Лекція 11. Статичне електричне поле

1. Заряди.
2. Взаємодія між зарядами.
3. Електричне поле.
4. Застосування теореми Остроградського-Гауса.
5. Робота сил електричного поля.

Заряди

- Ми знаємо про явище електризації, про існування електричного заряду, про наявність двох видів зарядів (умовно додатних та від'ємних) та взаємодії між ними.
- Заряди – невід'ємна частина переважної більшості елементарних частинок. Вони строго однакові за величиною і дорівнюють елементарному заряду. Якщо кількість позитивних і негативних зарядів однакова, тіло незаряджене. Коли інакше, різниця кількості цих зарядів визначає заряд тіла. Можна розвести заряди в різні боки. Тоді окремі частини тіла будуть заряджені. Загальний заряд тіла кратний елементарному заряду: $q = Ne$. Електричні заряди виникають і зникають попарно, а сумарний заряд залишається незмінним (закон збереження заряду).

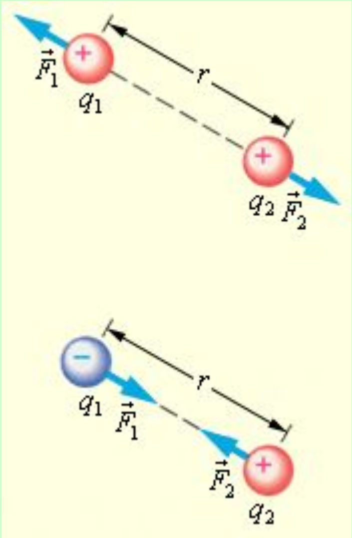
Заряди

- Якщо заряди вільно переміщуються по тілу, то це тіло є провідником. Проте, носіями струму можуть бути як електрони так і іони, тобто атоми чи молекули, які втратили чи приєднали один чи кілька електронів.
- У відповідності зі здатністю тіла проводити струм всі речовини поділяються на діелектрики (ізолятори), напівпровідники і провідники.
- Ідеальних діелектриків немає, реальні діелектрики проводять струм в $10^{15} \div 10^{20}$ раз гірше, ніж провідники.
- Напівпровідники займають проміжний стан.

Взаємодія між зарядами

Закон взаємодії встановлений в 1785 р. Кулоном. Він знайшов

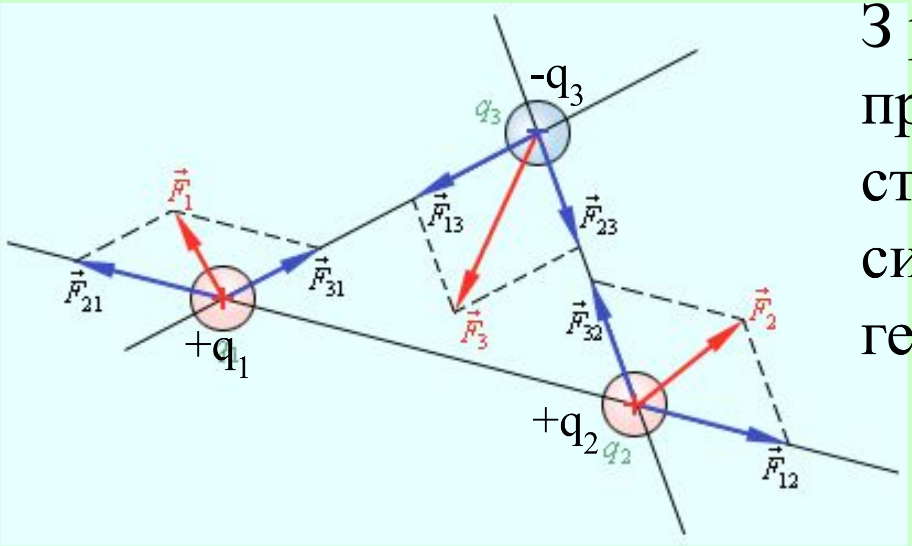
$$f = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



Якщо f > 0, маємо відштовхування, а при f < 0 – притягання.

Знаючи закон для точкових зарядів, можна знайти силу взаємодії між тілами. Для цього розбиваємо тіло на елементи заряду *dq* і інтегруємо по об'єму.

Взаємодія між зарядами



З рисунка випливає, що при наявності лише електро-статичної взаємодії така система зарядів має нестійку геометрію.

