



# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ «ХИЩНИКИ- ЖЕРТВЫ»

---

# Материальные и информационные модели

---

- 1. **Биологические предметные модели**, служат для изучения общих биологических закономерностей, действий различных препаратов, методов лечения. К этому типу моделей относятся лабораторные животные, изолированные органы, культуры клеток. Этот вид моделирования, самый древний и играет большую роль в современной науке (первые полеты в космос, испытание новых лекарств и т. д.)

- 
- **2. Физические (аналоговые) модели**  
– это физические системы или устройства, которые обладают аналогичным с моделируемым объектом поведением. Физическая модель может быть реализована в виде некоторого механического устройства или в виде электрической цепи. Например, процесс движения крови по крупным сосудам может быть смоделирован электрической цепью из конденсаторов и сопротивлений.

- 
- **3. Кибернетические модели** – это различные устройства, в составе которых имеется блок управления – чаще всего компьютер, который моделирует информационные процессы в живом организме, среди которых самый распространенный – это управление. (Например, управление движением руки, всего тела или управление величиной зрачка). Сложность таких кибернетических моделей разная, вплоть до “искусственного интеллекта”, являющегося кибернетической моделью мозга человека.

- 
- 
- **4. Математическая модель** – это система математических соотношений – формул, уравнений, неравенств и т.д., отражающих существенные свойства объекта или явления.

# Этапы математического моделирования

---

- **1 этап**: создание основы математической модели. При этом нужно-
- а) накопить экспериментальные данные о процессах в изучаемой системе,
- б) составить уравнение или систему уравнений, описывающих закономерную связь данных.

- 
- 
- **2 этап: проверка и корректировка модели. При этом необходимо:**
  - а) определить численные значения коэффициентов и задать начальные условия,
  - б) решить систему уравнений,
  - в) сравнить полученное решение с данными эксперимента, выявить несоответствия, выяснить их причины,
  - г) ввести поправки в математическую модель.

- 
- 
- **3 этап**: исследование математической модели, т.е. использование ее в практических целях
  - Конечной целью этого этапа является получение новой информации об исследуемом объекте.

# Математическая модель “хищники - жертвы”

---

- Впервые в биологии математическая модель периодического изменения числа особей антагонистических видов животных предложил итальянский математик **В. Вольтерра** с сотрудниками. Модель, предложенная Вольтерра, явилась развитием идеи, намеченной в 1924 году **А. Лоттки** в книге “Элементы физической биологии”. Поэтому данная классическая модель известна как “**модель Лоттки-Вольтерра**”.

# Исходная задача

---

- В некотором, экологически замкнутом районе, живут два вида животных (например, рыси и зайцы). Рыси (хищники) могут питаться только зайцами.

# Исходная задача

---

- Зайцы (жертвы) питаются растительной пищей, имеющейся всегда в достаточном количестве (в рамках данной модели не учитывается ограниченность ресурсов растительной пищи).

# Исходная задача

---

- Необходимо определить, как будет меняться численность жертв и хищников с течением времени в такой экологической системе.

# Составление дифференциальных уравнений

---

- Обозначим число жертв через  **$N$** ,
- а число хищников через  **$M$** .
- Числа  **$N$**  и  **$M$**  являются **функциями времени  $t$** .

# В нашей модели учтем следующие факторы:

---

- Естественное размножение жертв
- Естественная гибель жертв
- Уничтожение жертв за счет поедания их хищниками
- Естественное вымирание хищников
- Увеличение числа хищников за счет размножения при наличии пищи.

- 
- 
- Так как речь идет о математической модели, то задачей является получение уравнений, в которые бы входили все намеченные факторы и которые описывали бы динамику, т.е. изменение числа хищников и жертв со временем.

- 
- Пусть за некоторое время  $\Delta t$  количество жертв и хищников изменится на  $\Delta N$  и  $\Delta M$ . Изменение числа жертв  $\Delta N$  за время  $\Delta t$  определяется, во-первых, увеличением в результате естественного размножения (которое пропорционально количеству жертв);

$$(\Delta N)_1 = A N \Delta t$$

---

- $(\Delta N)_1 = A N \Delta t$

где **A** - коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость размножения жертв в данных условиях.

- 
- Во-вторых, имеет место уменьшение числа жертв из-за естественного вымирания, тоже пропорциональное их числу в данный момент:

$$(\Delta N)_2 = - B N \Delta t$$

знак минус отражает именно уменьшение.

