Лекція 4. Закон збереження імпульсу та моменту імпульсу

- 1. Центр мас.
- 2. Імпульс замкнутої системи
- 3. Пружний і непружний удари
- 4. Реактивний рух
- 5. Закон збереження моменту імпульсу
- 6. Задача двох тіл
- 7. Рух в полі центральних сил

Центр мас

- Імпульс системи частинок в інерціальній системі відліку К:
$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i \neq 0$$
- Перейдемо до іншої інерціальної системи К’, яка рухається зі швидкістю $\vec{u}$, так щоб $\vec{p}' = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i' = 0$
- Оскільки $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$, то
$$\vec{p}' = \sum_i m_i \left(\vec{\upsilon}_i - \vec{u}\right) = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i - \vec{u} \sum_i m_i = 0$$
- Звідси
$$\vec{u} = \frac{\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i}{\sum_i m_i}$$

Центр мас

- Точка, відносно якої повний імпульс дорівнює нулю, називається центром мас, або центром інерції. Тому u – швидкість центра мас u_{c}.
- Звідси $\vec{r}_c = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$ – координати центра мас.
- Повний імпульс можна подати як добуток повної маси на швидкість центра мас.

$$\vec{p} = M\vec{u}_c = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i$$

Імпульс замкнутої системи

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

- У відсутності зовнішніх сил ($F = 0$) p = const - повний імпульс зберігається.

Пружний і непружний удари

- Замкнена система. Абсолютно непружний удар (тіла злипаються). Маси m_1 і m_2. Швидкості до удару υ_{10} і υ_{20}. Із закону збереження сумарного імпульсу

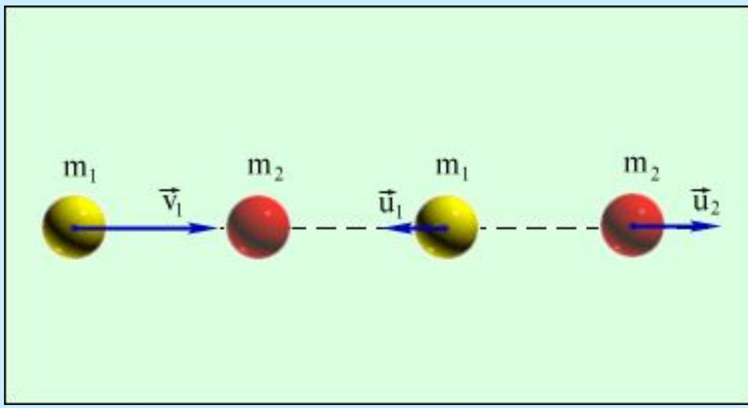
$$m_1\upsilon_{10} + m_2\upsilon_{20} = (m_1 + m_2)\upsilon$$

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_{10} + m_2\upsilon_{20}}{m_1 + m_2}$$

- При цьому енергія не зберігається, оскільки відбулось розсіяння енергії на нагрівання тіл.

Пружний і непружний удари

- Розглянемо абсолютно <u>пружний</u> <u>центральний</u> удар. Із законів збереження енергії та імпульсу



$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_{10}^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_{20}^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} \\ m_1\vec{\upsilon}_{10} + m_2\vec{\upsilon}_{20} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\left(\upsilon_{10}^2 - \upsilon_1^2\right) = m_2\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_{20}^2\right) \\ m_1\left(\boldsymbol{\upsilon}_{10} - \boldsymbol{\upsilon}_1\right) = m_2\left(\boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_{20}\right) \end{cases}$$

$$\left(\boldsymbol{\upsilon}_{10} + \boldsymbol{\upsilon}_1\right) = \left(\boldsymbol{\upsilon}_2 + \boldsymbol{\upsilon}_{20}\right)$$