Заряд

- Оскільки за часів Кулона не було одиниці електричного заряду, можна було вибрати її так, щоб $k = 1$. Це така величина зарядів ($q_1 = q_2$), яка на відстані 1 см діє з силою 1 дина = 10^{-5} Н (система СГСЕ). В цій системі елементарний заряд має величину $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ од. зар. СГСЕ.
- При переході до системи СІ, де електричні і магнітні величини знаходять із закону взаємодії провідників зі струмом, одиницею заряду є 1 Кулон, величина

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9, \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$$

При цьому 1 Кл = $3 \cdot 10^9$ од. СГСЕ, елементарний заряд $e = 1{,}60217733 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Електричне поле

- Взаємодія між зарядами здійснюється через електричне поле. Поле виявляється тим, що на вміщений в нього заряд діє сила. Заряд, з допомогою якого досліджують поле, називається пробним. Тоді

$$\vec{f} = q_{пр}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Коли $q_{пр}$ різні, то різна і сила f. Проте, величина $f/q_{пр}$ залишається постійною і визначає електричне поле в точці.

Тому $E = \dfrac{f}{q_{пр}}$ - напруженість електричного поля.

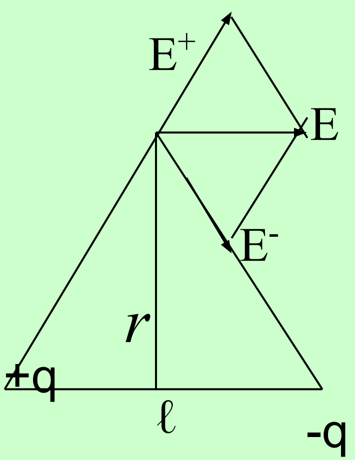
Електричне поле

- Напрям вектора $\vec{E}$ збігається з напрямом сили, що діє на заряд q, поміщений в поле: $\vec{f} = q\vec{E}$
- Поле від багатьох зарядів складається за правилом векторного складання $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$
- Скористаємось цим правилом для знаходженні поля диполя – системи двох однакових за величиною і протилежних за напрямом полів.

Електричне поле диполя

- Знайдемо залежність напруженості електричного поля диполя в залежності від відстані r на лінії, рівновіддаленій від зарядів. В цьому випадку

$$E^{+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)}, \quad \frac{E}{E^{+}} = \frac{\ell}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}} \Rightarrow E = \frac{q\ell}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$$



Враховуючи, що дипольний момент $p = q\ell$ і те, що на великих відстанях

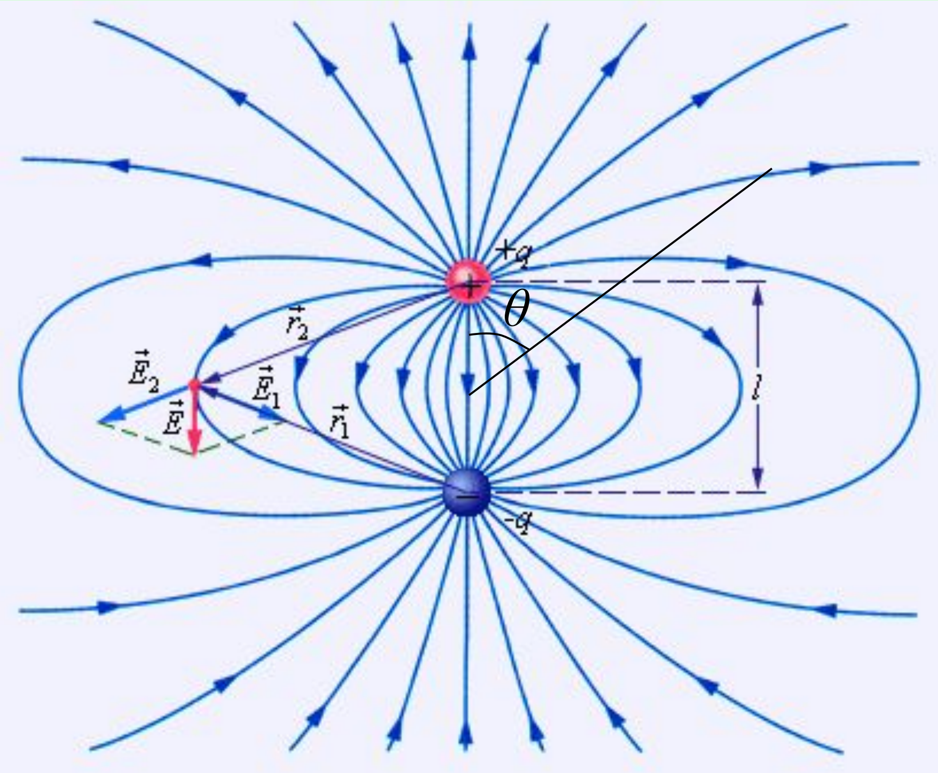
$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = r$$

