_0, c_1\}$ | $c_0 = q_1 c_1 + c_2$ | $\{c_1, c_2\}$ $\{gcd(c_1, c_2) = gcd(c_0, c_1)\}$ |
| 2: | $\{c_1, c_2\}$ | $c_1 = q_2 c_2 + c_3$ | $\{c_2, c_3\}$ $\{gcd(c_2, c_3) = gcd(c_1, c_2)\}$ |
| | | … | |
| i: | $\{c_{i-1}, c_i\}$ | $c_{i-1} = q_i c_i + c_{i+1}$ | $\{c_i, c_{i+1}\}$ $\{gcd(c_i, c_{i+1}) = gcd(c_{i-1}, c_i)\}$ |
| | | … | |
| n: | $\{c_{n-1}, c_n\}$ | $c_{n-1} = q_n c_n + c_{n+1}$ | $\{c_n, c_{n+1}\}$ $\{gcd(c_n, c_{n+1}) = gcd(c_{n-1}, c_n)\}$ |

Делимое Делитель Остаток

Предполагается, что $n$-й шаг вычислений последний, т. е. $c_{n+1} = 0$ и $gcd(c_n, 0) = c_n$, а следовательно, $c_n = gcd(a, b)$.

1. Обоснование правильности алгоритма (отложим)
2. Обоснование завершимости алгоритма:

$$c_0 > c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > c_{n-1} > c_n > c_{n+1} = 0$$

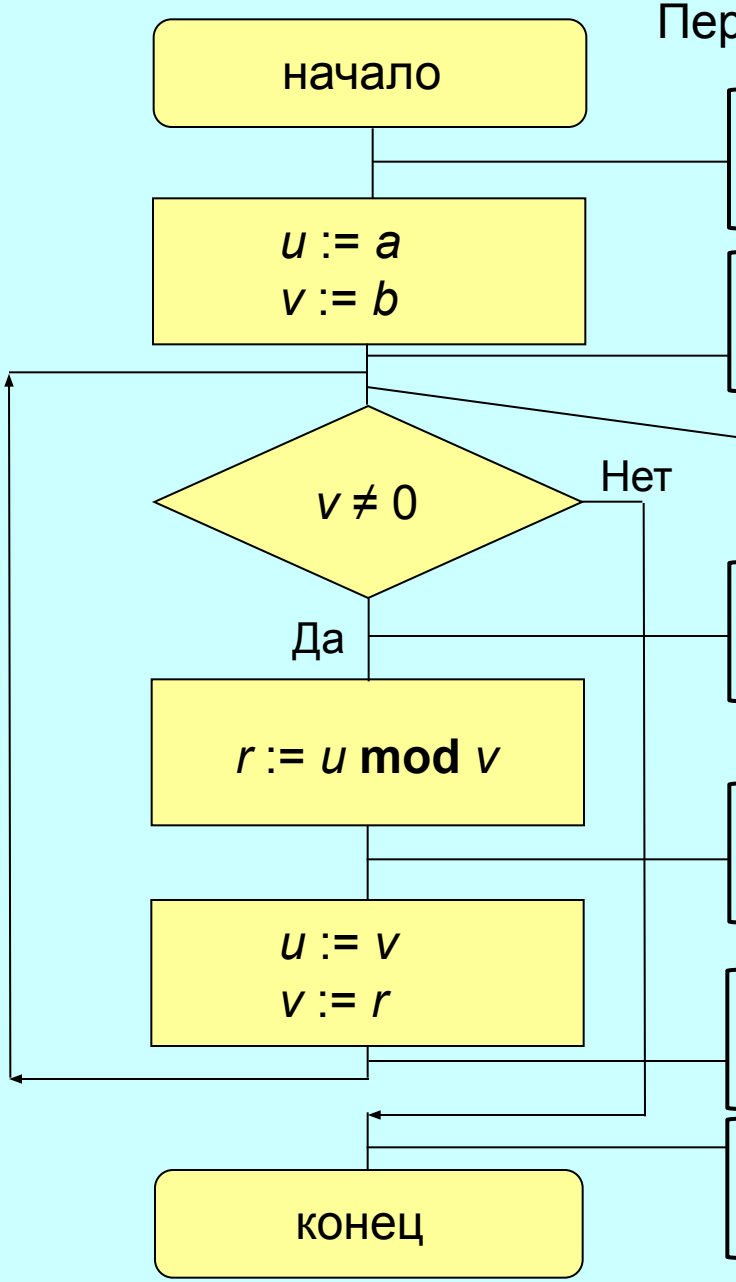
Не может существовать бесконечной строго убывающей последовательности целых неотрицательных чисел ($c_k \geq 0$).