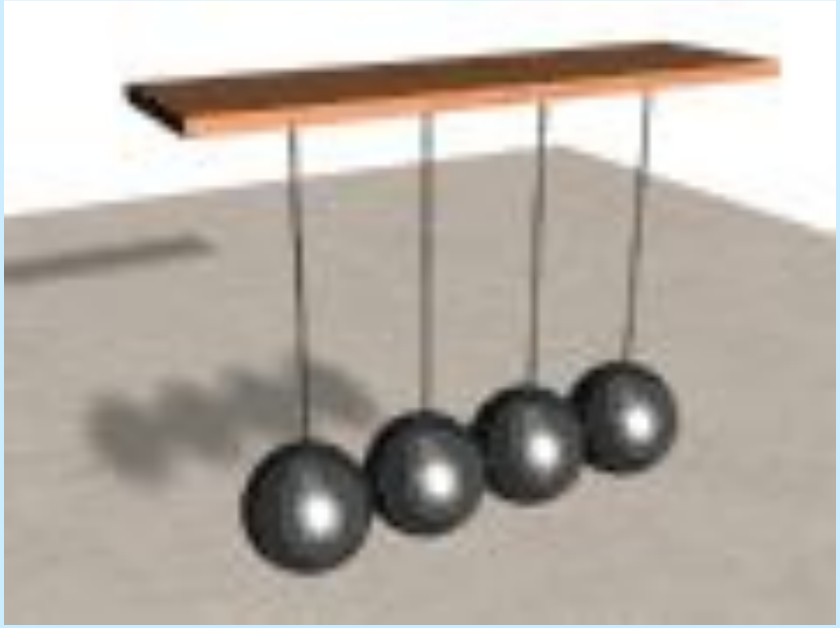
Пружний і непружний удари

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{2m_2\vec{\upsilon}_{20} + (m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_{10}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \frac{2m_1\vec{\upsilon}_{10} + (m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_{20}}{m_1 + m_2}$$

Якщо $m_1 = m_2$, тоді $\upsilon_1 = \upsilon_{20}$ і $\upsilon_2 = \upsilon_{10}$,
зокрема, якщо $\upsilon_{10} = 0$, тоді $\upsilon_2 = 0$.

Пружний удар



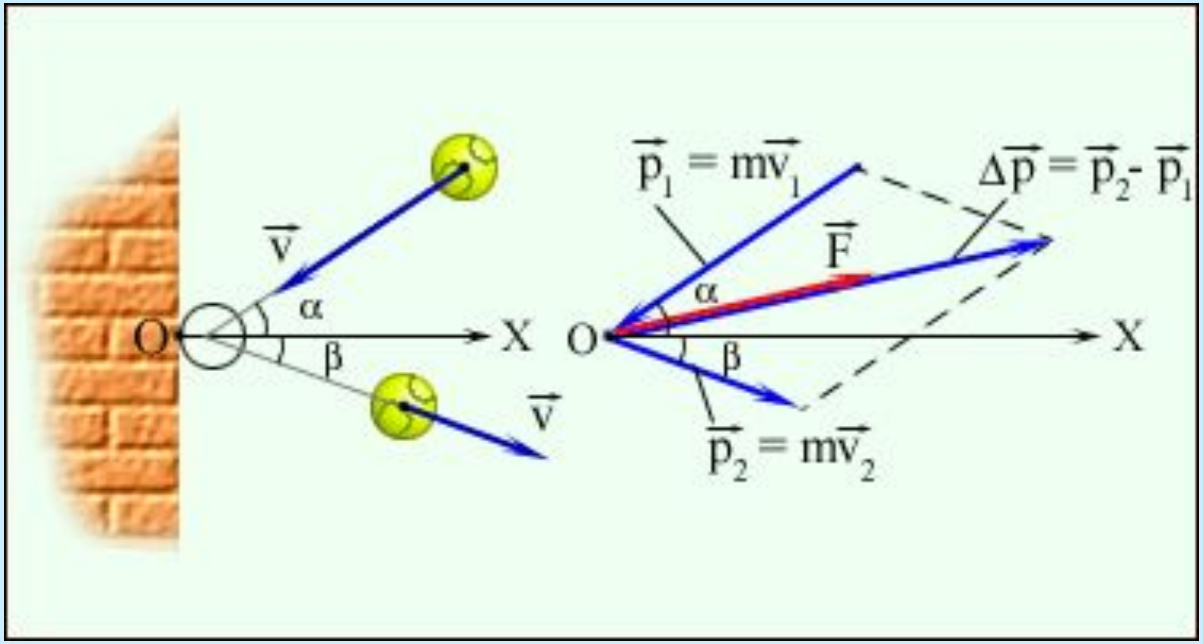
Удар об стінку

- Якщо кулька ударяється об стінку, можна ототожнити стінку з кулькою масою $m \to \infty$. В такому разі