знаходимо $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

Силові лінії електричного диполя

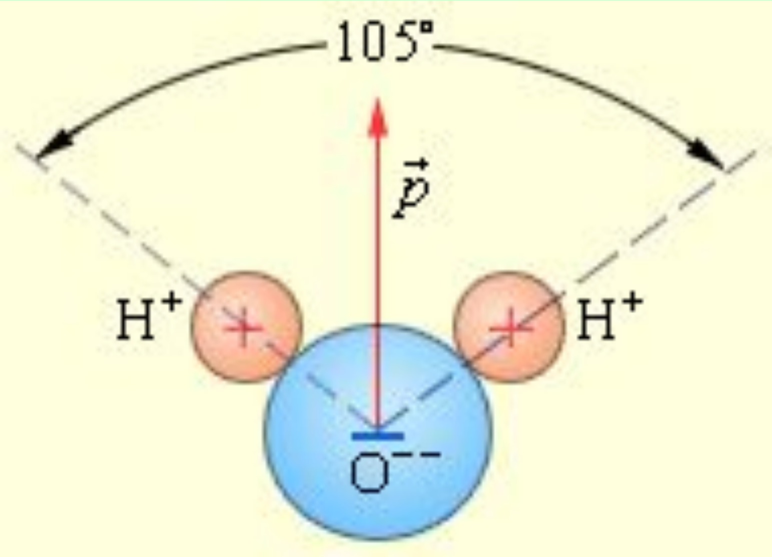
Для довільного напрямку величина електричного поля визначається за формулою

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}$$



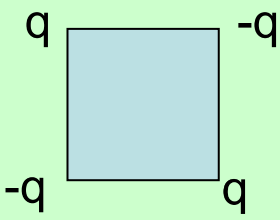
Дипольний момент молекули

Реальні молекули можуть мати дипольні моменти внаслідок того, що на атомах, що входять до складу молекули є заряди.



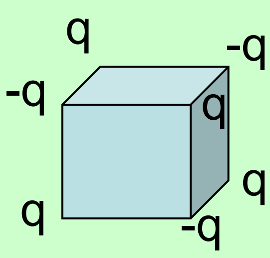
Електричне поле мультиполів

- Розглянемо 4 однакових за абсолютною величиною заряди на вершинах квадрата. В цьому випадку на великих відстанях напруженість поля



$$E = \frac{q\Box^2}{r^4}, \ \ q\Box^2 - \textit{квадрупольний момент}$$

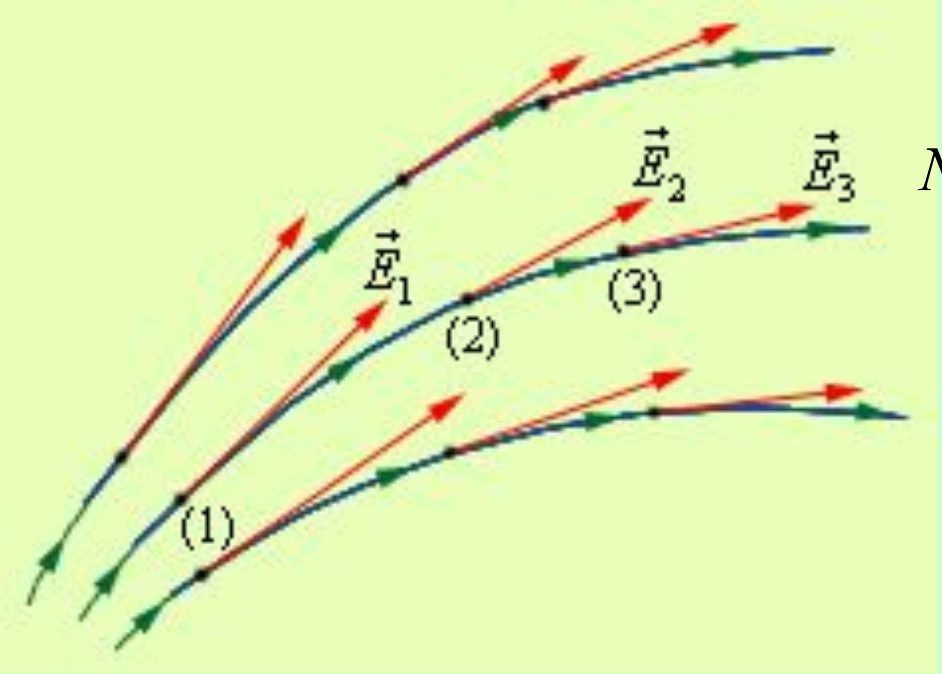
Конструкція з 8 зарядів на вершинах куба називається октуполем. В цьому випадку



$$E = \frac{q\Box^3}{r^5}, \ \ q\Box^3 - \textit{октупольний момент}$$

Силові лінії електростатичного поля

Сукупність векторів $\vec{E}$ в просторі утворює поле вектора напруженості. Тому можна електричне поле описати за допомогою ліній $\vec{E}$. Дотична до ліній визначає напрям поля, густота ліній – величину $\vec{E}$. Повне число ліній, що перетинає поверхню радіуса r