# Компьютерная запись

Отличная от «математической».

В виде блок-схемы
(графической схемы) алгоритма

Переменные *a, b, u, v, r* : ***Integer*** (целого типа)




У1: $a > b > 0$;

У2: $u > v > 0$, $\gcd(u, v) = \gcd(a, b)$;

У2*: $u > v \geq 0$, $\gcd(u, v) = \gcd(a, b)$;

У3: $u > v > 0$, $\gcd(u, v) = \gcd(a, b)$;

У3*: $u > v > r \geq 0$, $\gcd(u, v) = \gcd(v, r) = \gcd(a, b)$;

У4: $u > v \geq 0$, $\gcd(u, v) = \gcd(a, b)$;

У5: $u = \gcd(a, b)$, $v = 0$.

Задание. Ослабить ограничения на входные данные:

- $a \geq b \geq 0$ **и** $(a \neq 0$ **или** $b \neq 0)$
- $a \geq 0, b \geq 0$ (доопределить $gcd(0, 0) = 0$)

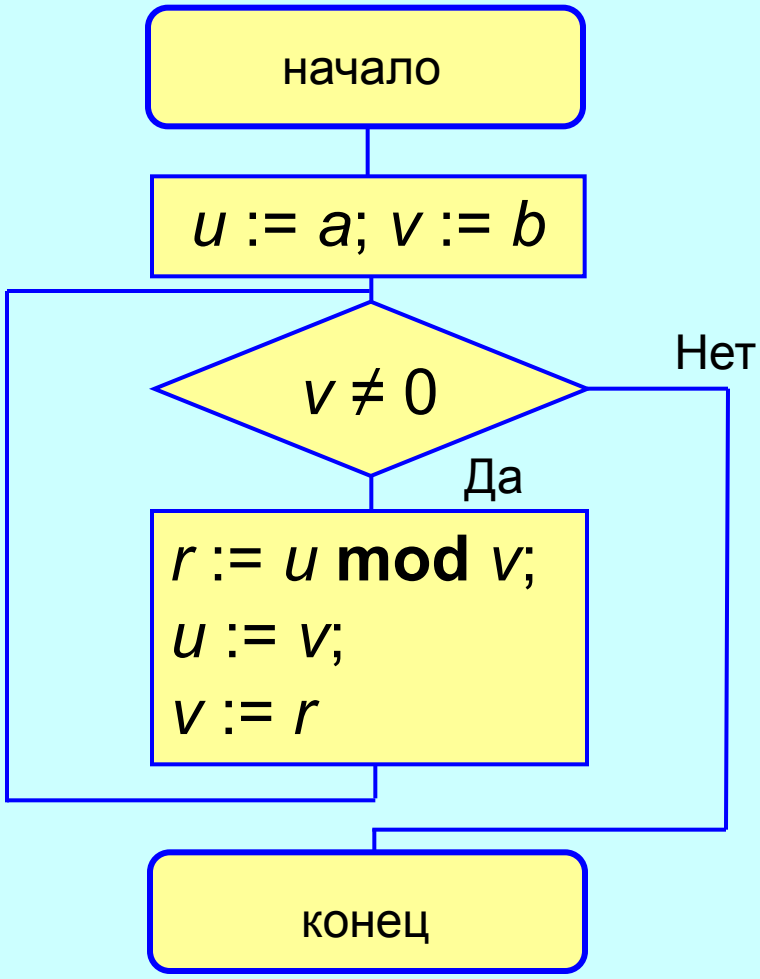
## *Метод индуктивных утверждений*

*Утверждение о состоянии переменных программы в некоторой её точке даётся таким образом, что оно справедливо при любом проходе вычислений через эту точку независимо от количества предыдущих проходов и от предыстории (от того, какой путь при вычислениях привёл в эту точку).*

*Правильность программы* означает, что если она начала выполняться при заданном предусловии (утверждении У1) и завершилась, то после завершения будет справедливо постусловие (утверждение У5).