- 
- 
- В основе вывода уравнения, описывающего уменьшение числа жертв из-за поедания их хищниками лежит идея о том , что чем чаще происходят их встречи , тем быстрее уменьшается число жертв.

- 
- Частота встреч хищника с жертвой пропорциональна и числу жертв и числу хищников, т.е. их произведению **M·N**

- 
- Поэтому можно записать:

$$(\Delta N)_3 = - C \cdot M \cdot N \cdot \Delta t$$

Здесь коэффициент **C** характеризует частоту встреч жертвы с хищником.

- 
- 
- В итоге с учетом всех трех факторов для изменения числа жертв можно записать следующее уравнение:

$$\Delta N = A \cdot N \cdot \Delta t - B \cdot N \cdot \Delta t - C \cdot M \cdot N \cdot \Delta t$$

- 
- Поделив левую и правую часть уравнения на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение первого порядка:  
$$\mathbf{dN/dt = A \cdot N - B \cdot N - C \cdot M \cdot N}$$

- 
- 
- Отметим, что левая часть уравнения является по смыслу “скоростью изменения числа жертв”, так как определяется как “изменение числа жертв  $\Delta N$  за единицу времени  $\Delta t$ .”

- 
- 
- Для того, чтобы решить это уравнение, нужно знать, как меняется число хищников  **$M$**  со временем.

- 
- Изменение числа хищников  **$\Delta M$**  определяется увеличением из-за естественного размножения при наличии достаточного количества пищи  **$\Delta M_1 = Q \cdot N \cdot M \cdot \Delta t$**

И уменьшением из-за естественного вымирания хищников

$$\Delta M_2 = -P \cdot M \cdot \Delta t$$

- 
- В итоге с учетом двух факторов для изменения числа хищников можно записать следующее уравнение:

$$\Delta M = Q \cdot N \cdot M \cdot \Delta t - P \cdot M \cdot \Delta t$$

- 
- Поделив левую и правую часть уравнения на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение первого порядка  
$$\mathbf{dM/dt} = \mathbf{Q \cdot M \cdot N - P \cdot M}$$

