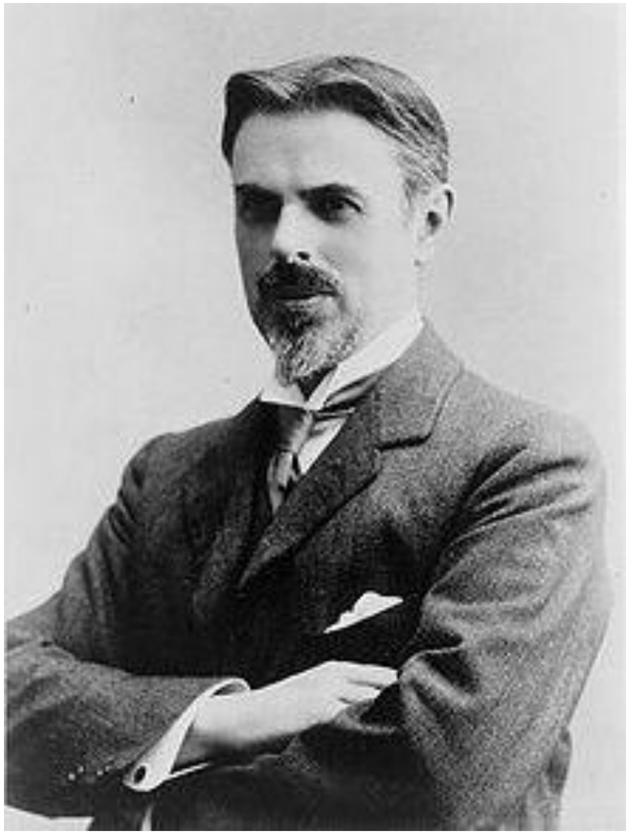
Лекция 9.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Но на следующий день один из его учеников сказал ему: "Учитель, зачем ты делаешь это? Хотя нам доставляет радость, нам не ведомы ни высокие причины, ни значение этого". И ответил он: "Сначала я покажу Вам, что делаю, а потом объясню зачем".

Лоуренс Хаусмен



Лоуренс Хаусмен,
1865-1959, Bromsgrove

На предыдущей лекции

- Сформулирован способ задания движения ТТ
- Введено понятие степеней свободы
- Определено поступательное движение ТТ
- Определено вращательное движение ТТ
- Изучено вращение ТТ вокруг неподвижной оси
- Изучены кинематические характеристики вращательного движения ТТ
- Изучены передаточные механизмы

Цель лекции

- ***Изучить плоское движение ТТ***

План лекции

9.1. Задание плоского движения ТТ

9.2. Скорости точек при плоском движении ТТ

9.3. Мгновенный центр скоростей

9.4. Ускорение точек при плоском движении ТТ

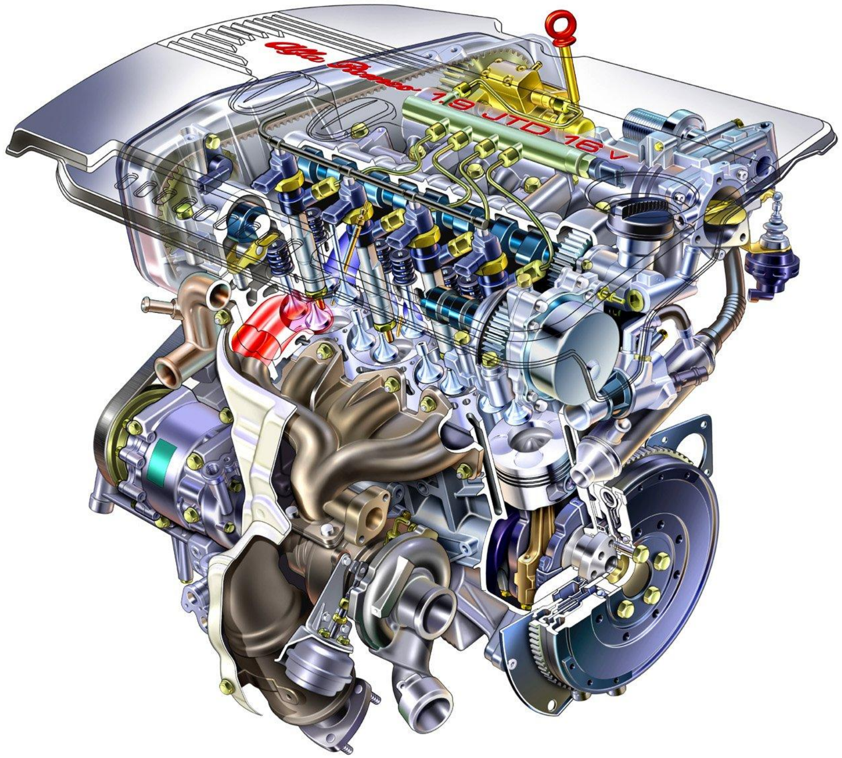
9.5. Кинематический расчет плоского механизма

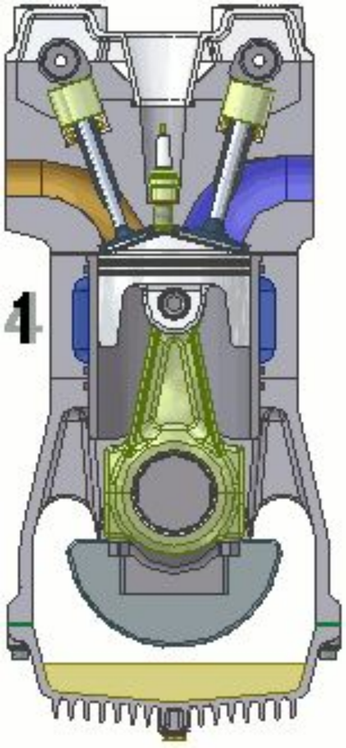
9.6. Заключение

9.1. Задание плоского движения твердого тела

9.1.1. Определение и мотивация

Движение твердого тела называется плоским (плоскопараллельным), если все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости





