# Представлення чисел в комп'ютері

Доц. Скакун С.В.

# Позиционная система счисления

- Целое число *x* в *b*-ричной системе счисления представляется в **виде конечной линейной комбинации степеней числа** *b*

$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$, где $a_k$ — это целые числа, называемые **цифрами**, удовлетворяющие неравенству $0 \leq a_k \leq b-1$

$x = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0$ $\quad$ $x = (a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0)_b$

- Важные системы счисления
  - двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная

# 2, 8, 10, 16 представление

| Десятичное | Двоичное | Восьмеричное | Шестнадцатеричное |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 2 | 2 |
| 3 | 11 | 3 | 3 |
| 4 | 100 | 4 | 4 |
| 5 | 101 | 5 | 5 |
| 6 | 110 | 6 | 6 |
| 7 | 111 | 7 | 7 |
| 8 | 1000 | 10 | 8 |
| 9 | 1001 | 11 | 9 |
| 10 | 1010 | 12 | A |
| 11 | 1011 | 13 | B |
| 12 | 1100 | 14 | C |
| 13 | 1101 | 15 | D |
| 14 | 1110 | 16 | E |
| 15 | 1111 | 17 | F |

# Число 2001

**Двоичное число**

1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1

$1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 0 + 1

**Восьмеричное число**

3 7 2 1

$3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 1 \times 8^0$

1536 + 448 + 16 + 1

**Десятичное число**

2 0 0 1

$2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

2000 + 0 + 0 + 1

**Шестнадцатеричное число**

7 D 1

$7 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 1 \times 16^0$

1792 + 208 + 1

# Правила

- 2
  - 1 + 1 = 10
- 8
  - 7 +1 = 10
- 16
  - F + 1 = 10

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ \ } \\ 1A9F \\ +\ 3AB \\ \hline 1E4A \end{array}$$

(1) F + B = F + 1 + A = 10 + A = 1A

(2) 1 + 9 + A = A + A = 14

(3) 1 + A + 3 = E

# Преобразование чисел из одной системы счисления в другую

- Перевод произвольной позиционной системы счисления в десятичную

Если число в *b*-ричной системе счисления равно

$$a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n,$$

то для перевода в десятичную систему вычисляем такую сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b^{n-i}$$

или, в более наглядном виде:

$$a_1 \cdot b^{n-1} + a_2 \cdot b^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot b^1 + a_n \cdot b^0,$$

- например

$$101100_2 =$$
$$= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 1 =$$
$$= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 =$$
$$= 32 + 8 + 4 + 0 = 44_{10}$$

# Перевод из десятичной в произвольную позиционную систему счисления

- Целая часть
  - 1. Последовательно **делить целую** часть десятичного числа на **основание**, пока десятичное число не станет равно нулю.
  - 2. Полученные при делении **остатки** являются **цифрами** нужного числа. Число **в новой системе** записывают, начиная с **последнего остатка**.

$44_{10}$ переведём в двоичную систему

```
44 делим на 2. частное 22, остаток 0
22 делим на 2. частное 11, остаток 0
11 делим на 2. частное  5, остаток 1
 5 делим на 2. частное  2, остаток 1
 2 делим на 2. частное  1, остаток 0
 1 делим на 2. частное  0, остаток 1
```

Частное равно нулю, деление закончено.

Теперь записав все остатки снизу вверх получим число $101100_2$

# Перевод из двоичной в восьмеричную и шестнадцатеричную системы и наборот

- Для восьмеричной
  - разбиваем переводимое число на количество цифр, равное степени 2, т.е. 3
- Для шестнадцатеричной
  - на 4

преобразуем $101100_2$
восьмеричная — 101 100 → $54_8$
шестнадцатеричная — 0010 1100 → $2C_{16}$

преобразуем
$54_8$ → 101 100
$2C_{16}$ → 0010 1100

# Отрицательные двоичные числа

- Существует несколько систем
- Рассмотрим дополнение до двух
- **X + (-X) = 0**
- Правило преобразования в отрицательное число
  - Сначала каждая единица меняется на ноль, а каждый ноль — на единицу
  - Затем к полученному результату прибавляется единица
- Число +6:
  - 00000110 □ 11111001
  - -6: 11111010
  - Проверка:
    - 00000110 + 11111010 = 0