## Уравнения математической модели

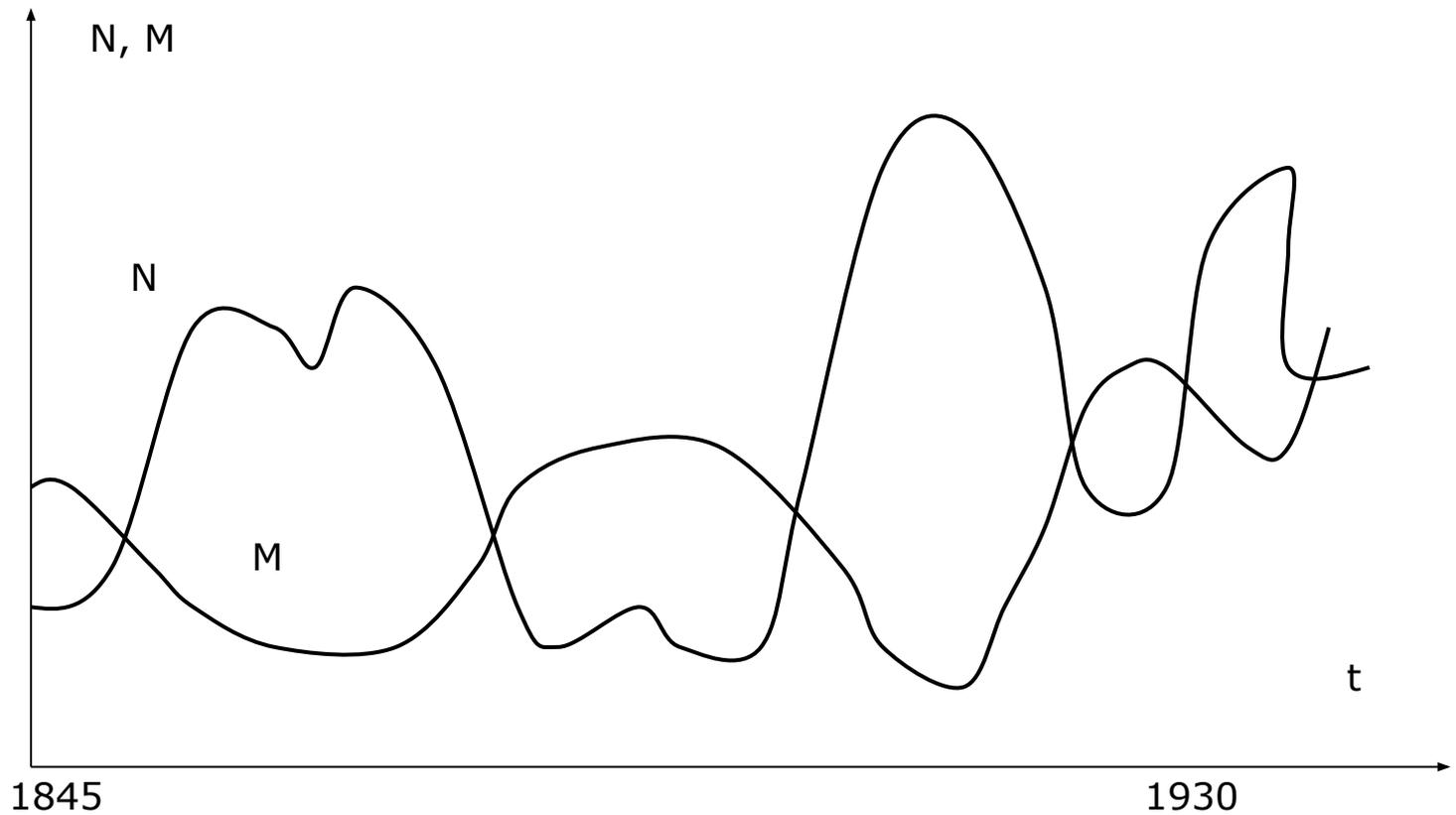
---

- **$dN/dt = A \cdot N - B \cdot N - C \cdot M \cdot N$**
- **$dM/dt = Q \cdot N \cdot M - P \cdot M$**

- 
- 
- Данные дифференциальные уравнения представляют собой математическую модель “хищники - жертвы”. Достаточно определить значения коэффициентов **A, B, C, Q, P** и математическую модель можно использовать для решения поставленной задачи.