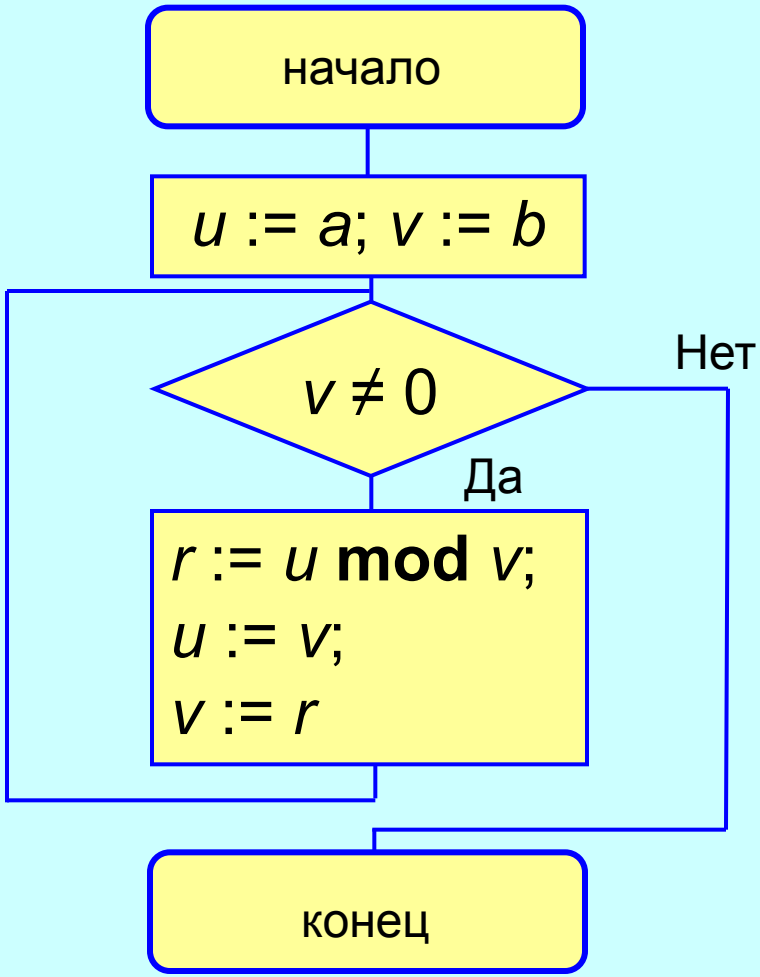
# Запись алгоритма Евклида на языке Паскаль

```
u := a ; v := b ;
while  v ≠ 0  do
    begin
        r := u mod v ;
        u := v ;
        v := r ;
    end
```



# Запись алгоритма Евклида на языке C++

```
u = a;
v = b;
while ( v != 0 )
{   r = u % v;
    u = v;
    v = r;
}
```



# Аннотирование программы (алгоритма)

```
// У1: Предусловие
u = a ; v = b ;
// У2: утверждение перед первым входом в цикл
while (v != 0 )
{       // У3: утверждение в точке входа в тело цикла}
    r = u %v ;
    u = v ;
    v = r ;
    // У4: утверждение в точке выхода из тела цикла
}
// У5: Постусловие
```

# Утверждения У1–У5 для алгоритма Евклида

У1: $a > b > 0$;

У2: $u > v > 0$, $\gcd(u, v) = \gcd(a, b)$;

У3: $u > v > 0$, $\gcd(u, v) = \gcd(a, b)$;

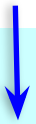
У4: $u > v \geq 0$, $\gcd(u, v) = \gcd(a, b)$;

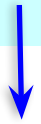
У5: $u = \gcd(a, b)$, $v = 0$.

# Аннотированный алгоритм Евклида

```
// У1: a > b > 0
u = a ; v = b ;
// У2: u > v > 0, gcd(u, v) = gcd(a, b)
while (v != 0 )
{       // У3: u > v > 0, gcd(u, v) = gcd(a, b)
    r = u % v ;
    u = v ;
    v = r ;
    // У4: u > v ≥ 0, gcd(u, v) = gcd(a, b)
}
// У5: u = gcd(a, b),  v = 0
```

```
/*  Сергеев А.И., гр.8304, 7.09.2008
 Лабораторная работа N 0
 Greatest Common Divisor
 GCD(a,b) - наибольший общий делитель натуральных a,b
 примечание: пометка "Dem" в тексте указывает на
демонстрационный фрагмент */
#include <iostream>
using namespace std ;
int main ( )
{unsigned int a,b,u,v;
unsigned int Remainder, Quotient, i; // Dem
cout << "Введите два натуральных числа: \n" ;
cin >> a >> b;
cout << "Находим НОД пары чисел : " << a << ", " << b <<"\n";
```