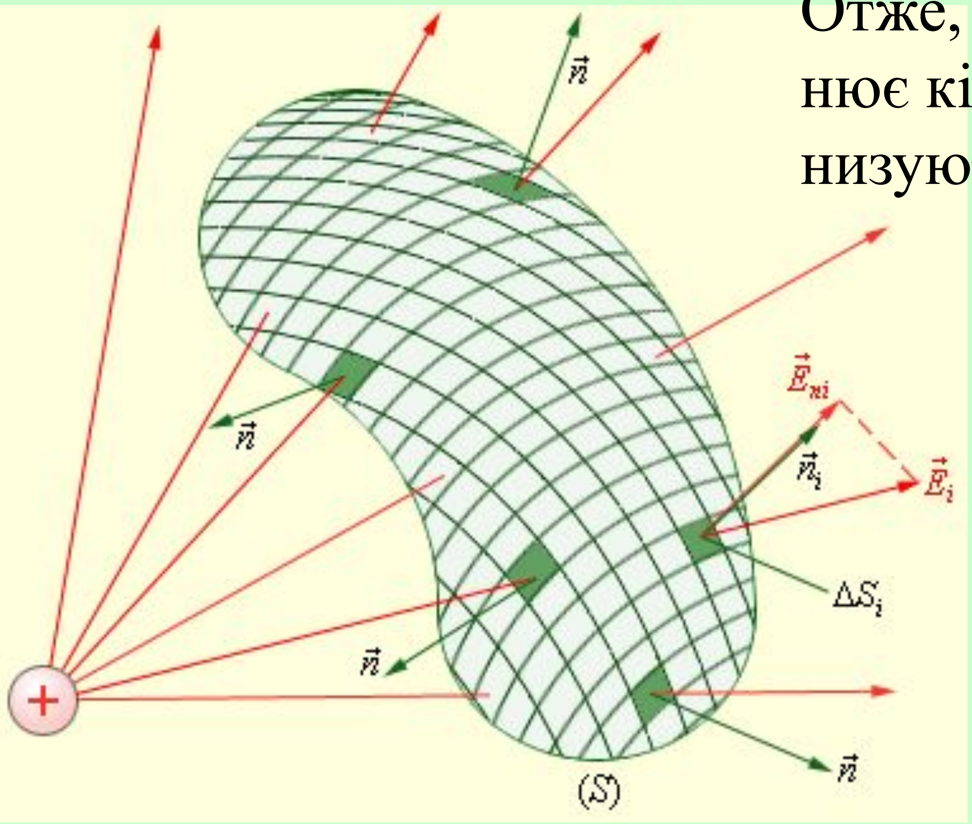
$$N = ES = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

не залежить від r.

Потік через замкнуту поверхню

Кількість ліній, що пронизує площадку dS:

$$EdS\cos\alpha = E_n dS, \;\Rightarrow\; N = \int_S E_n dS = \Phi$$



Отже, потік чисельно дорівнює кількості ліній, що пронизують поверхню.