# Проверка и корректировка математической модели

---

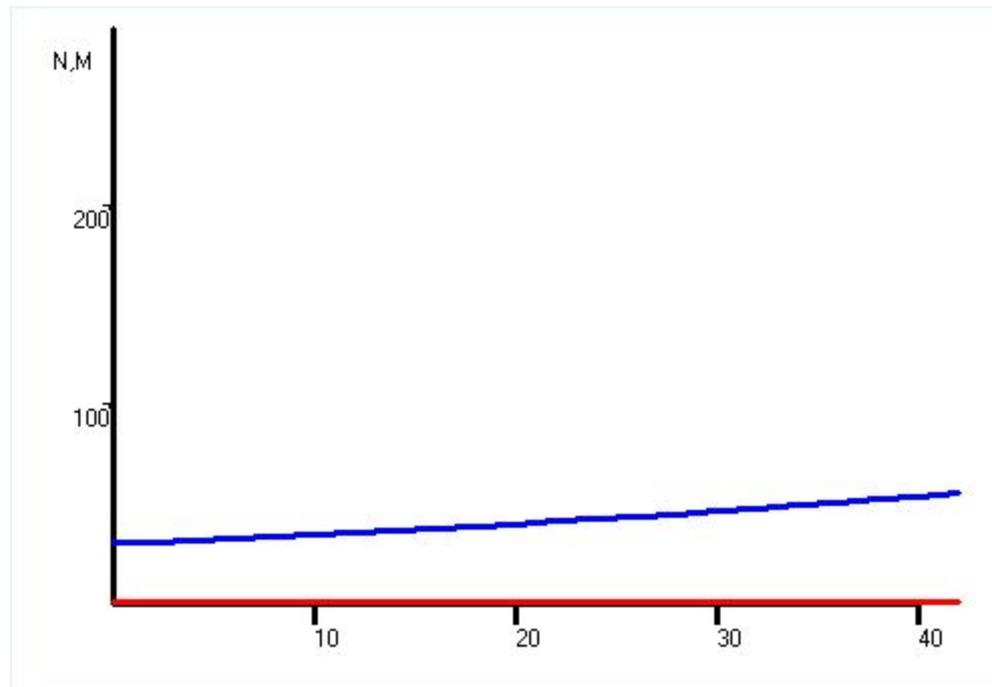


**1 уровень-** в модели учтено для “жертв” только их естественное размножение. Хищники отсутствуют.

---

$$dN/dt = A \cdot N$$

$$dM/dt = 0, \quad M = 0$$

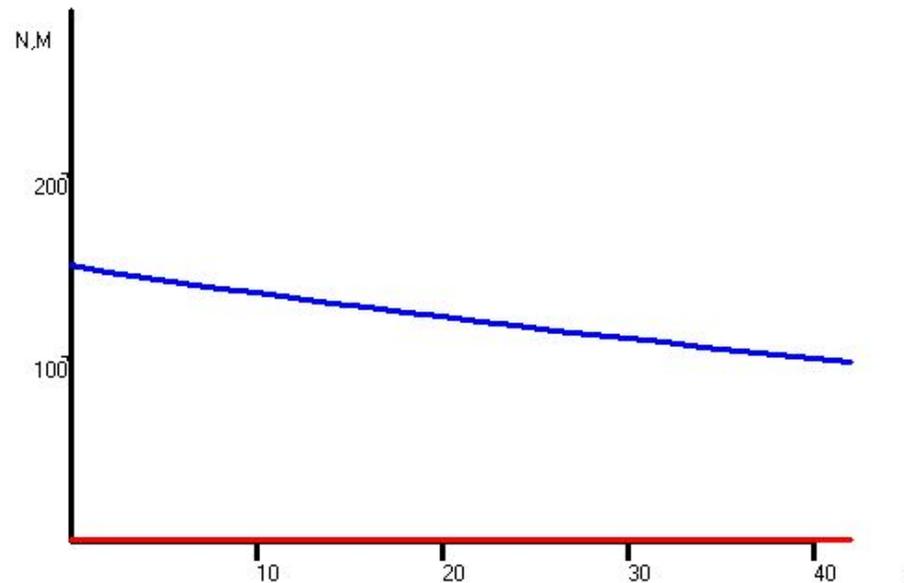


**2 уровень** - в модели учтены для “жертв” их естественное вымирание. Хищники отсутствуют.

---

$$dN/dt = -B \cdot N$$

$$dM/dt = 0, \quad M=0$$

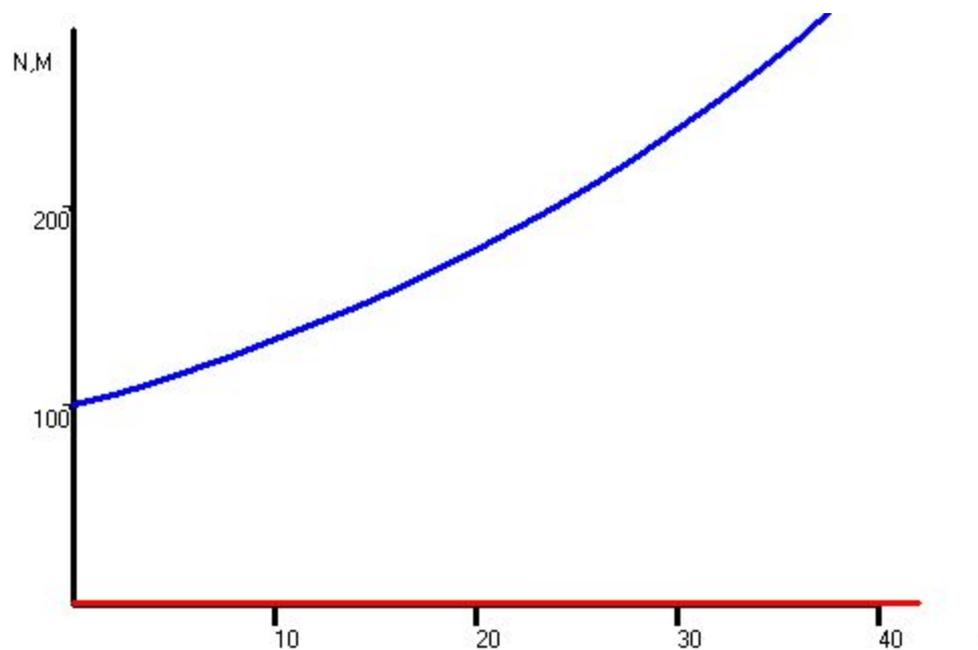


**3 уровень** - в модели учтены для “жертв” их естественное размножение и вымирание.  
Хищники отсутствуют