# Числа с плавающей точкой

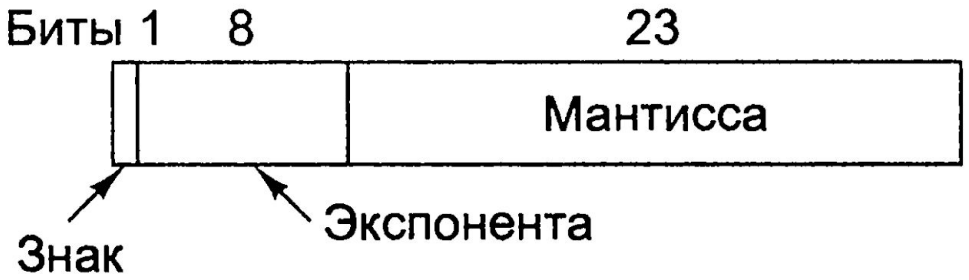
- Дробное число хранится в форме **мантиссы** и **показателя степени**
- Стандарт **IEEE 754**
- Реализация математических операций с числами с плавающей запятой в вычислительных системах может быть как **аппаратная**, так и **программная**

# IEEE 754

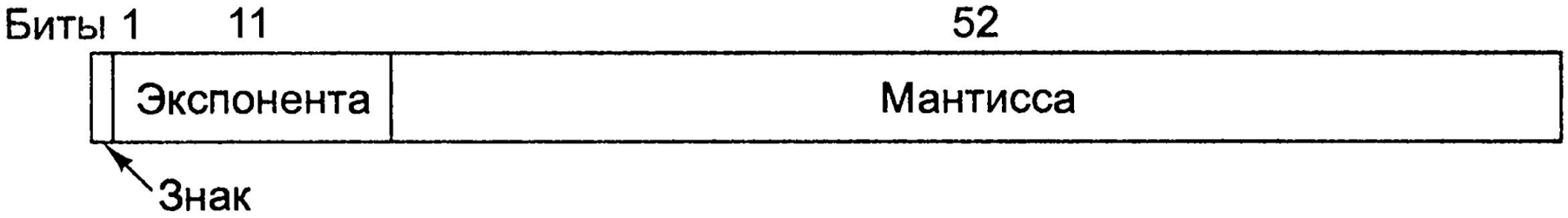
- Определения форматов хранения мантиссы, экспоненты и знака, форматы положительного и отрицательного нуля, плюс и минус бесконечностей, а также определение "не числа" (NaN).
- Методы, которые будут использоваться для округления числа в процессе математических операций.
- Обработка исключительных ситуаций, таких как деление на ноль, переполнение и т.д.

# IEEE 754

## Одинарная точность




## Двойная точность



# IEEE 754

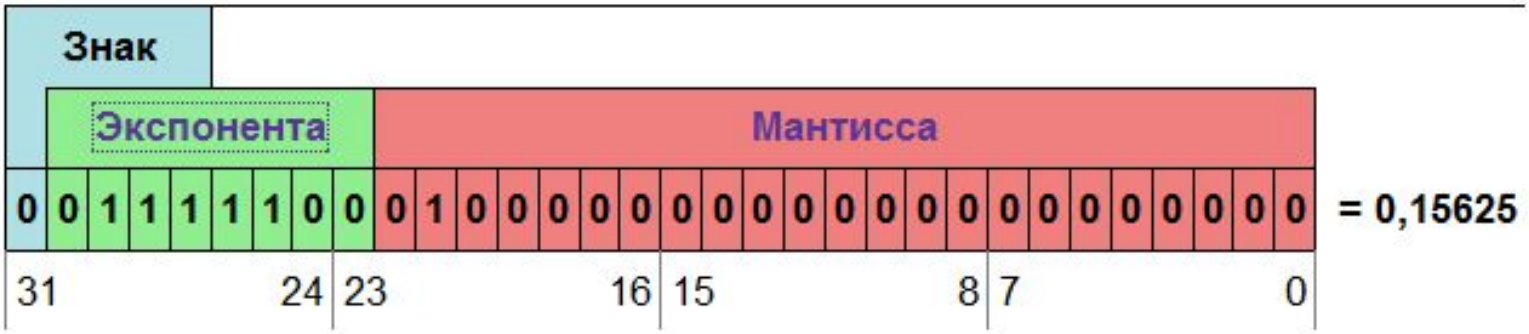
| | Одинарная точность | Удвоенная точность |
|---|---|---|
| Количество битов в знаке | 1 | 1 |
| Количество битов в экспоненте | 8 | 11 |
| Количество битов в мантиссе | 23 | 52 |
| Общее число битов | 32 | 64 |
| Смещение экспоненты | Смещение 127 | Смещение 1023 |
| Область значений экспоненты | От –126 до +127 | От –1022 до +1023 |
| Самое маленькое нормализованное число | $2^{-126}$ | $2^{-1022}$ |
| Самое большое нормализованное число | Приблизительно $2^{128}$ | Приблизительно $2^{1024}$ |
| Диапазон десятичных дробей | Приблизительно от $10^{-38}$ до $10^{38}$ | Приблизительно от $10^{-308}$ до $10^{308}$ |
| Самое маленькое ненормализованное число | Приблизительно $10^{-45}$ | Приблизительно $10^{-324}$ |

