Лектор Буганова С.Н.

Интегрирование рациональных функций. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен. Интегралы от некоторых классов тригонометрических функций.

Дисциплина Математика 1
Лекция 13
2015-16 учебный год

План лекций

1. *Интегрирование дробно-рациональных функций*
2. *Интегрирование тригонометрических функций*
3. *Интегрирование некоторых иррациональностей*

Интегрирование рациональных дробей.

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где n, m – степени многочленов.

Если n<m, то рациональная дробь называется правильной, в противном случае, при n≥m, - неправильной.

Если дробь неправильная, то из нее нужно сначала выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель

Неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Простейшими рациональными дробями называются правильные рациональные дроби следующих четырех типов: $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$,

где A, B, C, *a*, p, q – любые числа, kN, k>1.

Дроби первых двух типов интегрируются непосредственно $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\int \dfrac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+c$;

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+c = = \frac{A}{(1-k)\cdot(x-a)^{1-k}}+c$$

Для интегрирования дроби третьего и четвертого типов нужно выделить полный квадрат в знаменателе и затем сделать замену переменной.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. Преобразуем x^2+4x+5,

выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 =$$

$$= \left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1 = (x+2)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt + C = arctg(x+2)+C.$$

Интегрирование тригонометрических функций.

1. Интегралы вида $\int \sin kx \cdot \sin mx dx$, $\int \sin kx \cdot \cos mx dx$, $\int \cos kx \cdot \cos mx dx$ вычисляются с помощью формулы:

$$\sin kx \cdot \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x),$$

$$\sin kx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \sin(k+m)x),$$

$$\cos kx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x)$$

2. Интегралы вида $\int \cos^m kx \cdot \sin^n kx dx$, где хотя бы одно из чисел m и n – нечетное положительное, k и второе число – любое, вычисляются подведением под знак дифференциала.

3. Интегралы вида $\int \cos^m kx \cdot \sin^n kxdx$, где m и n – четные положительные числа (одно из них может равняться нулю) k – любое число, вычисляются с помощью формул понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha), \quad \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

4. Интегралы вида $\int tg^m kxdx$ и $\int ctg^m kxdx$, где m – натуральное, k – любое число, вычисляются заменой переменной: tgkx=z или ctgkx=z.

5. Интегралы вида $\int R(\sin x;\cos x)dx$ сводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2}=z$, откуда x=2arctgz; $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$; $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$; $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$; $\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$;

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

Интегрирование простейших иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегрируются так же, как простейшие рациональные дроби 3 – го вида: в знаменателе выделяются полный квадрат и вводится новая переменная.
2. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}; \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}; ...; \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ вычисляются с помощью замены переменной $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел n1, n2, …, nk; *a*, b, c, d – числа (c и d не равны нулю одновременно).

В частности, корень под знаком интеграла может быть один.

3. Интегралы вида $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$ вычисляются с помощью тригонометрических подстановок соответственно:

1. x=asinz; dx=acoszdz.

2. x=atgz; $dx=\dfrac{adz}{\cos^2 z}$.

3. $x=\dfrac{a}{\cos z}$ $dx=\dfrac{a\sin z dz}{\cos^2 z}$

Пример(вычисление с помощью тригонометрических подстановок).

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx = \left(x = tgz; dx = \frac{dz}{\cos^2 z} \right) = \int \frac{\sqrt{1+tg^2 z}}{tg^4 z} \cdot \frac{dz}{\cos^2 z} =$$

$$= \int \frac{dz}{tg^4 z \cdot \cos^3 z} = \int \frac{\cos^4 z dz}{\sin^4 z \cdot \cos^3 z} = \int \frac{\cos z dz}{\sin^4 z} =$$

$$= \int \sin^{-4} z d \sin z == \frac{\sin^{-3} z}{-3} + c =$$

$$= c - \frac{1}{3\sin^3 z} = (ctgz = \frac{1}{x}; 1 + ctg^2 z = \frac{1}{\sin^2 z}; \sin z =$$

$$= \sqrt{1+ctg^2 z} == \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} == \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}) = c - \frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3x^3}$$

Задание на СРС

1. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен.(конспект) [1,2].

Задание на СРСП

1. ИДЗ-8.2., 8.3 [1. – стр.57].

Глоссарий

№	Қазақша	Русский	English
1.	Алғашқы функция	Первообразная функция	Antiderivative
2.	Анықталмаған интеграл	Неопределенный интеграл	Ndefinite integral
3.	Айнымалы ауыстыру	Замена переменной	Transformation of variable
4.	Бөлшектеп интегралдау	Интегрирование по частям	Integration by parts
5.	Интеграл астындағы функция	Подынтегральная функция	Integrand

Литература

Основная

1. А.П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике, т.2 - Мн.: Выш. Школа, 2011.
2. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для втузов. - М.: Оникс, 2007.

Дополнительная

3. Сыдыкова Д.К. Математика I. Методическое руководство к выполнению заданий для СРС. -Алматы: КазГАСА, 2008.
4. Сыдыкова Д.К. «Курс Математики- I», Модуль I, II для дистанционного обучения. Электронный учебник.-Алматы: КазГАСА, 2012.
5. www.studentlibrary.ru
6. http://sferaznaniy.ru/vysshaya-matematika.