---

$$dN/dt = A \cdot N - B \cdot N$$

$$dM/dt = 0, \quad M = 0$$

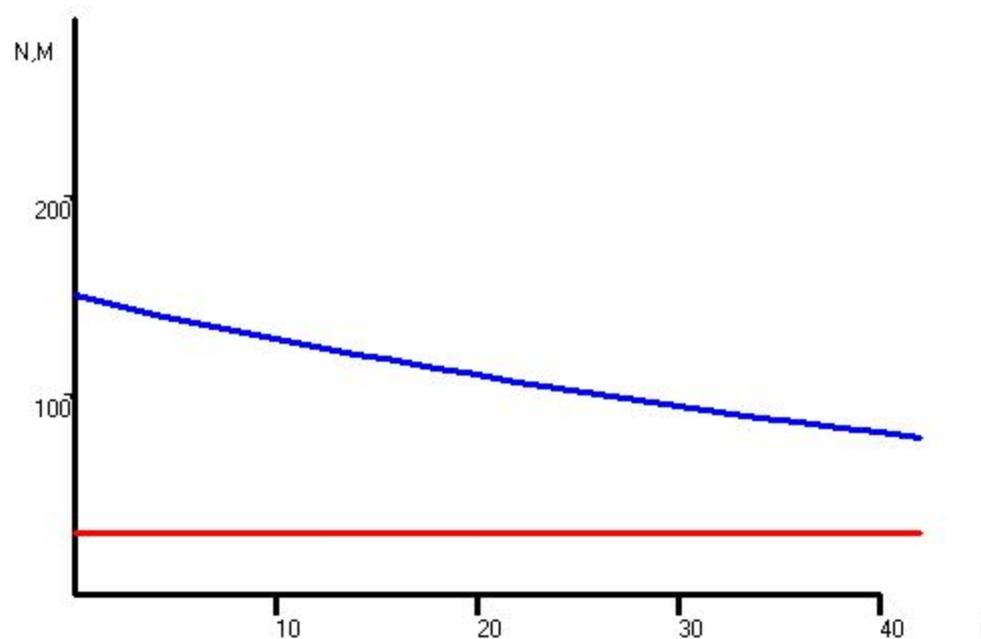


**4 уровень** - в модели учтены для “жертв” их естественное размножение и вымирание, а так же поедание “хищниками”, но число “хищников” считается неизменным

---

$$dN/dt = A \cdot N - B \cdot N - C \cdot M \cdot N$$

$$dM/dt = 0, \quad M = 30$$

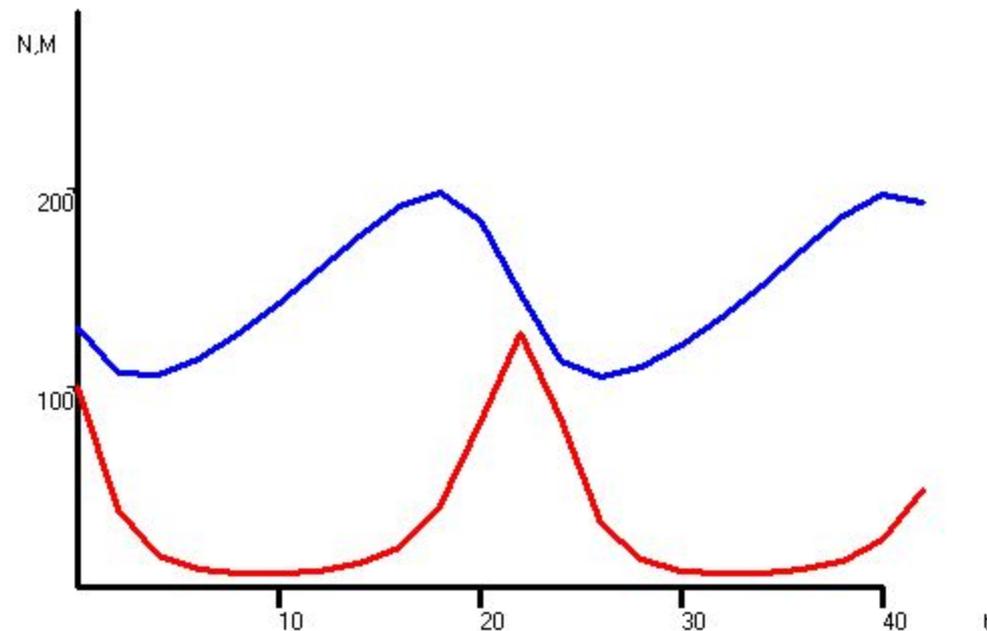


**5 уровень** - в модели учтены все  
обсуждавшиеся ранее факторы

---

$$dN/dt = A \cdot N - B \cdot N - C \cdot M \cdot N$$

$$dM/dt = Q \cdot N \cdot M - P \cdot M$$





---

Спасибо  
за внимание!