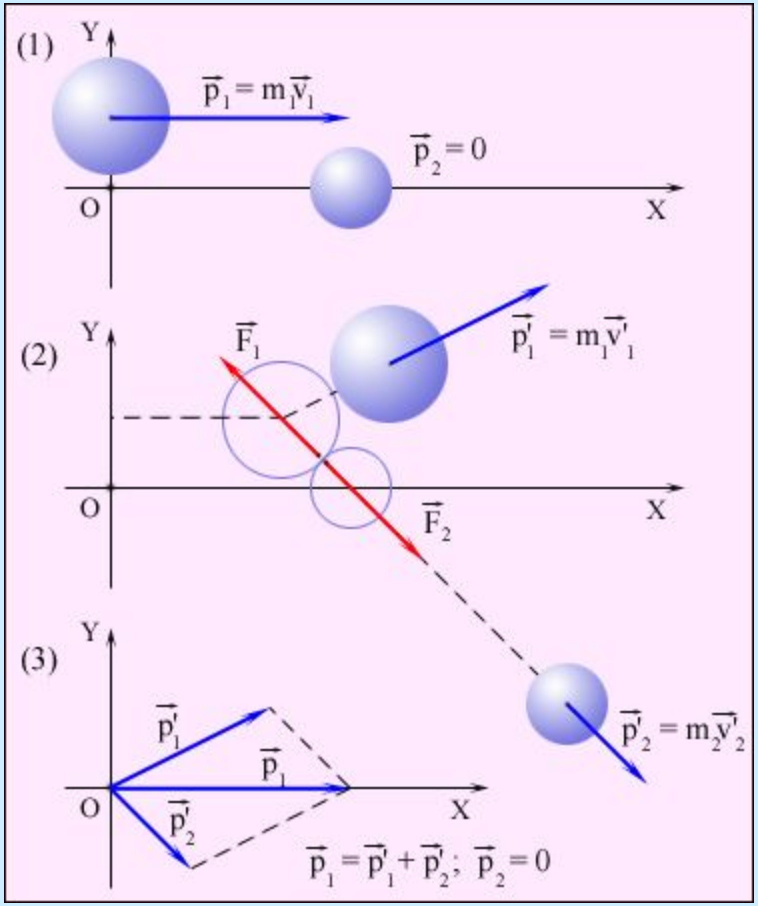
$$\vec{\upsilon}_1 = 2\vec{\upsilon}_{20} - \vec{\upsilon}_{10}, \quad \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{20}$$

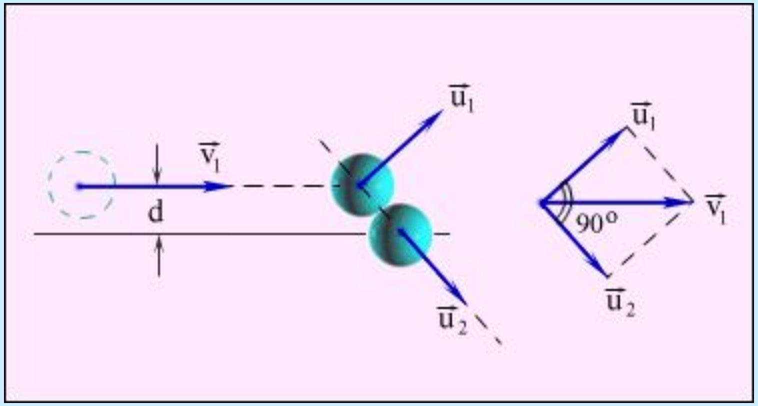
- Якщо стінка стоїть ($\upsilon_{20} = 0$), тоді кулька відбивається назад з тією ж швидкістю.
- Коли стінка рухається назустріч кульці, швидкість кульки зростає на $2\upsilon_{20}$ і зменшується на $2\upsilon_{20}$, якщо стінка тікає від кульки.