Застосування теореми Остроградського-Гауса

- Згідно з теоремою Остроградського-Гауса

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV ,$$

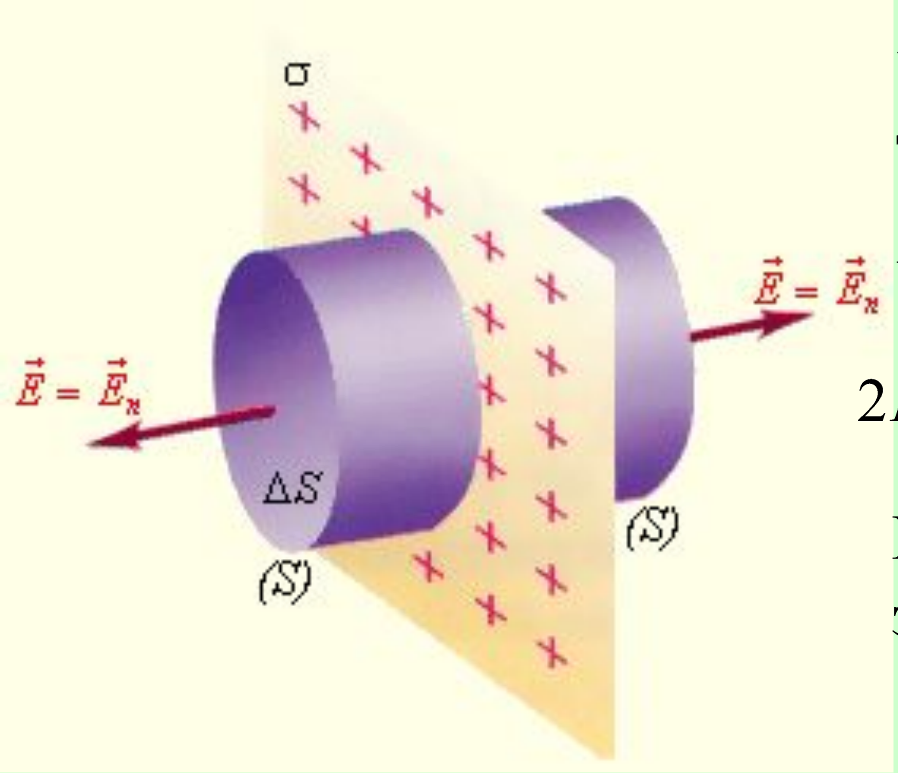
де ρ – об'ємна густина електричного заряду.

Крім об'ємної густини можна ввести поверхневу та лінійну густину

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \ \lambda = \frac{dq}{dl}.$$

Поле рівномірно зарядженої площини

Розглянемо поле рівномірно зарядженої площини, $\sigma = const$. З симетрії випливає, що поле завжди $\perp$ до поверхні. Виріжемо тонкий циліндр $\perp$ до площини.



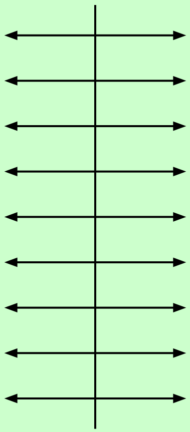
Застосуємо теорему Остроградського-Гауса. Потік через бокові поверхні відсутній, а через 2 основи циліндра 2EdS.

$$2EdS = \frac{dq}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

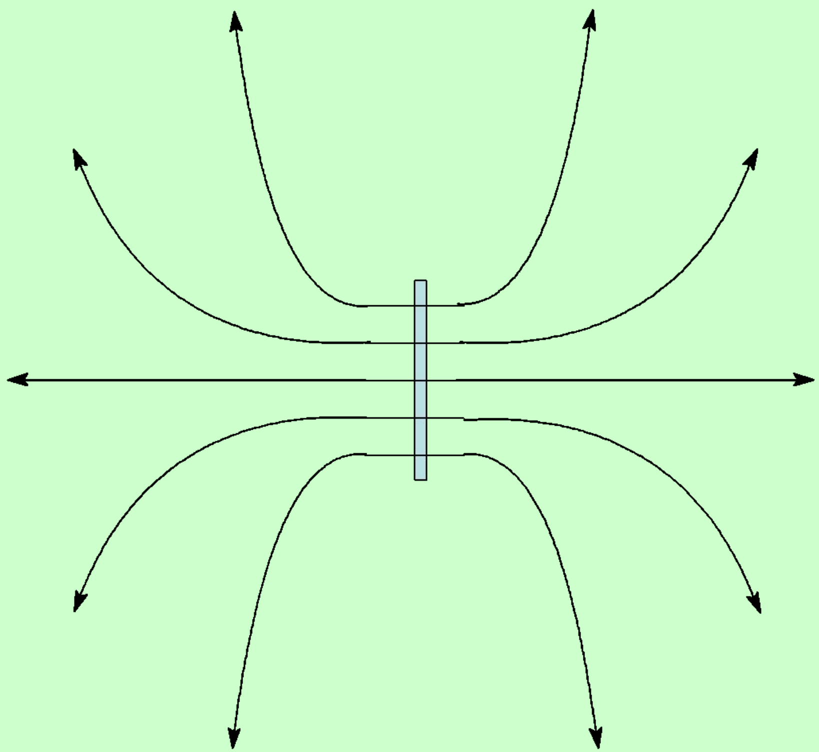
Маємо однорідне поле, не залежить від відстані.

Поле рівномірно зарядженої площини

- Якщо площина має скінченні розміри, то однорідне поле буде лише на малих відстанях.

