Тема: *Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка*

(однородные с постоянными коэффициентами)

Лекция

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ

- **Определение** *Фундаментальная система решений –* совокупность любых линейно независимых решений.

Пример Найти фундаментальную систему решений $y'' + y = 0$

Решение

$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$ фундаментальная система решений

Уравнение имеет и другие фундаментальные решения, например $y_1 = k\cos x, \quad y_2 = k\sin x$

- Определение Линейное однородное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – действительные числа

называется ***линейным однородным уравнением n–го порядка с постоянными коэффициентами***.

Решения уравнения (1) будем искать в виде

$$y = e^{\lambda x}$$, где λ – постоянная

Левая уравнения (1) называется **линейным дифференциальным оператором** и обозначается

$$L(y) = 0$$

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

- 1.Постоянный множитель можно выносить за знак оператора.

$$L(ky) = k \cdot L(y)$$

- 2. Оператор от суммы двух функций равен сумме операторов от этих функций

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

- 3. Если решение однородного линейного уравнения

$$L(y_1) = 0$$

то $y = Cy_1$ - тоже решение, т.е $L(Cy_1) = 0$

ПУСТЬ $y = e^{\lambda x}$ решение линейного ДУ

Имеем: $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$,

$$y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}, \quad \ldots,$$

$$y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}.$$

Подставляем $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (1) и получаем:

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0,$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0.$$

характеристическое уравнение

А его корни - *характеристические числа*

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

- Рассмотрим линейное однородное уравнение 2-го порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (1)

Теорема

Если $y_1\ y_2\ \ldots\ y_n$ - фундаментальная система решений уравнения (1)

то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ - общее решение

✔ Замечание Всякое частное решение однородного линейного уравнения – линейная комбинация частных решений, составляющих фундаментальную систему решений.

✔ Замечание Уравнение (1) не может иметь более чем n линейно независимых частных решений.

Пусть $L(y) = f(x)$ линейное неоднородное уравнение

Пусть нашли частное решение $L(y_1) = f(x)$

Введем новую функцию $y = y_1 + z$ $L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) = f(x)$

$L(z) = 0$ однородное уравнение, соответствующее неоднородному

$y = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n$ общее решение неоднородного уравнения

$y_1 + y_2$ тоже частное решение $L(y) = f_2(x)$ $L(y) = f_1(x)$

- **Пример**

$y'' + 2y = 2 + 3e^x$

$y'' + 2y = 2$ $y'' + 2y = 3e^x$

$y = 1$ $y = e^x$ $y = 1 + e^x$ частные решения

- Структура общего решения линейного неоднородного уравнения:
  - частное решение этого уравнения
  - общее решение однородного уравнения

Алгоритм

- Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1 e^{\lambda-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

- Находим корни характеристического уравнения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

По характеру корней выписываем частные линейно независимые решения (частных решений будет ровно столько, каков порядок линейного дифференциального уравнения)

$$\lambda^N + A_1 \cdot \lambda^{N-1} + \ldots + A_{N-1} \cdot \lambda + A_N = 0 .$$

Замечания

1)характеристическое уравнение получается из (1) заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

уравнение n-й степени $\Rightarrow$ оно имеет n корней, но

1) каждый корень считается столько раз, какова его кратность;

2)корни могут быть комплексными (причем, комплексные корни попарно сопряжены).

ТЕОРЕМА

Пусть λ *– характеристический корень уравнения* (1). *Тогда*

1) *если* λ *– простой корень уравнения , то решением является функция*

$$e^{\lambda x};$$

2) *если* λ *– корень кратности* k *уравнения* (1) *, то решениями уравнения* (1) *являются функции*

$$e^{\lambda x},\ x\cdot e^{\lambda x},\ x^2\cdot e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}\cdot e^{\lambda x};$$

3) *если* $\lambda=\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$ *и* λ *– простой комплексный корень уравнения* (1), *то* $\bar{\lambda}=\alpha-\beta i$ *тоже является простым корнем уравнения* (1), *а решениями уравнения* (1) *являются функции*

$$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x\ ,\quad e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x\ ;$$

4) *если* $\lambda=\alpha+\beta i$ *и* λ – комплексный *корень кратности* k *уравнения* (1), *то* $\bar{\lambda}=\alpha-\beta i$ *тоже является корнем кратности* k *уравнения* (1), *а решениями являются функции*

$$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad\ldots,\quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\quad\ldots,\quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x\ .$$

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ N-ГО ПОРЯДКА

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) .$$

Если известно общее решение соответствующего ЛОДУ

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 ,$$

Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n ,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что РЕШЕНИЕ ЛНДУ ПО СТРУКТУРЕ совпадает с решением соответствующего ЛОДУ, т.е. имеет вид

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 + \ldots + C_n(x) \cdot y_n ,$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые функции.

ТЕОРЕМА (О СТРУКТУРЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛНДУ)

Общее решение ЛНДУ n–го порядка равно сумме общего решения соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения ỹ(x) неоднородного уравнения, т.е. имеет вид

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x) ,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ –решения, соответствующего ЛОДУ

ПРИМЕР

Решить задачу Коши

$$y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 7.$$

Решение. Составим сначала характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 6x + 9 = 0.$$

Это уравнение имеет два совпавших корня $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Следовательно, общим решением исходного дифференциального уравнения является функция

$$y = e^{3x}(c_1 + c_2 x).$$

Вычислим производную этой функции:

$$y' = e^{3x}(3c_1 + c_2 + 3c_2 x).$$

ЛИНЕЙНОЕ ОДНОРОДНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

- характеристическое уравнение $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

Два различных действительных корня $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

один корень $y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x}$

комплексно сопряженные корни $y = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x).$

ВИД ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

- 1. Если корни характеристического уравнения - вещественные и различные λ_k

$C_k e^{\lambda_k x}$ общее решение однородного уравнения

- 2. Если корни характеристического уравнения $\lambda_k = a \pm ib$

корни комплексные

$e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$ общее решение однородного уравнения

ВИД ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

- 3. Если корни характеристического уравнения - вещественные и кратные λ_k k кратный корень

$P_{k-1}(x)e^{\lambda_1 x}$ общее решение однородного уравнения

- 4. Если корни характеристического уравнения $\lambda_k = a \pm ib$

корни комплексные k кратный корень

$e^{ax}\left(P_{k-1}(x)\cos bx + Q_{k-1}(x)\sin bx\right)$ общее решение однородного уравнения

ПРИМЕР

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$$

- Решение однородного уравнения $z = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

- частное решение ищем в виде $y = Ax^2 + Bx + C$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2$$

общее решение неоднородного уравнения

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

- Правая часть $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$

α - не является корнем характеристического уравнения

$y = Q_m(x)e^{\alpha x}$ вид общего решения неоднородного уравнения

α корень кратности k

$y = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}$ вид общего решения неоднородного уравнения

- Правая часть $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos bx + P_{1m}(x)\sin bx\right)$

$a + ib$ - не является корнем характеристического уравнения

$$y = e^{\alpha x}\left(Q_{1m}(x)\cos bx + Q_{2m}(x)\sin bx\right)$$

вид общего решения неоднородного уравнения

- Правая часть $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos bx + P_{1m}(x)\sin bx\right)$

$a + ib$ - является корнем характеристического уравнения

кратности k

$$y = x^k e^{\alpha x}\left(Q_{1m}(x)\cos bx + Q_{2m}(x)\sin bx\right)$$

вид общего решения неоднородного уравнения