Відбивання м’яча від стінки



Співударяння кульок. Нецентральний удар





Реактивний рух

- Якщо тіло з масою m розірветься ($m = m_1 + m_2$), то осколки отримають швидкості υ_1 і υ_2. Оскільки зовнішніх сил немає, то повний імпульс залишиться незмінним. Якщо на початку $p = 0$, то і вкінці $\vec{p} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = 0$
- Звідси $$\vec{\upsilon}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{\upsilon}_1$$
- Надалі швидкості залишаються сталими.

Реактивний рух

- При реактивному русі тіла його маса змінюється (1897 р. І. В.Мещерський).
- Нехай в момент часу *t* швидкість ракети дорівнює υ, швидкість газів відносно ракети υ_o, а відносно Землі υ_o-υ.

$$p_p = m\upsilon,\quad dp_p = d\left(m\upsilon\right) = md\upsilon + \upsilon dm$$

$$\frac{dp_{пал}}{dt} = \frac{dm}{dt}\left(\upsilon_0 - \upsilon\right) = -\frac{dp_p}{dt}$$

$$\upsilon\frac{dm}{dt} + m\frac{d\upsilon}{dt} = \left(\upsilon - \upsilon_0\right)\frac{dm}{dt} \;\Rightarrow\; m\frac{d\upsilon}{dt} = -\upsilon_0\frac{dm}{dt}$$

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{\upsilon}{\upsilon_0} \;\Rightarrow\; \upsilon = \upsilon_0 \ln\frac{m_0}{m}$$

Реактивний рух

- В реальних ракетах маса палива не перевищує 80% маси ракети. Швидкість витікання газів при згорянні найкращого пального $\upsilon_o \le 4 \cdot 10^3$ м/с.
- Тому

$$\upsilon \le 4 \cdot 10^3 \ln \frac{m_0}{0{,}2 \cdot m_0} = 6{,}44 \cdot 10^3 \ м / с$$

- А перша космічна швидкість $\upsilon_I \approx 8$ км/с.

Реактивний рух

Вирішення проблеми: 1) збільшити υ_o (ядерне паливо, фотонна ракета, плазмові прискорювачі), 2) зробити ракету багатоступінчатою (бак відділяється, маса зменшується і починається все спочатку).

Закон збереження моменту імпульсу

- Розглянемо систему взаємодіючих частинок, на які діють зовнішні сили

$$\begin{cases} m_1\dot{\vec{\upsilon}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 \\ m_2\dot{\vec{\upsilon}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\left[\vec{r}_1\,\dot{\vec{\upsilon}}_1\right] = \left[\vec{r}_1\,\vec{F}_{12}\right] + \left[\vec{r}_1\,\vec{F}_1\right] \\ m_2\left[\vec{r}_2\,\dot{\vec{\upsilon}}_2\right] = \left[\vec{r}_2\,\vec{F}_{21}\right] + \left[\vec{r}_2\,\vec{F}_2\right] \end{cases}$$

Закон збереження моменту імпульсу

- Оскільки $\frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{\upsilon}] = [\vec{r}\,\dot{\vec{\upsilon}}] + [\dot{\vec{r}}\,\vec{\upsilon}] = [\vec{r}\,\dot{\vec{\upsilon}}] + [\vec{\upsilon}\,\vec{\upsilon}] = [\vec{r}\,\dot{\vec{\upsilon}}]$

$$\begin{cases} m_1 \frac{d}{dt}[\vec{r}_1\,\vec{\upsilon}_1] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1\,\vec{p}_1] = [\vec{r}_1\,\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_1\,\vec{F}_1] \\ m_2 \frac{d}{dt}[\vec{r}_2\,\vec{\upsilon}_2] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_2\,\vec{p}_2] = [\vec{r}_2\,\vec{F}_{21}] + [\vec{r}_2\,\vec{F}_2] \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\{[\vec{r}_1\,\vec{p}_1] + [\vec{r}_2\,\vec{p}_2]\} = \underset{(\,=0\,)}{[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}_{12}]} + [\vec{r}_1\,\vec{F}_1] + [\vec{r}_2\,\vec{F}_2]$$

Закон збереження моменту імпульсу

$$\frac{d}{dt}\sum_i \left[\vec{r}_i\,\vec{p}_i\right] = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left[\vec{r}_i\,\vec{F}_i\right] = \vec{M}$$

Якщо момент зовнішніх сил $M = 0$, тоді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$$

- момент імпульсу замкнутої системи незмінний

Якщо діє пара сил, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, тоді

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_1\,\vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2\,\vec{F}_2\right] = \left[\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)\vec{F}_1\right] = \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_1\right]$$

Рух в полі центральних сил. Задача двох тіл.