Двигатель внутреннего сгорания

9.1.1. Определение и мотивация

Движение твердого тела называется плоским (плоскопараллельным), если все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости

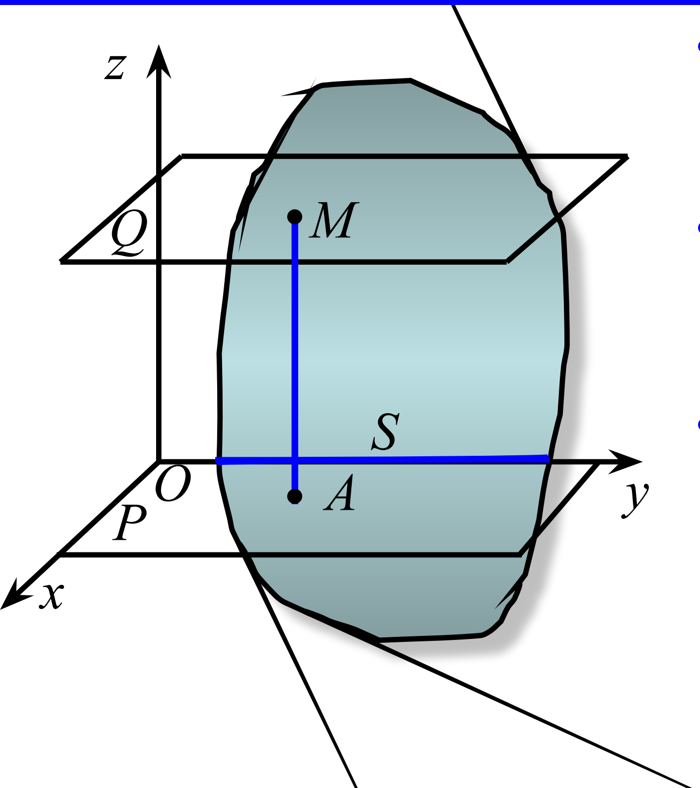
**Иллюстрация работы кривошипно-шатунного механизма.
Передача движения колесу**

9.1.1. Определение и мотивация

Движение твердого тела называется плоским (плоскопараллельным), если все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости

Иллюстрация работы кривошипно-шатунного механизма. Передача движения колесу

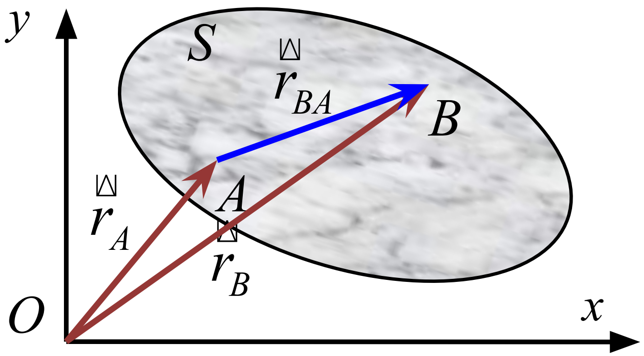
9.1.2. Уравнение плоского движения



- Рассмотрим произвольное плоское движение ТТ. Пусть *P* (*Oxy*) – плоскость, параллельно которой оно движется
- При плоском движении тела все его точки, лежащие на прямой, перпендикулярной к плоскости *P*, движутся одинаково
- Действительно, пусть точки *A* и *M* лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости *P*. Отрезок *AM* при движении тела остается $\perp$ к плоскости *P*, т.к. точка *M* все время находится в плоскости $Q \parallel P$, а тело является твердым (сохраняются углы) $\Longrightarrow$

Для задания плоского движения твердого тела достаточно определить движение лишь одной точки на каждой прямой, проведенной перпендикулярно к плоскости. Таким образом, для описания произвольного плоского движения твердого тела достаточно изучить движение сечения *S*

9.1.2. Уравнение плоского движения

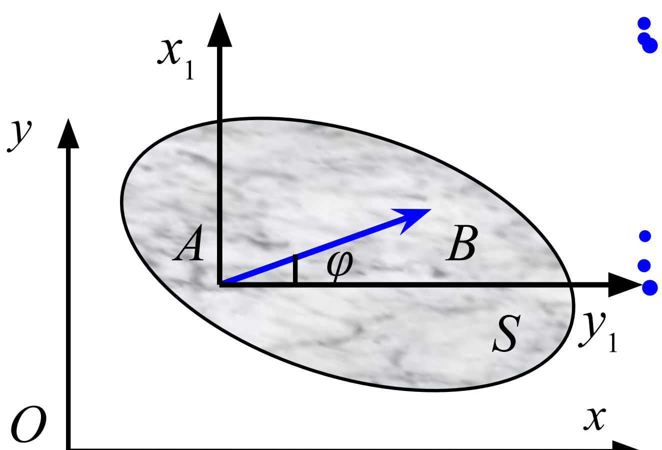


- Будем описывать движение сечения S относительно неподвижной системы координат Oxy, жестко связанной с плоскостью P
- Положение сечения относительно этой системы координат определяется положением какого-либо принадлежащего ему отрезка AB ⟹

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = r_{BA}^2$$

- Т.о., из четырех координат, определяющих положение отрезка AB, независимыми оказываются только три (3 степени свободы).