# IEEE 754 - типы

| | | | |
|---|---|---|---|
| Нормализованное число | ± | 0 < Exp < Max | Любой набор битов |
| Ненормализованное число | ± | 0 | Любой ненулевой набор битов |
| Нуль | ± | 0 | 0 |
| Бесконечность | ± | 1 1 1...1 | 0 |
| Не число | ± | 1 1 1...1 | Любой ненулевой набор битов |

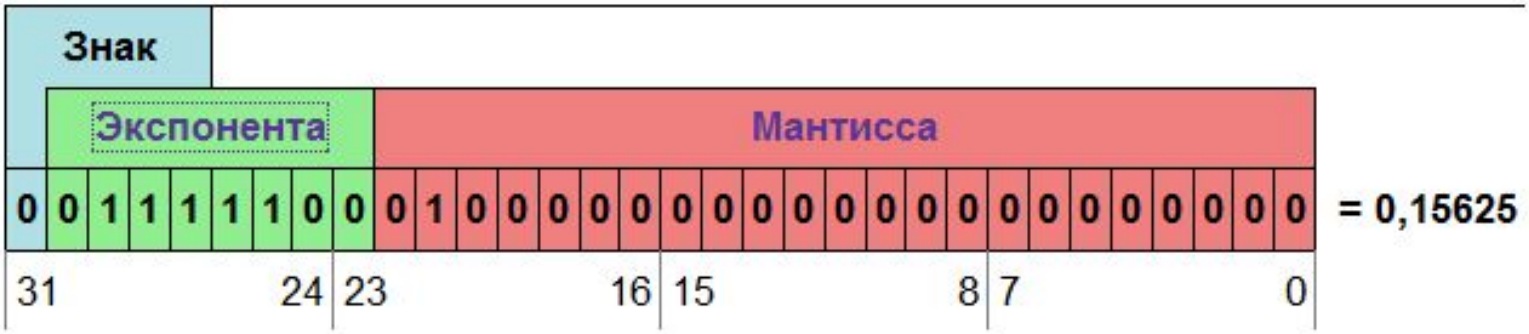
Знаковый бит

# Преобразование из IEEE 754




- Экспонента
  - $01111100_2 = 124_{10}$
- Мантисса
  - 01000000000000000000000
- Для вычисления показателя степени из восьмиразрядного поля экспоненты вычитается смещение экспоненты равное $127_{10}$
  - $01111100_2 - 01111111_2 = 124_{10} - 127_{10} = -3_{10}$

# Преобразование из IEEE 754




- Для вычисления мантиссы к единице добавляется дробная часть мантиссы из 23-х разрядного поля дробной части мантиссы $1,01000000000000000000000_2$.
- Число равно произведению мантиссы со знаком на двойку в степени экспоненты
  - $1,01_2 * 2^{-3} = 101_2 * 2^{-5} = 5 * 2^{-5} = 0,15625$
  - $1,01_2 * 2^{-3} = (1 + 0 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2}) * 2^{-3} = 2^{-3} + 2^{-5} = 0,15625$