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

В системі центра мас $r_c = 0, \quad m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2$

Введемо $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Рух в полі центральних сил. Задача двох тіл.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = f(r)\vec{e}_r$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = f(r)\vec{e}_r, \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -f(r)\vec{e}_r$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r)\vec{e}_r$$

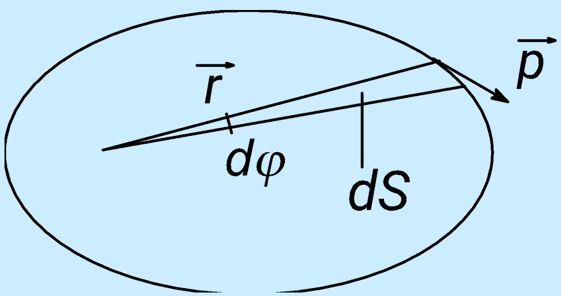
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ - приведена маса

Рух в полі центральних сил

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$$

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = const, \quad \vec{M} = 0, \quad \vec{L} \perp площині \ \ руху$$

Площина орбіти фіксована, r завжди в одній площині.



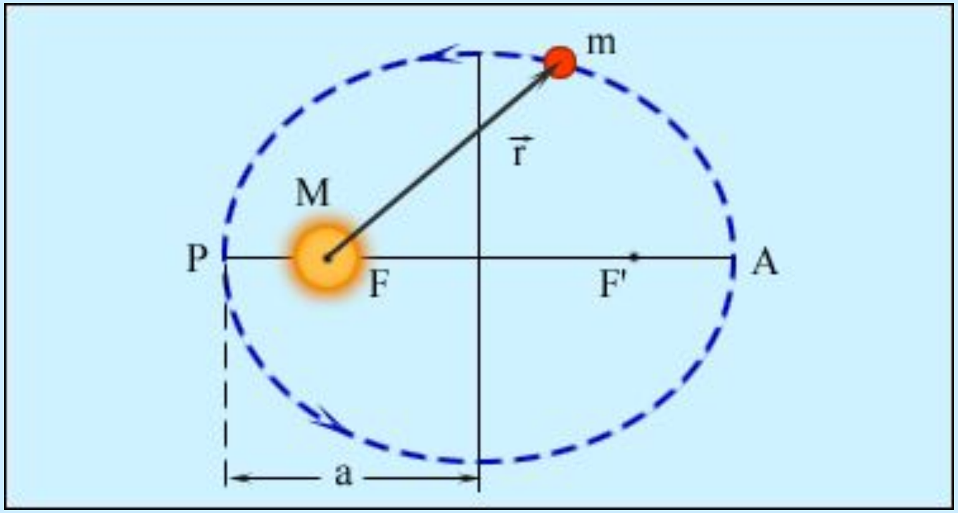
Площа сектора

$$dS = \frac{1}{2}[\vec{r}\vec{\upsilon}]dt = \frac{1}{2m}[\vec{r}\vec{p}]dt = \frac{\vec{L}}{2m}dt$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const$$