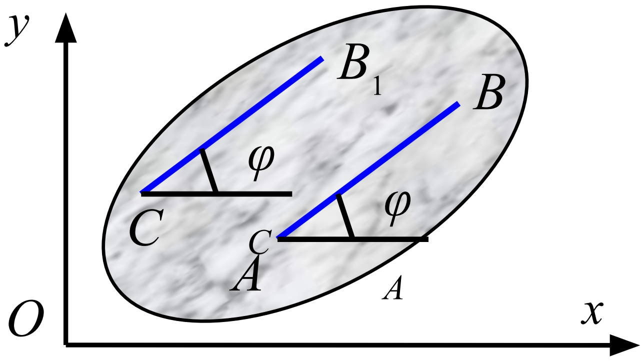
Т.о., плоское движение ТТ слагается из поступательного движения вместе с полюсом и вращения вокруг полюса



- Этим степеням свободы соответствуют движение вдоль осей Oy и Ox и вращение относительно некоторой точки
- Это движение будет однозначно определено, если заданы координаты точки и угол между осью и отрезком
- Система координат Ax_1y_1 будет двигаться поступательно (со скоростью точки A) относительно системы Oxy
- Введем вспомогательную систему координат с началом в точке A (**полюсе**) тела и осями Ax_1, Ay_1, параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат
- Положение отрезка AB, а следовательно, и всего сечения S относительно этой новой системы координат, характеризуется углом φ. Движение же отрезка AB относительно системы координат Ax_1y_1 – это вращательное движение
- Т.о. закон плоского движения ТТ имеет вид:

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

9.1.3. О выборе полюса



$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

- При задании этого закона движения за полюс может быть взята любая точка тела

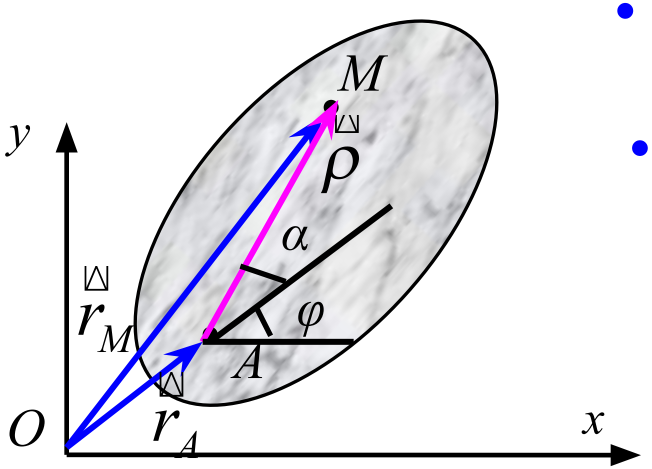
- Поэтому вид первых двух уравнений зависит от выбора полюса, т. е. поступательная часть движения зависит от выбора полюса. Вращательная же часть движения от выбора полюса не зависит

Действительно,

- Пусть *C* – другой полюс, и пусть точка B_1 такова, что в начальный момент времени (при $t = 0$) $\varphi_C(0) = \varphi_A(0)$.

- Так как прямые *AB* и CB_1 жестко связаны с телом и тело абсолютно твердое, то эти прямые, будучи параллельными при $t = 0$, останутся параллельными и при любом $t > 0$. Это и означает, что $\varphi_C(t) = \varphi_A(t)$ для любого t > 0.

9.1.4. Закон движения



- Определим закон движения точек ТТ
- Пусть точка *M* расположена на расстоянии $\rho = AM$ от полюса *A* ⟹

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{\rho}(t)$$

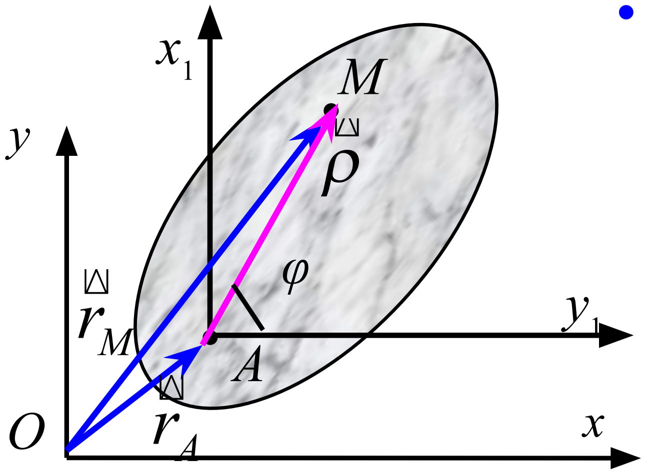
⇓

$$x_M(t) = x_A(t) + \rho\cos(\alpha + \varphi(t)), \;\; y_M(t) = y_A(t) + \rho\sin(\alpha + \varphi(t))$$

- Эти уравнения одновременно являются и параметрическими уравнениями траектории точки *M*

9.2. Скорости точек ТТ при плоском движении

9.2.1. Теорема о скоростях точек ТТ



- Скорость произвольной точки М находится дифференцированием закона движения

$$\vec r_M(t) = \vec r_A(t) + \vec\rho(t)$$

$$\vec{\mathrm{v}}_M \equiv \dot{\vec r}_M = \frac{d\vec r_A}{dt} + \frac{d\vec\rho}{dt} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}}_M = \vec{\mathrm{v}}_A + \vec{\mathrm{v}}_{MA}$$

