Учебный курс
«ИНФОРМАТИКА»

Преподаватель:

ст. преп. Зуева Екатерина Александровна

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Лекция 2

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

1. Системы счисления, определения
2. Позиционные СС
3. Непозиционные СС
4. Логические основы ЭВМ
5. Логические операции
6. Логические функции

Определения

Система счисления – это способ записи **чисел** с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:
123, 45678, 1010011, CXL

Цифры: набор символов, участвующих в записи числа
0, 1, 2, …   I, V, X, L, …

Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места *(позиции)* в записи числа;
- **позиционные** – зависит

Алфавит – совокупность различных цифр, используемых для записи чисел.

Непозиционные системы

Период палеолита.
10-11 тысяч лет до н.э.

- **Единичная («палочная»)**

или

2,5 тысяч лет до н.э.

- **Древнеегипетская десятичная непозиционная система**

= 3 4 5

- единицы

- десятки

- сотни

Непозиционные системы

2 тысячи лет до н.э.

- Вавилонская шестидесятеричная

цифры: и

- единицы - десятки - 60 ; ; ; … ;

60^2 60^3 60^n

= 33

= 60 + 20 + 2 = 82

пример

2-ой разряд

1-ый разряд

= 3 8 4

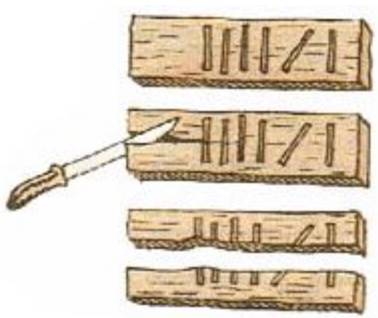
= 3600 + 30 + 2 = 3632

пропущенный шестидесятичный разряд

Шестидесятеричная вавилонская система – первая известная нам система счисления, основанная на позиционном принципе.

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, …)



Римская:

I – 1 (палец), **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев), **X** – 10 (две ладони), **L** – 50, **C** – 100 (*Centum*), **D** – 500 (*Demimille*), **M** – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна**!) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

Примеры:

MD**C**X**L**I**V** = 1000 + 500 + 100 **– 10** + 50 **– 1** + 5 = 1644

2389 = 2000 + 300 + 80 + 9

M M **CCC** **LXXX** **IX**

2389 = M M C C C L X X X I X

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V, X, L, C, D, M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:

  CCCLIX + CLXXIV =?

Где используется:

- номера глав в книгах:


ГЛАВА V.

Изслѣдованіе истоковъ Желтой рѣки. (прод.).

Свѣдѣнія о тангутахъ камъ и голыкъ. — Нашъ обратный путь. — Охота за горными баранами. — Опасная случайность. — Вновь на тибетскомъ плато. — Мѣстность по р. Джагынъ-голъ. — Развѣдочныя

- обозначение веков: «***Пираты XX века***»
- циферблат часов

Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃
аз	ве́ди	глаго́ль	добро́	есть	зело́	земля́	и́же	фита́
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і҃	к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	ѻ҃	п҃	ч҃
и	ка́ко	лю́ди	мысле́те	на́ш	кси	ом	поко́й	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р҃	с҃	т҃	ѵ҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѿ҃	ц҃
рцы	сло́во	тве́рдо	ук	ферт	хер	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Позиционные системы

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:
первоначально – счет на пальцах
изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Основание (количество цифр): **10**

сотни десятки единицы

2 1 0 **разряды**

$$3\ 7\ 8 = 3\cdot 10^2 + 7\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0$$

300 70 8

Другие позиционные системы:

- **двоичная**, восьмеричная, **шестнадцатеричная** (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- 60-ричная (1 мин = 60 секунд, 1 ч = 60 мин)