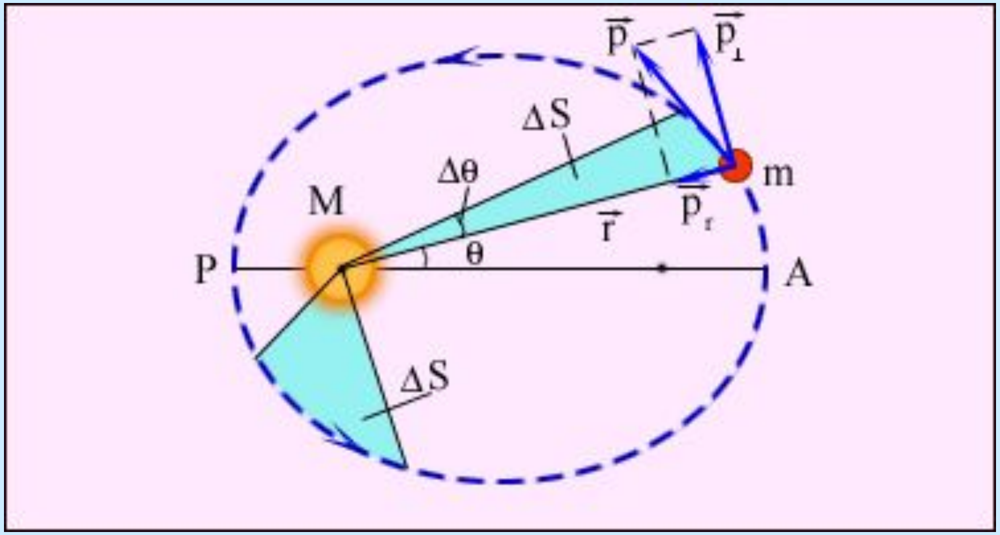
Еліптичні орбіти планет. Закони Кеплера

Перший закон Кеплера: планети рухаються по еліптичній орбіті, в фокусі якої знаходиться Сонце.



Закони Кеплера

- Другий закон Кеплера: при русі планет по орбіті секторна швидкість залишається постійною.



$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const$$

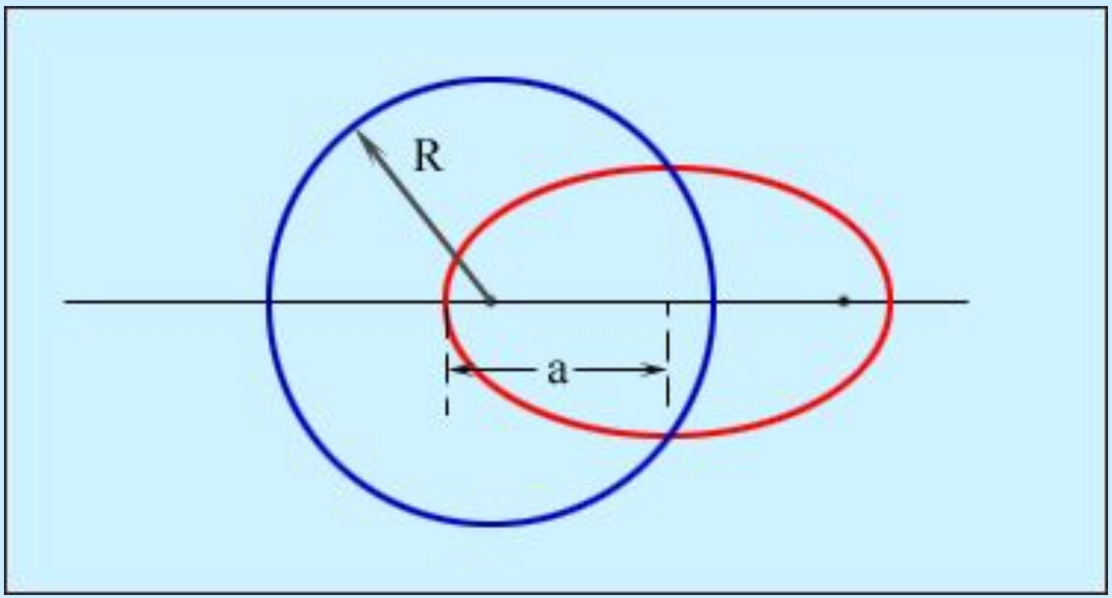
Оскільки $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_\varphi = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, то

$$\vec{L} = m[\vec{r}\vec{\upsilon}] = m[\vec{r}\vec{\upsilon}_r] + m[\vec{r}\vec{\upsilon}_\varphi] = mr\dot{\varphi}[\vec{r}\vec{e}_\varphi] = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