где введена скорость движения точки *M* относительно полюса *A*

$$\vec{\mathrm{v}}_{MA} = \frac{d}{dt}\vec\rho = \vec\omega \times \vec{\mathrm{v}}_B \Rightarrow \vec{\mathrm{v}}_M = \vec{\mathrm{v}}_A + \vec\omega \times \vec\rho_B$$

Это скорость вращательного движения тела в системе координат Ax_1y_1

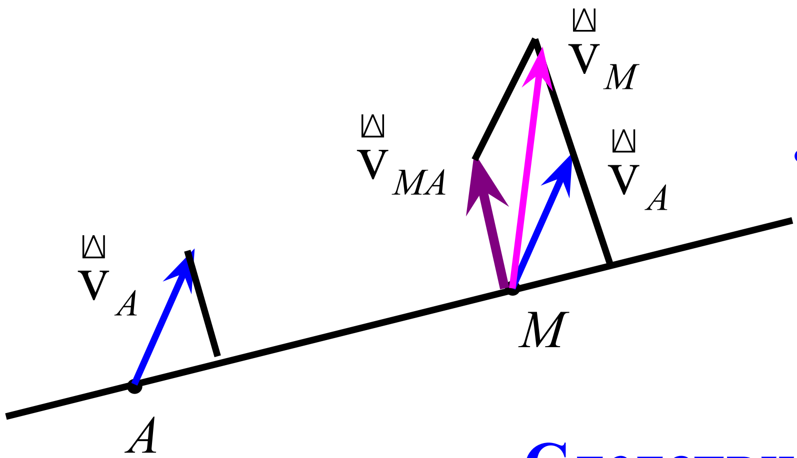
Скорость произвольной точки *M* ТТ, совершающего плоское движение, геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки *A*, принятой за полюс, и скорости этой точки в ее вращении вместе с телом вокруг полюса

9.2.2. Следствия теоремы скоростей

$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$ Скорости произвольных двух точек связаны между собой

Следствие 1

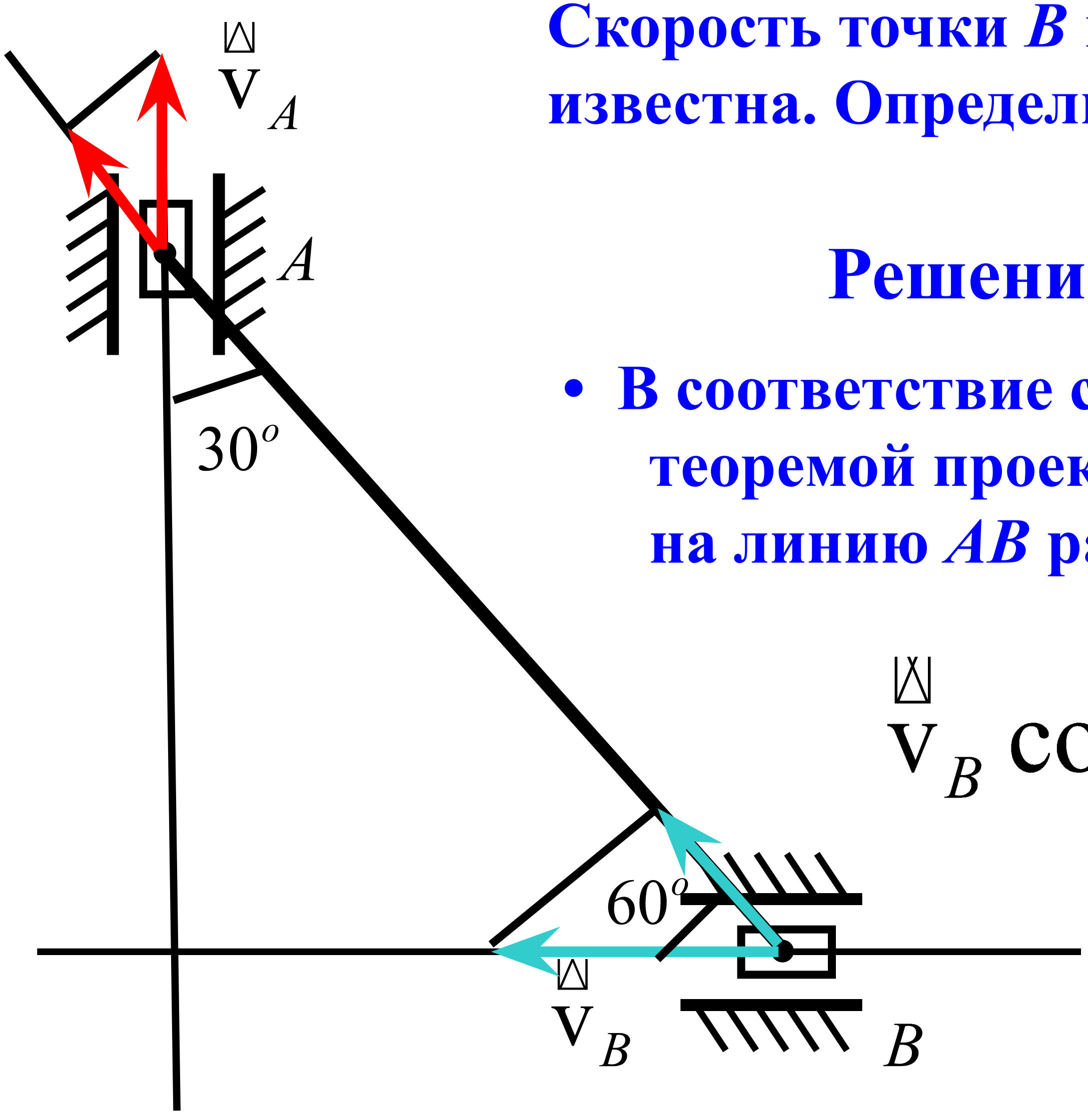
Проекции скоростей двух точек сечения *S* на прямую, их соединяющую, равны