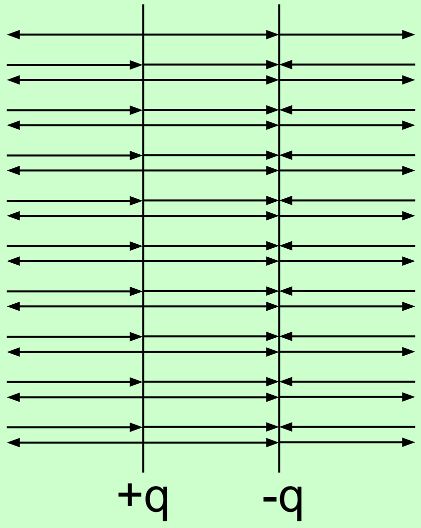


$S \to \infty$



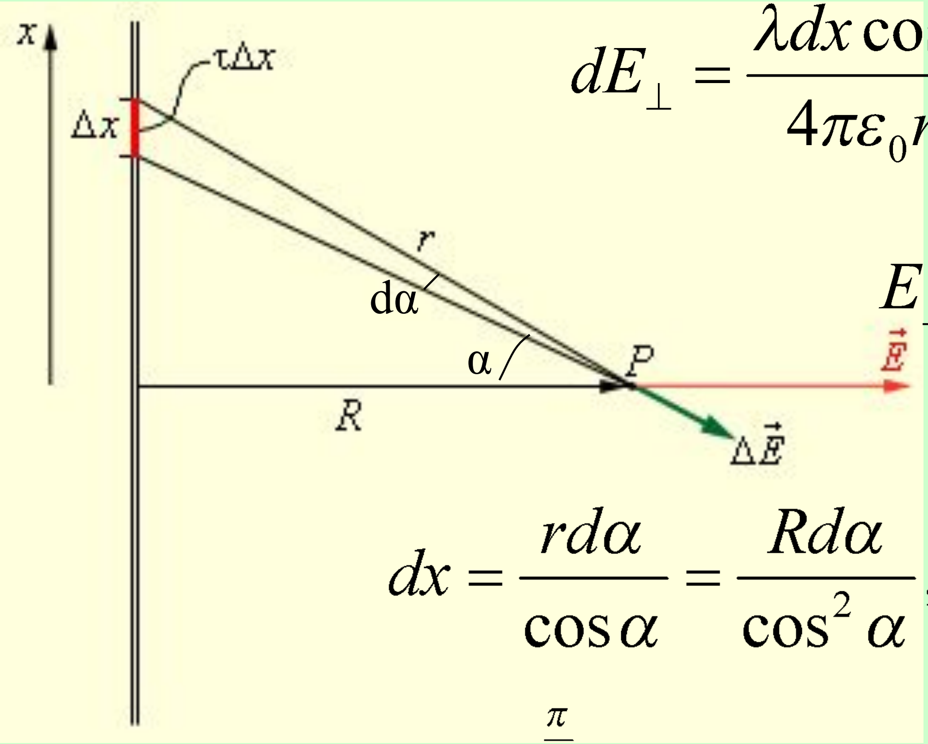
Поле двох рівномірно заряджених площин

- Візьмемо дві паралельні різнойменно заряджені площини.



В цьому випадку між пластинами поля складаються, даючи подвійну напруже-ність, а за межами пластин поля відні-маються, внаслідок чого все поле локалізується між пластинами.

Розрахунок електричного поля зарядженої нитки



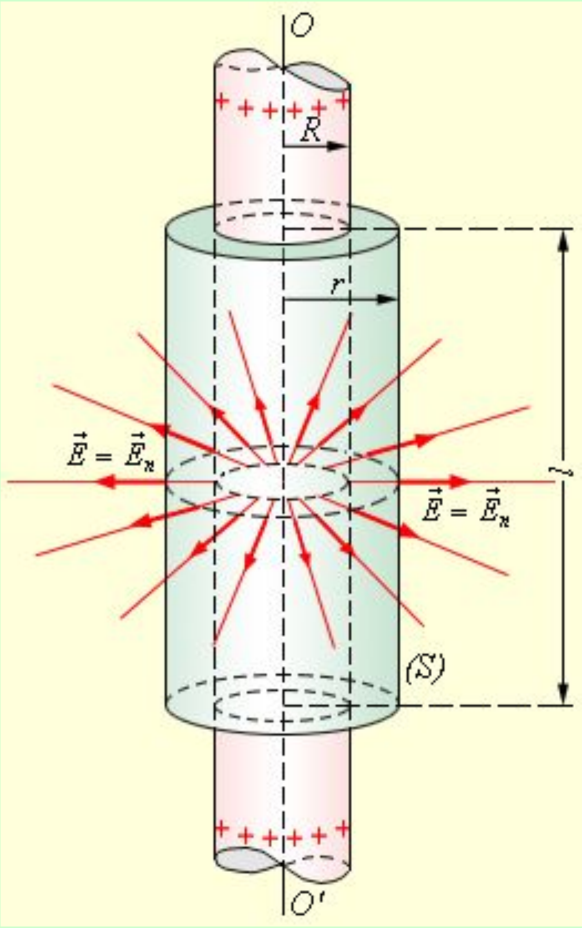
$$dE_\perp = \frac{\lambda dx \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda R dx}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$E_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda R dx}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$dx = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{R d\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad dE_\perp = \frac{\lambda \cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow$$

$$E_\perp = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Поле однорідно зарядженого циліндра



Радіус циліндра R, поверхнева густина заряду σ. З симетрії випливає, що поле завжди ⊥ до осі циліндра.