Закони Кеплера

- Третій закон Кеплера

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$



Космічні траєкторії

Для гравітаційних сил

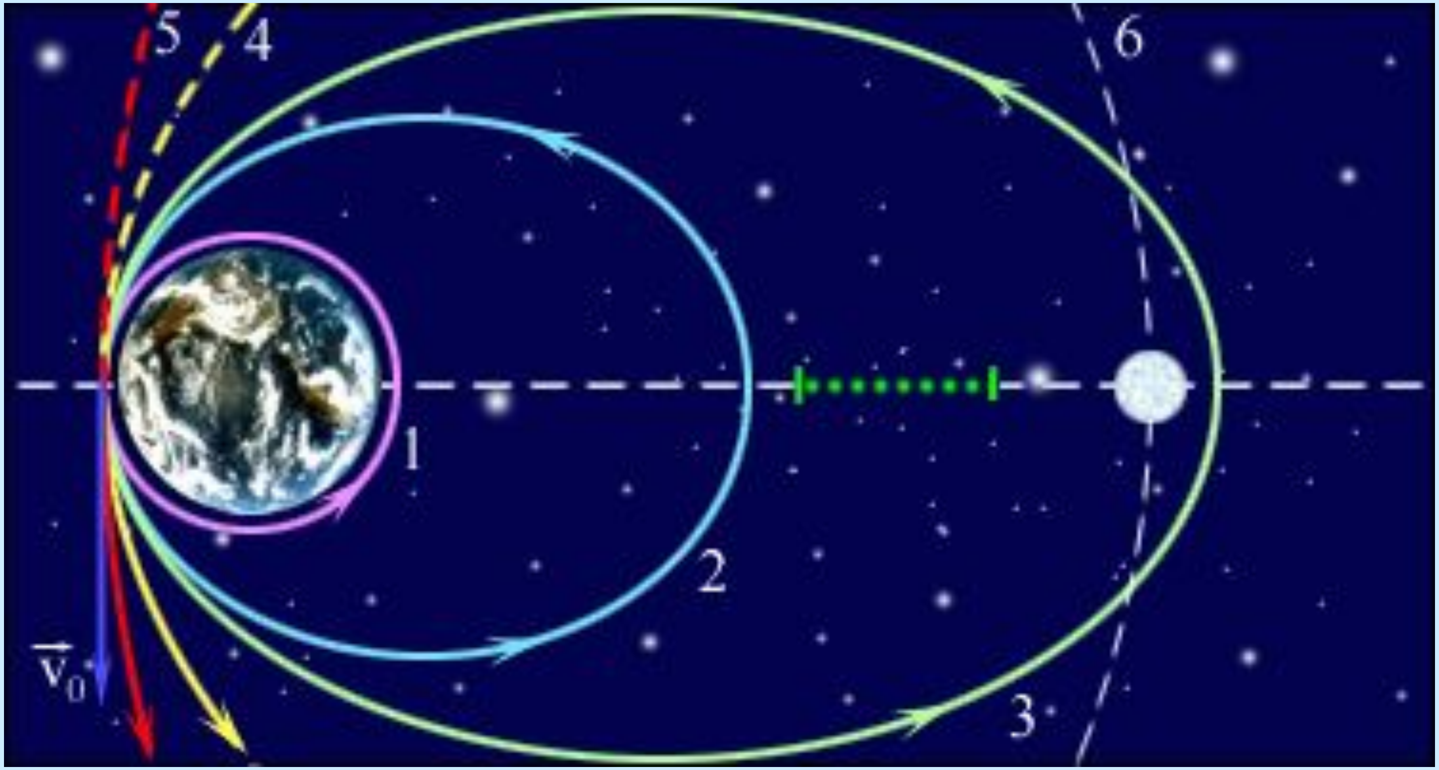
$$f(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad U = \frac{\alpha}{r}$$

$$\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

$$\begin{cases} E = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{\alpha}{r} = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} + \dfrac{\alpha}{r} = const \\ L = mr^2\dot{\phi} = L_z = const \end{cases}$$