- Для доказательства достаточно спроецировать уравнение скоростей на прямую AM и учесть, что $\vec{v}_{MA} \perp AM$

Следствие 2

- Если точки *A*, *B* и *C* сечения *S* лежат на одной прямой, то концы векторов скоростей этих точек, тоже лежат на одной прямой, причем



Скорость точки *B* в данный момент времени известна. Определить скорость точки *A*

Решение

- **В соответствие с только что доказанной теоремой проекции скоростей точек *A* и *B* на линию *AB* равны** ⟹

$$\vec{v}_B \cos 60^o = \vec{v}_A \cos 30^o$$

9.3. Мгновенный центр скоростей

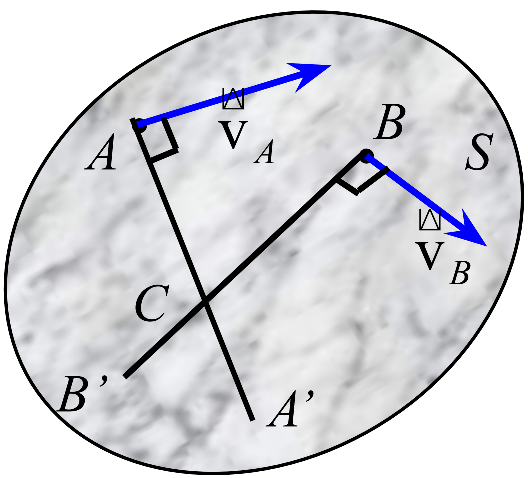
9.3.1. Теорема о МЦС

Мгновенным центром скоростей (МЦС) сечения тела (или плоской фигуры) называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю

Теорема

Если угловая скорость рассматриваемого сечения *S* в данный момент времени отлична от нуля, то мгновенный центр скоростей существует и единственен

Действительно, рассмотрим сечение *S*



- Пусть в некоторый момент времени *t* точки *A* и *B* имеют скорости, не параллельные друг другу
- Тогда точка *C*, лежащая на пересечении перпендикуляров соответственно к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, имеет скорость, равную нулю, и, следовательно, является МЦС
- Это следует из теоремы о проекциях скоростей, так как если бы скорость $\vec{V}_C$ была отлична от нуля, то она одновременно должна была бы быть перпендикулярна к *AA'* и BB'. Последнее, однако, невозможно в силу непараллельности скоростей точек *A* и *B*

Теорема доказана

9.3.2. Использование МЦС

- Т.о., для определения МЦС надо знать только направления скоростей каких-либо двух точек сечения тела (или касательные к траекториям этих точек)
- МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к их скоростям
- Если в момент времени *t*, когда точка *C* является МЦС, взять ее за полюс, то скорость любой точки сечения будет равна ее скорости вращения вокруг МЦС

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AC} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}$$

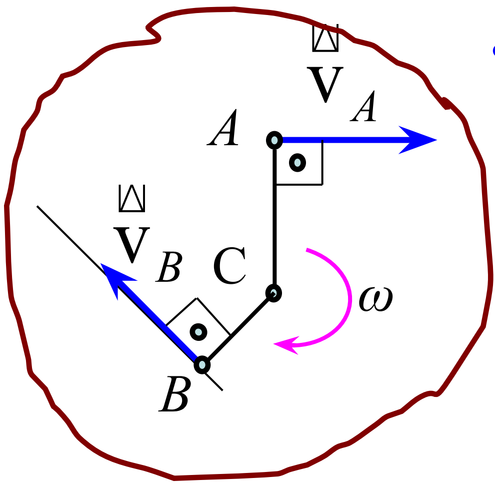
- Аналогично для любой другой точки сечения $\vec{v}_B = \vec{v}_{BC} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{BC}$
- Но поскольку $v_A = \omega AC, \quad v_B = \omega BC, \quad \Longrightarrow$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AC}{BC}, \quad \omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} = \square$$

- Поэтому, зная положение МЦС данной плоской фигуры и скорость какой-либо ее точки, можно определить скорость любой другой точки фигуры и ее угловую скорость

9.3.3. Нахождение МЦС

- МЦС может быть найден, если известны скорость одной точки тела, например *A*, и линия действия скорости второй точки тела, например, *B*