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Двоичная система счисления

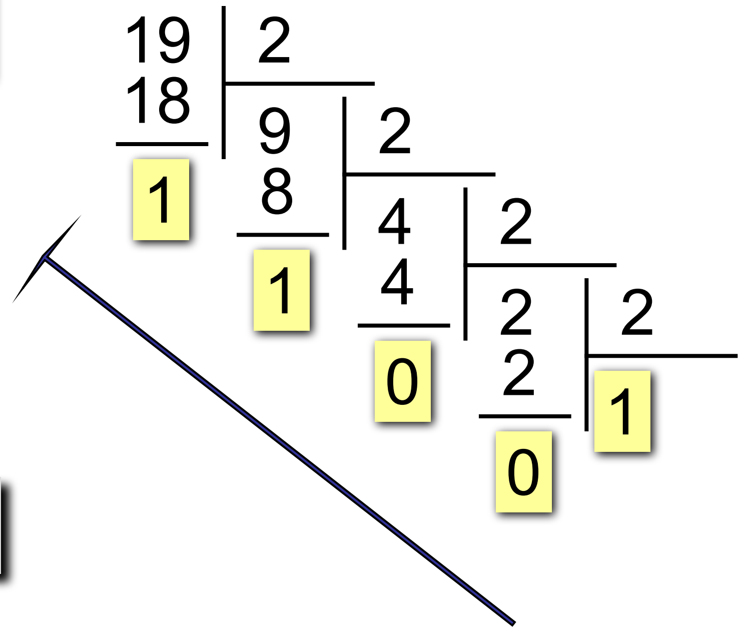
Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): **2**

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 **разряды**

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0} \cdot 2^3 + \cancel{0} \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

Примеры (2 варианта, решить самостоятельно):

131

=

79

=

101011_2

=

110110_2

=

Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0{,}375 = 0{,}011_2$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \boxed{0},750 \\ 0{,}75 \\ \times \quad 2 \\ \hline \boxed{1},50 \\ 0{,}5 \\ \times \quad 2 \\ \hline \boxed{1},0 \end{array}$$

0,7 = ?

0,7 =

0,101100110…

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$$

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$101{,}011_2 = 1\cdot2^2 + 1\cdot2^0 + 1\cdot2^{-2} + 1\cdot2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0{,}25 + 0{,}125 = 5{,}375$$

Примеры (по 1 на каждый вариант):

0,625 =

3,875 =

Арифметические операции

сложение

$0+0=0 \quad 0+1=1$

$1+0=1 \quad 1+1=\color{red}{1}0_2$

$1+1+1=\color{red}{1}1_2$

перенос

вычитание

$0-0=0 \quad 1-1=0$

$1-0=1 \quad \color{red}{1}0_2-1=1$

заем

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,1\,1\,0_2 \\
+\ 1\,1\,1\,0\,1_2 \\
\hline
1\,1\,0\,0\,1\,1_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\,0\,0\,0\,1\,0\,1_2 \\
-\ 1\,1\,0\,1\,1_2 \\
\hline
\color{red}{0}\,1\,0\,1\,0\,1\,0_2
\end{array}
$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\quad 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ +\quad 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ +\quad 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ +\quad 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ -\quad 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ -\quad 110101_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

умножение

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,1\,0\,1_2 \\
\times \quad 1\,0 \\
\hline
1_2 \; 1\,0\,1\,0 \\
1_2 \\
+\; 1\,0\,1\,0\,1 \\
\hline
\boxed{1\,1\,0\,1\,0\,0_2} \\
1_2
\end{array}
$$

деление

$$
\begin{array}{l|l}
1\,0\,1\,0 & 1\,1 \\
\cline{2-2}
1_2 & \boxed{1_2 1_2} \\
-\; 1\,1\,1_2 & \\
\hline
1_2 & \\
-\; 1\,1\; 0 & \\
1_2 &
\end{array}
$$

Плюсы и минусы двоичной системы

- нужны технические устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
- **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов;
- выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.

- простые десятичные числа записываются в виде **бесконечных** двоичных дробей;
- двоичные числа имеют **много разрядов;**
- запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): **8**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

$$\begin{array}{r|l} 100 & 8 \\ \underline{96} & \begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ \underline{8} & \boxed{1} \\ \boxed{4} & \end{array} \\ \boxed{4} & \end{array}$$

$$100 = 144_8$$

система счисления

8 → 10

2 1 0 **разряды**

$$144_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$$

$$= 64 + 32 + 4 = 100$$

Примеры:

134 =

75 =

134_8 =

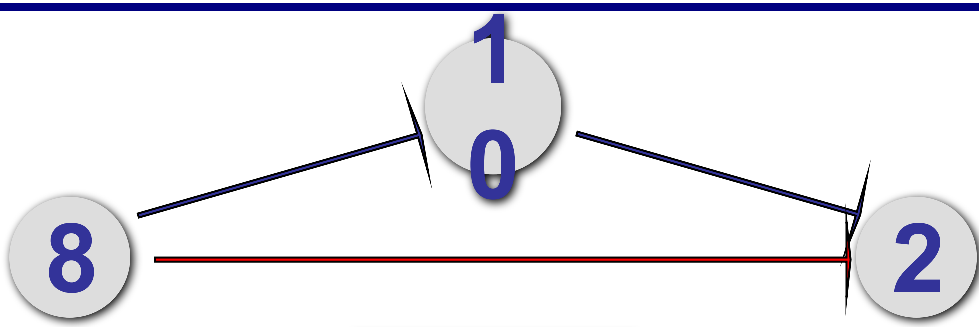
75_8 =

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



- трудоемко
- 2 действия

$8 = 2^3$

! **Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!**

$$1725_8 = \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}\,{}_2$$

Примеры:

$3467_8 =$

$2148_8 =$

$7352_8 =$

Перевод из двоичной системы

1001011101111

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

1	1	3	5	7

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

101101010010_2

=

11111101011_2

=

1101011010_2

=

Арифметические операции

сложение

• • •

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ +\ 662_8 \\ \hline 1040 \end{array}$$

8

$6 + 2 = 8 = \mathbf{8} + 0$

1 в перенос

$5 + 6 + \mathbf{1} = 12 = \mathbf{8} + 4$

1 в перенос

$1 + 6 + \mathbf{1} = \mathbf{8} = \mathbf{8} + 0$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ +\ 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ +\ 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

вычитание

• •

$$
\begin{array}{r}
456_8 \\
-\;277_8 \\
\hline
157
\end{array}
$$

заем

$(6 + 8) – 7 = 7$

заем

$(5 – 1 + 8) – 7 = 5$

$(4 – 1) – 2 = 1$

8

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ -\quad 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ -\quad 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Шестнадцатиричная система счисления

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): **16**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 **A**, 11 **B**, 12 **C**, 13 **D**, 14 **E**, 15 **F**

10 → 16

$$\begin{array}{r|l} 107 & 16 \\ \underline{96} & \boxed{6} \\ \boxed{11} & \end{array}$$

B

$$107 = 6B_{16}$$

система счисления

16 → 10

2 1 0 **разряды**

C

$$1C5_{16} = 1\cdot16^2 + 12\cdot16^1 + 5\cdot16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

Примеры:

171
=

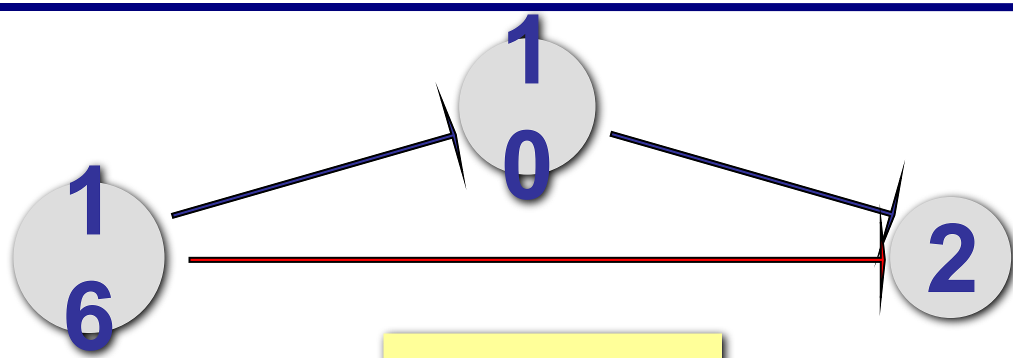
206
=

$1BC_{16}$
=

$22B_{16}$
=

X_{10}	X_{16}	X_2		X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000		8	8	1000
1	1	0001		9	9	1001
2	2	0010		10	A	1010
3	3	0011		11	B	1011
4	4	0100		12	C	1100
5	5	0101		13	D	1101
6	6	0110		14	E	1110
7	7	0111		15	F	1111

Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

$16 = 2^4$

! **Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!**

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}{}_{2}$$

Примеры:

$C73B_{16}$ =

$2FE1_{16}$ =

Перевод из двоичной системы

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

1 2 E F

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

Примеры:

1010101101010110_2

=

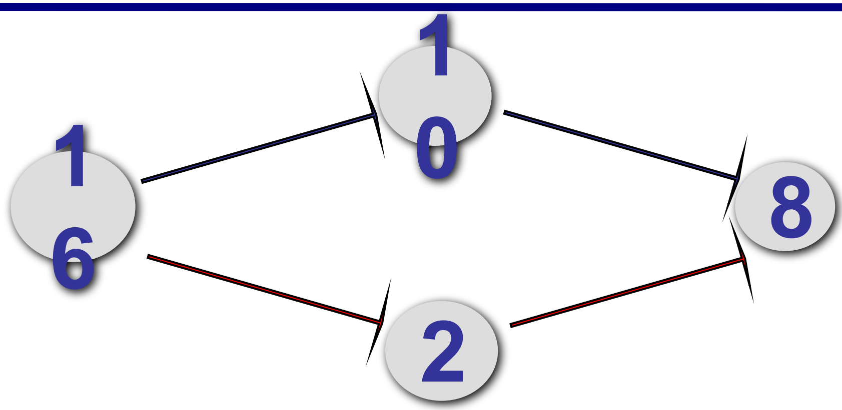
111100110111110101_2

=

110110110101111110_2

=

Перевод в восьмеричную и обратно



трудоемко

Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752$$

Примеры:

$A35_{16} =$

$765_8 =$

Арифметические операции

сложение

$$
\begin{array}{r}
A\,5\,B_{16} \\
+\;C\,7\,E_{16} \\
\hline
1\,6\,D\,9_{16}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & 10 & 5 & 11 \\
+ & 12 & 7 & 14 \\
\hline
1 & 6 & 13 & 9
\end{array}
$$

1 в перенос

$11+14=25=16+9$

$5+7+1=13=D_{16}$

1 в перенос

$10+12=22=16+6$

Пример:

$$
\begin{array}{r}
C\ B\ A_{16} \\
+\quad A\ 5\ 9_{16} \\
\hline
\end{array}
$$

Арифметические операции

вычитание

$$
\begin{array}{r}
C\,5\,B_{16} \\
-\;A\,7\,E_{16} \\
\hline
1\,D\,D_{16}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
\dot{12} & \dot{5} & 11 \\
-\;10 & 7 & 14 \\
\hline
1 & 13 & 13
\end{array}
$$

заем

заем

$(11+16)–14=13=D_{16}$

$(5 – 1)+16 – 7=13=D_{16}$

$(12 – 1) – 10 = 1$

Пример:

$$
\begin{array}{r}
1\,B\,A_{16} \\
-\quad A\,5\,9_{16} \\
\hline
\end{array}
$$

«ЛОМАЕМ» голову *стихотворение А.Н.Старикова:*

Ей было 1100 лет,
Она в 101-й класс ходила,
В портфеле по 100 книг носила -
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато 100-ногий.
Она ловила каждый звук
Своими 10-ю ушами,
И 10 загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И 10 темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно…
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Поняли ли вы рассказ поэта?

«ЛОМАЕМ» голову

Шел Кондрат
В Ленинград,
А навстречу – 1100 ребят.
У каждого по 11 лукошек,
В каждом лукошке – кошка,
У каждой кошки – 1100 котят.
У каждого котенка
В зубах по 100 мышат.
И задумался старый Кондрат:
«Сколько мышат и котят
Ребята несут в Ленинград?»

«ЛОМАЕМ» голову

10 ног на 11 ногах,
А 100 в зубах.
Вдруг 100 прибежали
И с одного убежали.
Подскочили 10 ног,
Ухватили 11 ног,
Закричали на весь дом –
Да 11 по 100!
Но 100 завизжали
И с одного убежали.

Пословицы и поговорки с использованием СС

Конь о 100 ногах и тот спотыкается.

У 111 мамок дитя без глаза.

За битого 10 небитых дают.

За 10 зайцами погонишься – ни одного не поймать.

Старый друг лучше новых 10.

Один воин 1111101000 водит.

Не держи 1100100 рублей, а держи 1100100 друзей.

Не велик городок, до 111 воевод.

В добрую голову 1100100 рук.

1010 раз смеряй, одинажды отрежь.

Ум хорош, а 10 лучше.

Богатый не то 10 раз обедает, а бедному мосол, он и сыт и весел.

10 медведей в одной берлоге не уживутся.