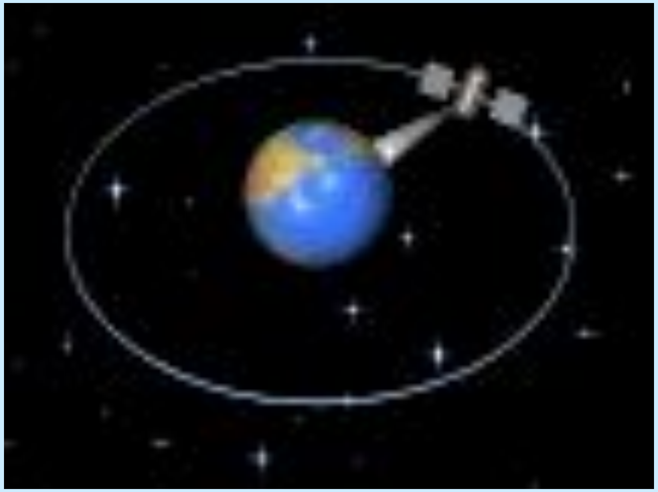
З цієї системи рівнянь можна знайти $r(t)$ і $\phi(t)$, тобто розрахувати траєкторію руху планети.

Космічні траєкторії



Орбіти

еліптична

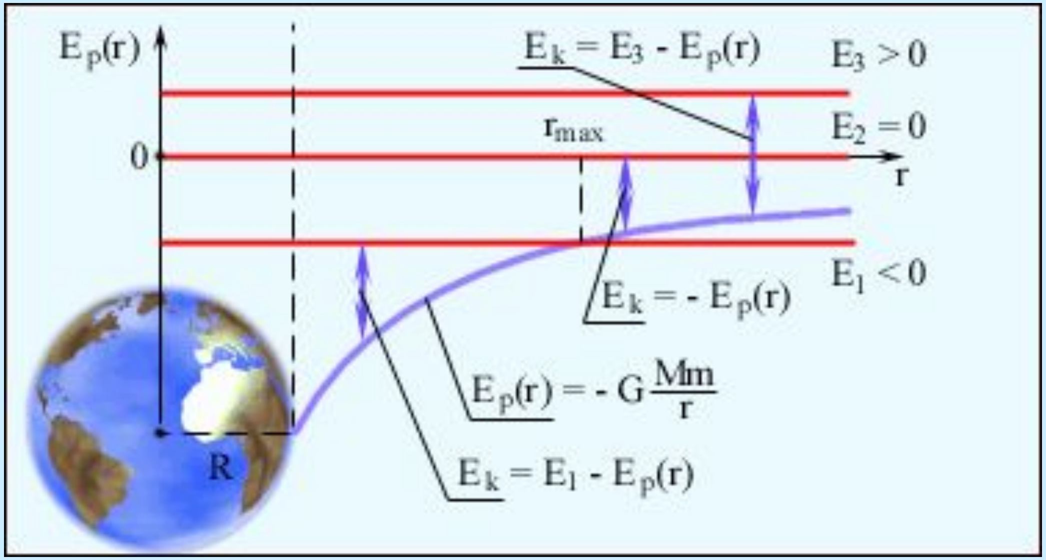


геостаціонарна

Космічні траєкторії

- Виявилось, що у випадку, коли повна енергія $E < 0$, траєкторією є еліпс. Коли $E = 0$, отримаємо параболу.
- В цих випадках $\alpha < 0$.
- Коли $E > 0$, отримаємо гіперболу. При цьому величина α може бути як більшою, так і меншою нуля.
- Коли ми розглядаємо <u>гравітаційне</u> поле, завжди $\alpha < 0$. Поле <u>електричних</u> зарядів може відповідати як $\alpha < 0$ (притягування різнойменних зарядів) так і $\alpha > 0$ - відштовхування однойменних зарядів. В останньому випадку траєкторія може бути лише гіперболічною.

Енергія тіла в гравітаційному полі планети



Космічні швидкості

$$\frac{mv_1^2}{R_3} = G\frac{Mm}{R_3^2} = gm, \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R_3}} = \sqrt{gR_3} = 7{,}9\cdot10^3 \text{ м / с.}$$

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{R_3} = 0, \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R_3}} = \sqrt{2gR_3} = 11{,}2\cdot10^3 \text{ м / с.}$$