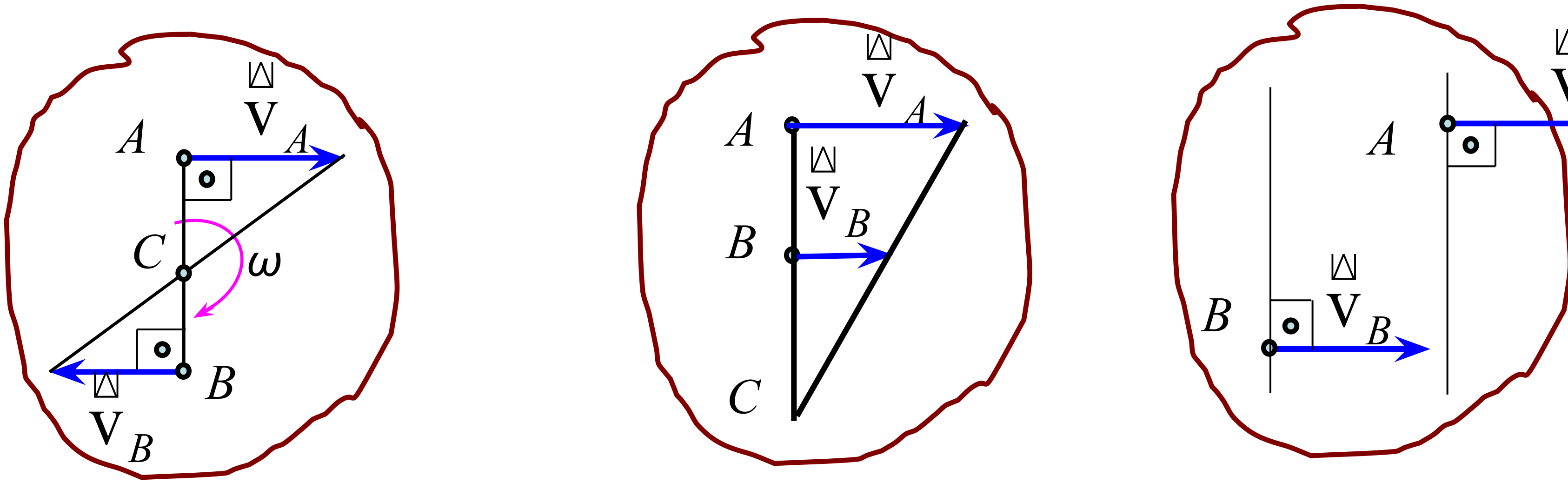
- Восстановив перпендикуляры к вектору скорости точки *A* и к линии действия скорости точки *B*, находим точку их пересечения *C*, которая и будет МЦС
- Вращение тела происходит туда, куда вектор скорости v_A первой точки поворачивает тело вокруг МЦС

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AC}{BC}, \quad \omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} = \square$$

- При определении скоростей точек тела плоское движение можно представить как последовательность мгновенных вращений вокруг мгновенного центра скоростей, который сам перемещается в плоскости движения тела

9.3.3. Нахождение МЦС

- На практике нередко встречаются случаи, когда скорости некоторого множества точек сечения параллельны друг другу и линия *AB* перпендикулярна к v_A
- МЦС в этих случаях определяется при помощи построений, показанных на рисунках



- Если же линия *AB* не перпендикулярна к вектору скорости $\vec{V}_A$, то МЦС не существует или, можно сказать, он находится в бесконечности

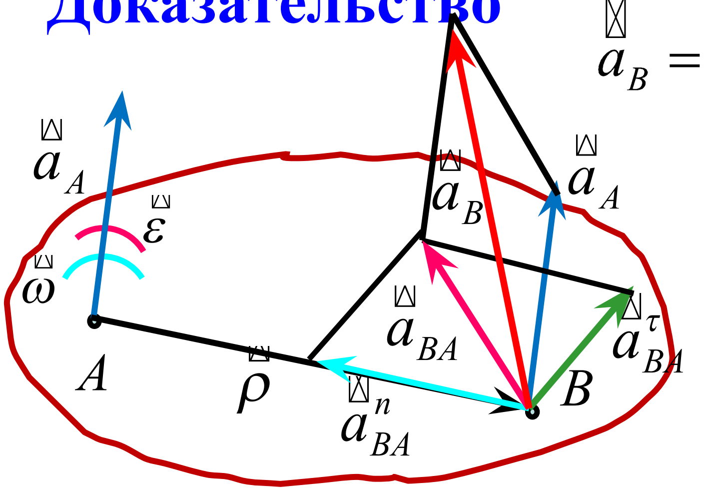
9.4. Ускорение точек ТТ при плоском движении

9.4.1. Теорема о сложении ускорений точек

Ускорение любой точки тела, совершающего плоское движение, определяется как сумма ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении вокруг полюса

$$\vec a_B = \vec a_A + \vec\varepsilon \times \vec\rho + \vec\omega \times \vec\omega \times \vec\rho = \vec a_A + \vec a_{BA}$$

Доказательство



$$\vec a_B = \frac{d\vec{\mathrm v}_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathrm v}_B + \vec\omega \times \vec\rho\right) = \frac{d\vec{\mathrm v}_A}{dt} + \frac{d\vec\omega}{dt} \times \vec\rho + \vec\omega \times \frac{d\vec\rho}{dt}$$

$$= \vec a_A + \vec\varepsilon \times \vec\rho + \vec\omega \times \vec\omega \times \vec\rho = \vec a_A + \vec a_{BA}^{\tau} + \vec a_{BA}^{n}$$

$$\vec a_{BA}^{\tau} = \vec\varepsilon \times \vec\rho, \quad \vec a_{BA}^{n} = \vec\omega \times \vec\omega \times \vec\rho = \vec\omega \times \vec v_{BA}$$