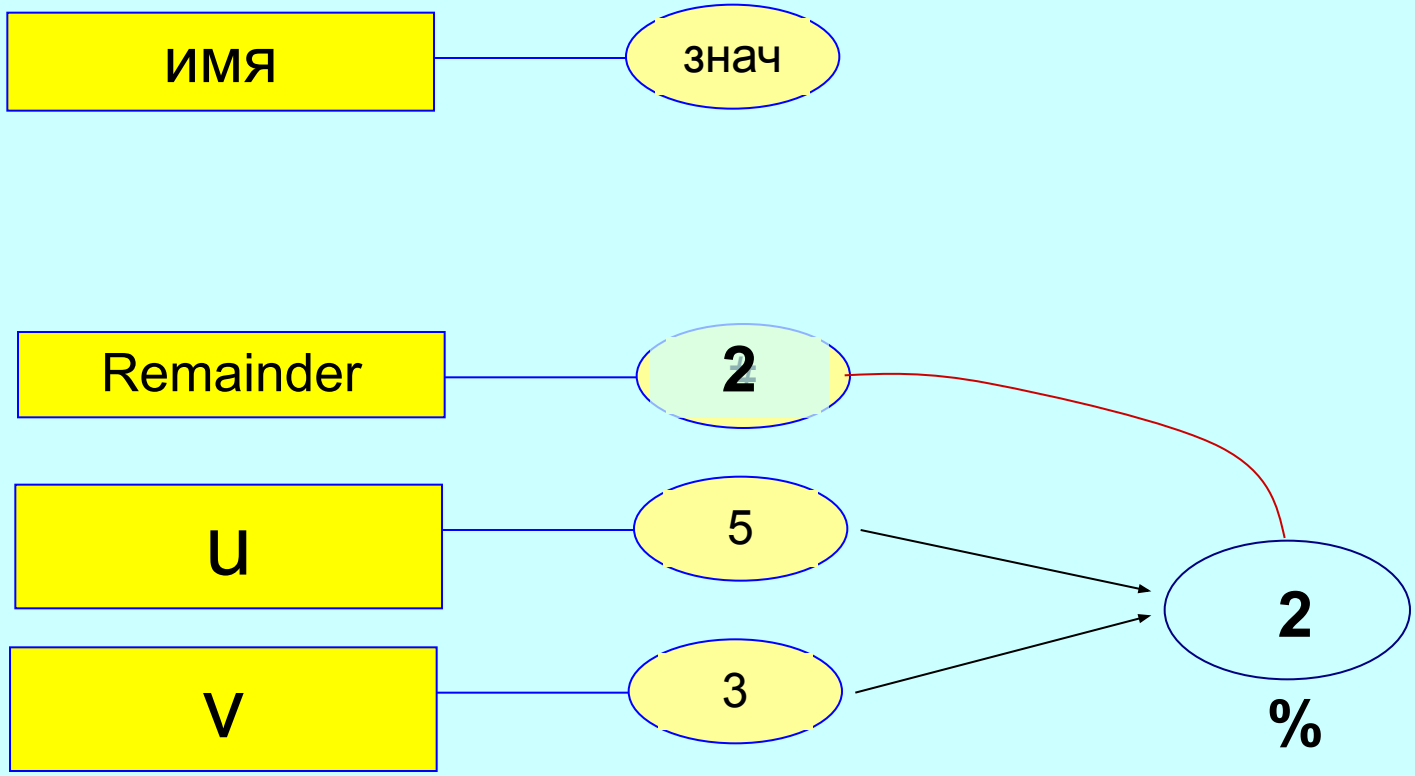




```
    i = 0; // Dem
    u = a;
    v = b;
    //  u>=0 & v>=0 & GCD(u,v)=GCD(a,b)
    while ( v != 0 )
    {    // u>=0 & v>0 & GCD(u,v)=GCD(a,b)
            i = i + 1;              // Dem
        cout << "Step " << i ; // Dem
            Quotient = u / v;     // Dem
        Remainder = u % v;
        cout << " :: " << u << " = " << Quotient << " * " << v << " + " <<
    Remainder << "\n"; // Dem
        u = v;
        v = Remainder;
        //   u>0 & v>=0 & GCD(u,v)=GCD(a,b)
    }
    // u>=0 & v=0 & u=GCD(u,0)=GCD(a,b)
    cout << "Результат : --> НОД(" << a << ", " << b << ") = " << u << "\n";
    return 0;
}
```

# Замечание

Например, Remainder = u % v;



# Способ вычисления НОД на основе определения

```
// a > 0 & b > 0
if ( a < b ) c = a;
else c = b;
// c=min(a,b)}

while ( ((a % c ) != 0) || ((b % c ) != 0))
{c = c - 1;
} ;
// c = gcd(a, b)}
```

См. файл gcd_w4.cpp

# Анализ АЕ

Отложен

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