Замкнемо циліндр коаксіальною поверхнею – циліндром з радіусом *r* і висотою ℓ. Тоді потік

$$E(r)\cdot 2\pi r\ell = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi R\ell}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0}$$

Звідси

$$E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Поле однорідно зарядженого циліндра

- Якщо виберемо циліндр з r < R, то замкнута поверхня не містить всередині зарядів, внаслідок чого $E(r) = 0$.
- На поверхні циліндра (r = R)

$$E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Поле двох коаксіальних циліндрів

- Якщо циліндри мають однакові за величиною, але протилежні за знаком заряди, тоді всередині меншого і зовні більшого циліндра поле відсутнє. Поле є лише між циліндрами:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні

- Сфера радіусу R, поверхнева густина заряду σ. Центральна симетрія. Вектори E проходять через центр сфери.
- Уявимо сферу з радіусом r. Для всіх точок $E_n = E(r)$. При $r > R$ заряд знаходиться всередині.

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

При $r < R$ $E(r) = 0$.

На поверхні $r = R$ $E(R) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Поле двох концентричних поверхонь

- Заряди поверхонь однакові. Все поле між сферами.
- Для $R_1 < r < R_2$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Поле об'ємно зарядженої сфери

- Поле центральної симетрії.

$$\rho = \frac{q}{V} = const.$$

- Зовні сфери результат такий же, як і для сфери з зарядженою поверхнею. Але при $r < R$ всередині виділеної сфери заряд

$$q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

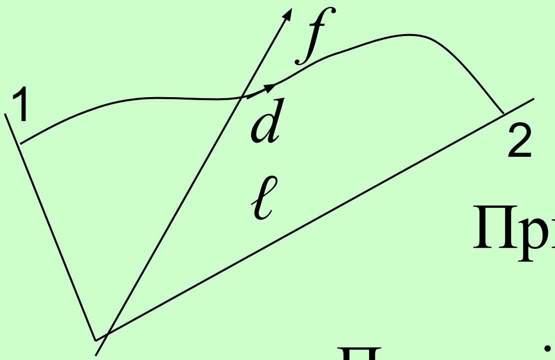
Отже,

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{4\rho\pi r^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{qr}{3V\varepsilon_0} = \frac{qr}{4\pi R^3\varepsilon_0}$$

Робота сил електричного поля

$$dA = f d\ell \cos\alpha = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} d\ell \cos\alpha = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$ - не залежить від шляху.



Робота виконується за рахунок потенціальної енергії: $A_{12} = W_1 - W_2$

При $r \to \infty$ $W \to 0$. Тому $W(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qq'}{r}$