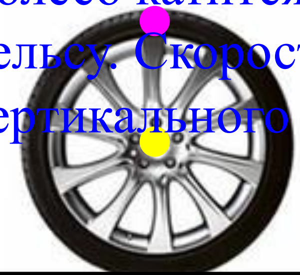
$$\mathrm a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB, \quad \mathrm a_{BA}^{n} = \omega\, \mathrm v_{BA} = \omega^2 \cdot AB$$

$$\mathrm a_{BA} = \sqrt{(\mathrm a_{BA}^{n})^2 + (\mathrm a_{BA}^{\tau})^2} = AB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

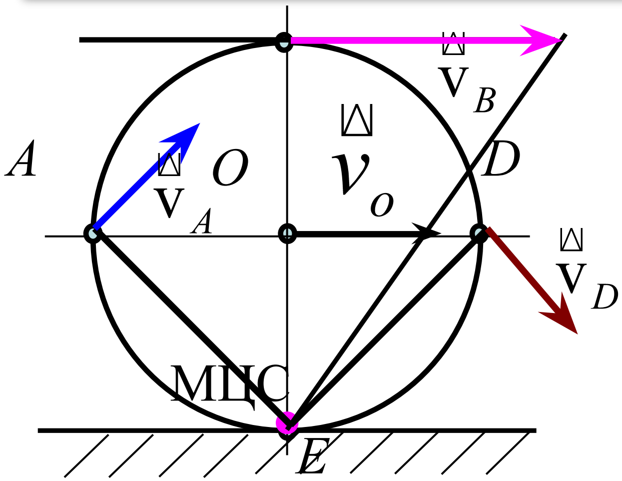
Теорема доказана

9.4.2. Задача 9.1

Колесо катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу. Скорость его центра *O* равна v_O. Найти скорости концов *A*, *B*, *D*, *E* вертикального и горизонтального диаметров колеса.



Решение

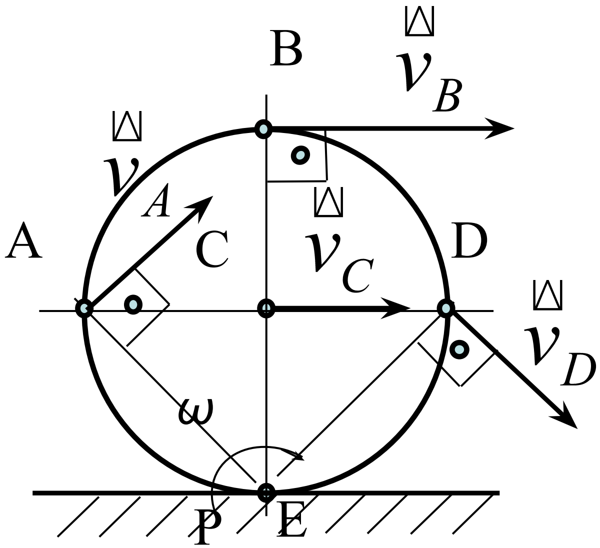


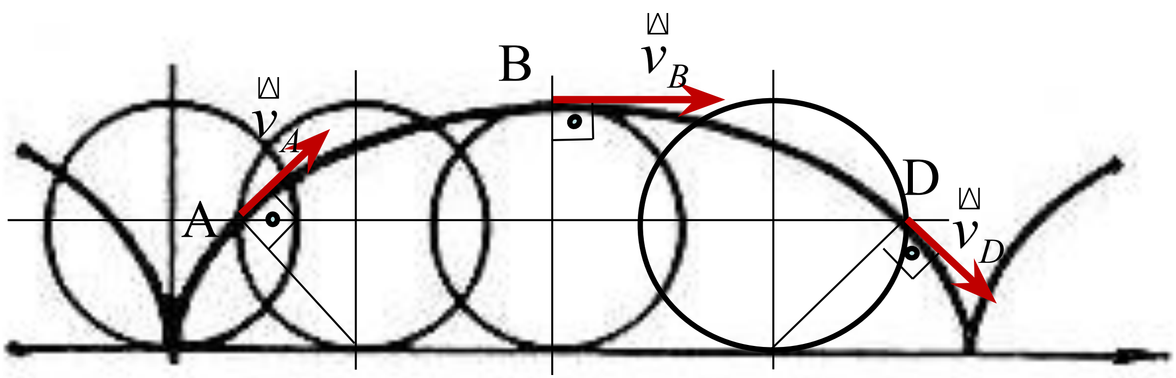
- Решим задачу, используя свойства МЦС
- Качение колеса происходит без скольжения и МЦС колеса *C* будет находиться в данный момент времени в точке касания колеса с неподвижным рельсом, т.е. $v_E = 0$

- Согласно свойствам МЦС мы можем представить колесо, вращающимся в данное мгновение времени вокруг МЦС $\Longrightarrow$

$$\omega = v_C / CO = v_C / R, \qquad v_B = \omega \cdot BO, \quad v_A = \omega \cdot AP$$