# Преобразование в IEEE 754

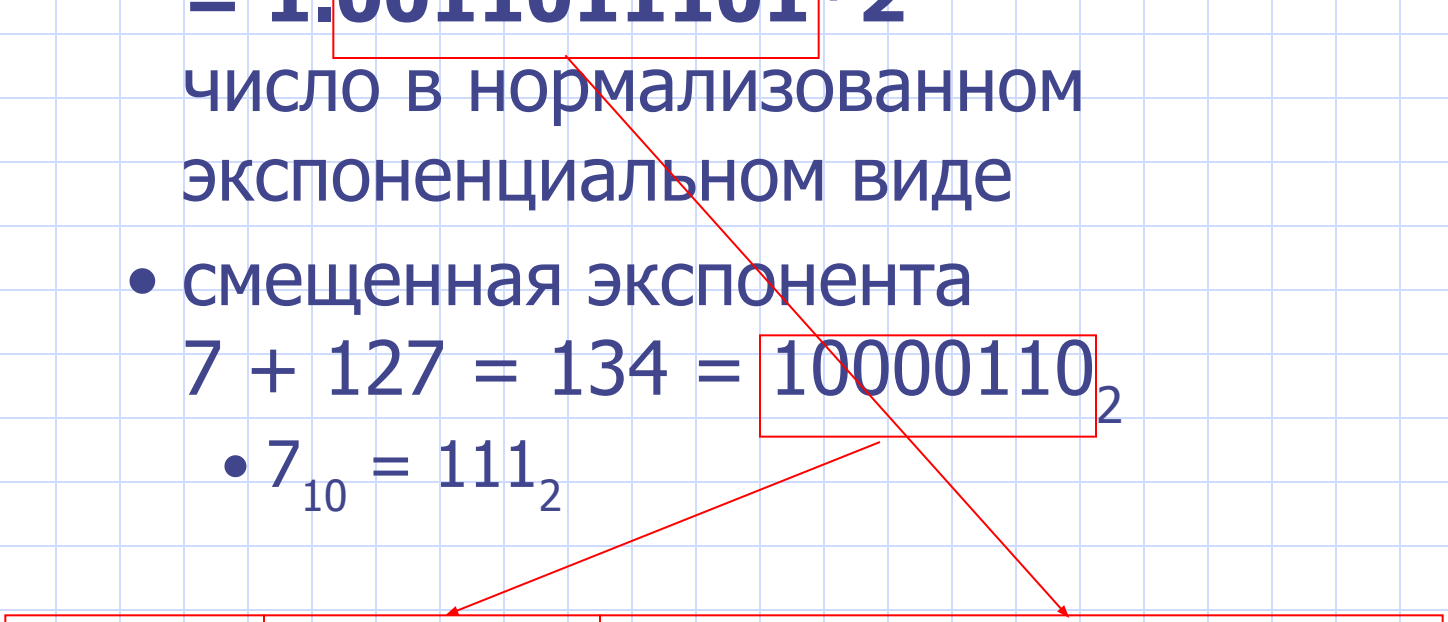
- **13** = 1101 = 1.101 * 2^3
- Экспонента
  - 3 + 127 = 130 = 10000010
- Мантисса
  - 10100000000000000000000
- Число 13 в IEEE 754
  - 0.10000010.10100000000000000000000

# Преобразование в IEEE 754

- **155.625**
  - $1*2^7 +0*2^6+0*2^5+1*2^4+1*2^3+0*2^2+1* 2^1+ 1*2^0+1*2^{-1}+0*2^{-2}+1*2^{-3}$
  - 128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125
  - **155.625 = 10011011.101** - число в двоичной системе с плавающей точкой

# Преобразование в IEEE 754

- **155.625**
  - **$10011011.101 = 1.0011011101 * 2^{+7} =$**
    **$= 1.0011011101 * 2^{+111}$**
    число в нормализованном экспоненциальном виде
  - смещенная экспонента
    $7 + 127 = 134 = 10000110_2$
    - $7_{10} = 111_2$



| 1 бит | 8 бит | 23 бит |
|---|---|---|
| 0 | 10000110 | $00110111010000000000000_2$ |

# Примеры - Python

```
>>> a = 2**1000
>>> a
10715086071862673209484250490600018105614048117055336074437503883703510511249361224931983788156958581275946729175531468251871452856923140435984577574698574803934567774824230985421074605062371141877954182153046474983581941267398767559165543946077062914571196477686542167660429831652624386837205668069376L

>>> x = 0.1
>>> x
0.1000000000000001

>>> s=0.0
>>> for i in range(10): s += 0.1
>>> s
0.9999999999999989
>>> print(s)
1.0
```

# Примеры - Python

```
>>> import math
>>> a = math.sqrt(2)
>>> a
1.4142135623730951
>>> a*a == 2
False
>>> a*a
2.0000000000000004
```

# Примеры – C++

```
int main(int argc, char* argv[])
{

   double x = 0.1;

   cout << x << endl;
   printf("%1.17lf \n",  x);

   double sum = 0.0;

   for (int i = 0; i < 10; i++)
      sum += 0.1;

   cout << sum << endl;
   printf("%1.17lf \n",  sum);
   return 0;
}
```