Потенціальна енергія $W = q\varphi$. Дж = Кл·В

Робота сил електричного поля

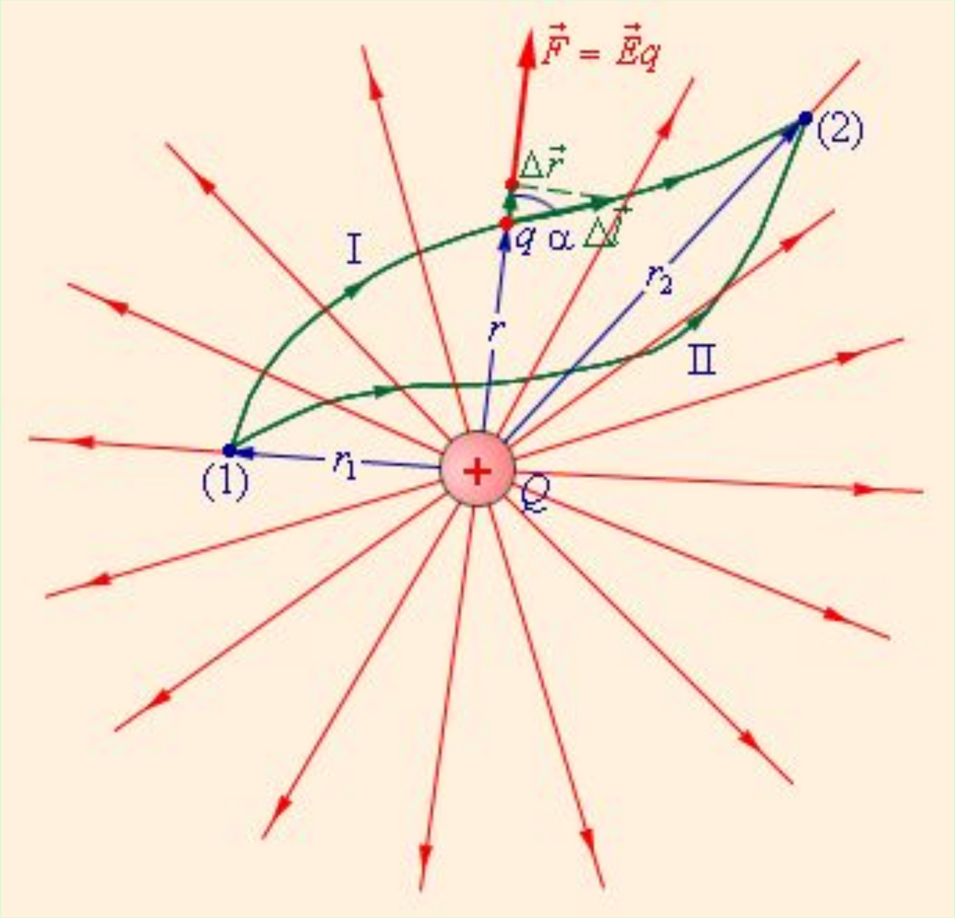
- В фізиці використовується одиниця енергії і роботи
- 1 електрон-вольт (еВ).
- 1 еВ = 1,6·10^{-19} Кл·1 В = 1,6·10^{-19} Дж.
- Кратні величини: кеВ, МеВ, ГеВ, ТеВ тощо.
- Величина kT при кімнатній температурі = 0,025 еВ.

Оскільки $A = \int_1^2 qE_\ell d\ell = q(\varphi_2 - \varphi_1) \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 E_\ell d\ell$

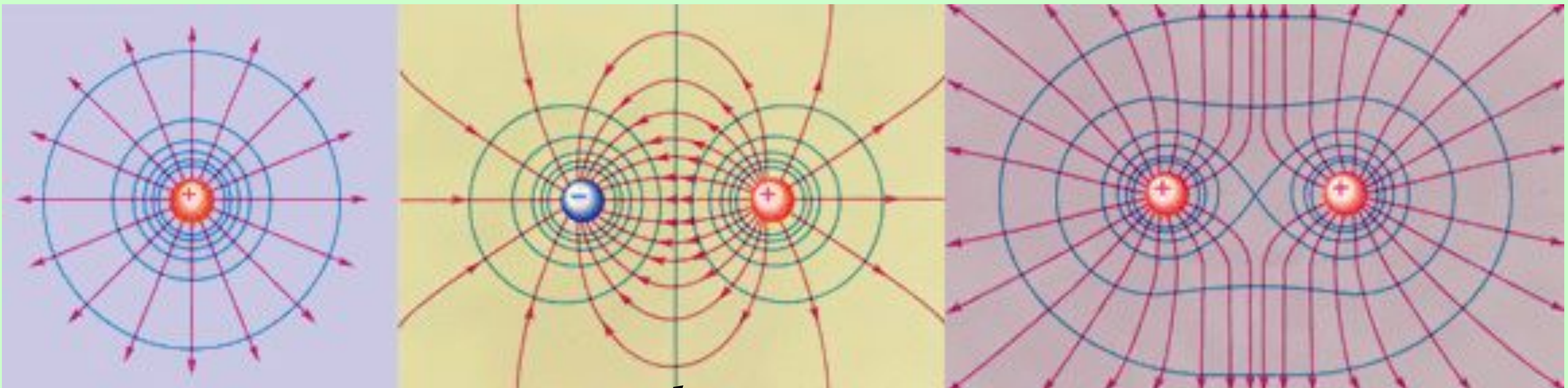
Між двома паралельними поверхнями (в конденсаторі)

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 E_\ell d\ell = E\int_1^2 d\ell = Ed$$

Робота кулонівських сил



Електричне поле і еквіпотенціальні поверхні



a *b* *c*

Еквіпотенціальні поверхні (сині лінії) та силові лінії (червоні лінії) простих електричних полів: a – точковий заряд;
b – електричний диполь; c – два рівні позитивні заряди.
Лінії еквіпотенціальної поверхні завжди перпендикулярні силовим лініям.