9.4.3. Траектория движения колеса





9.4.3. Траектория движения колеса

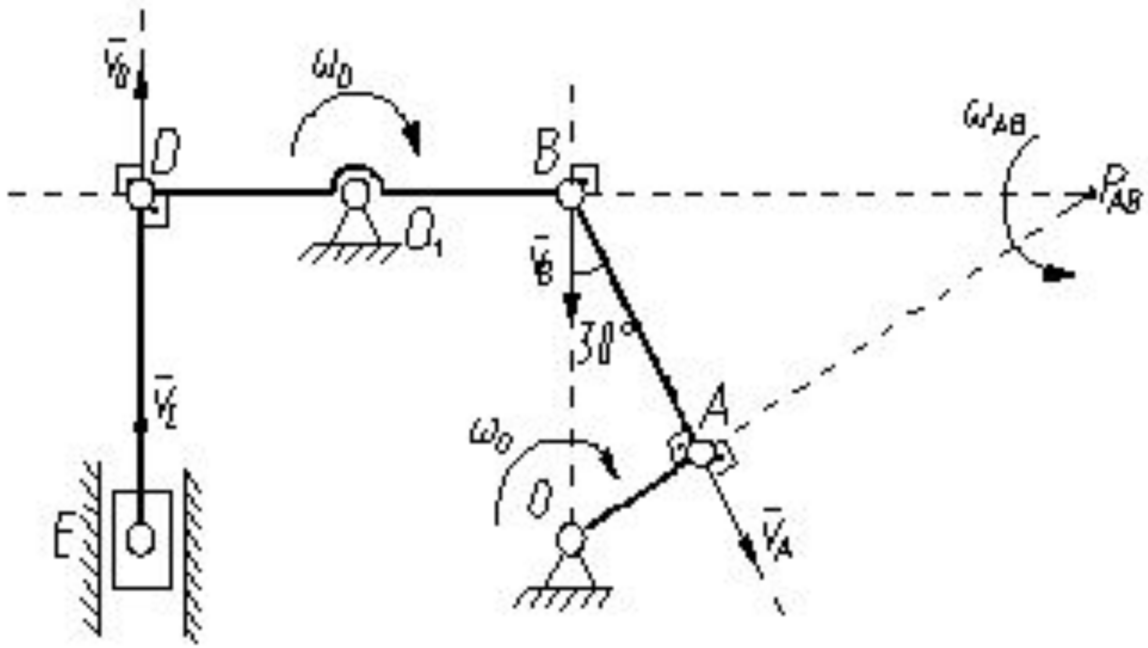
$$x = rt - r\sin\omega t, \quad y = r - r\cos\omega t$$

Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели её древние… ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздём колеса

Паскаль

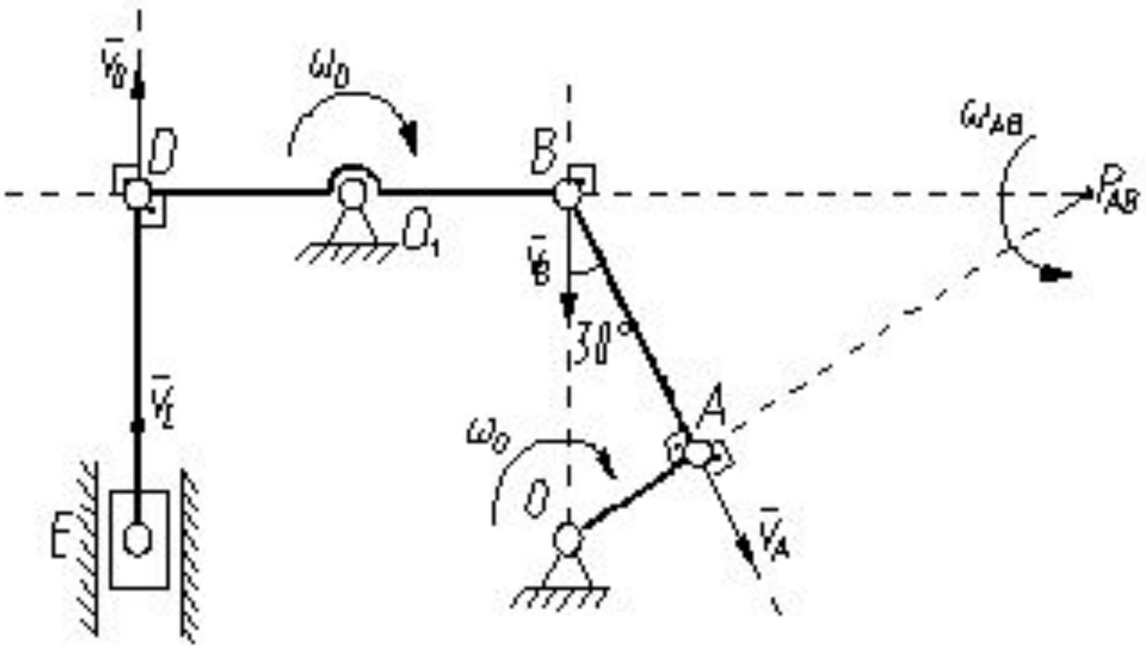
9.5. Расчет плоского механизма

9.5.1. Задача 9.3



Кривошип *OA* длины 0.5 м механизма привода насоса вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 = 1 рад/с. Определить скорость поршня Е насоса и угловые скорости звеньев механизма в положении, показанном на рисунке, если длина коромысла DB = 2 м, а $O_1D = O_1B$

9.5.1. Задача 9.3



- Механизм привода является плоским механизмом. Расчет плоского механизма рекомендуется производить в следующей последовательности

- проанализировать движение звеньев механизма;
- построить, если возможно, линии действия скоростей характерных точек механизма;
- начиная с ведущего звена, производить кинематический расчет, где для звеньев в плоском движении нужно обязательно находить положение мгновенного центра скоростей.

9.6.1. Основные выводы

- Введено понятие плоского движения ТТ
- Показано, что при плоском движении скорости точек ТТ связаны между собой
- Движение произвольной точки можно представить в виде суперпозиции движения некоторой другой точки (полюса) и вращения относительно этого полюса
- Плоское движение ТТ можно рассматривать как вращение относительно МЦС

Динамика. Лекция 10

Аксиомы динамики точки