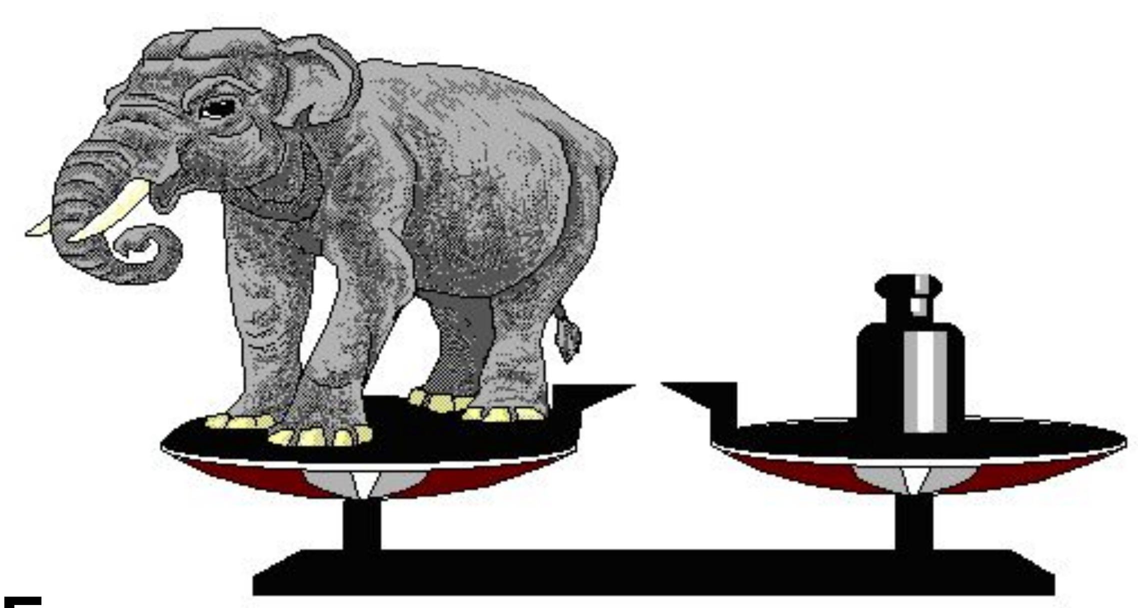
Пословицы и поговорки с использованием СС

Добрый друг лучше 1100100 родственников.
С одного вола, 10 шкур не дерут.
111 пятниц на неделе.
111 пядей во лбу.
Один с сошкой, а 111 с ложкой.
У бедного Тимошки скота – то 10 кошек.
Хата брата все богата: 10 полен, 11 ушат.
За 1 ученого, 10 неученых дают.
Хорошо ружьецо бьет, с печи упало 111 горшков разбило.
Без 100 углов изба не рубится.
За 111 печатями.
111 одного не ждут.
От горшка 11 вершков.
1 дурак, а умных 101 ссорит.
1 дурак может больше спросить, чем 1010 умных ответить.

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Другие системы счисления

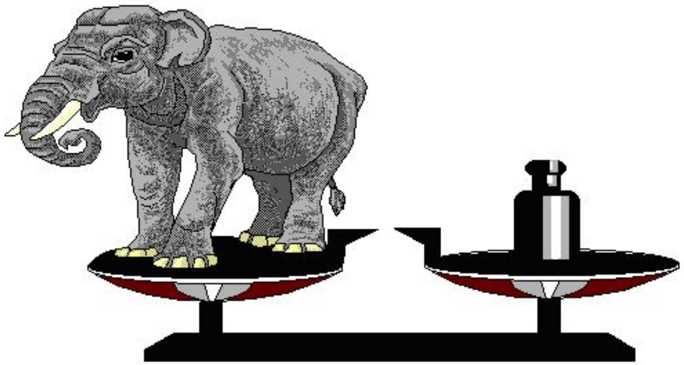
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гири можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа

0 гиря снята

– 1 гиря слева

! Троичная система!

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

27 кг + 9 кг + 3 кг + 1 кг = 40 кг

$$1\quad 1\quad 1\quad 1_{3ур} = 40$$

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Логические основы ЭВМ

Логические основы ЭВМ

Принципы работы ЭВМ основываются на законах математической логики, поэтому ее элементы широко используются для поиска и обработки информации и при разработке схем электронных устройств.

Математическая логика – это наука о формах и способах мышления и их математическом представлении.

Мышление основывается на понятиях, высказываниях и умозаключениях.

Понятие объединяет совокупность объектов, обладающими некоторыми существенными признаками, которые отличают их от других объектов.

Логические основы ЭВМ

Понятие имеет две характеристики:

1) содержание;
2) объем.

Содержание понятия – это совокупность существенных признаков, выделяющих объекты, соответствующие данному понятию, среди других объектов. Например, содержание понятия «человек» можно раскрыть так: «Общественное существо, обладающее сознанием и разумом».

Объем понятия «человек» определяется численностью людей, живущих в мире.

Логические основы ЭВМ

Высказывание (суждение, утверждение) – это повествовательное предложение, в котором утверждаются или отрицаются свойства реальных предметов и отношения между ними. Высказывание может быть истинным или ложным.

Истинным называется высказывание, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей, например: «Москва – столица России». Истинность высказывания кодируется единицей (1) и имеет значение «истина».

Ложным высказывание будет в том случае, когда оно не соответствует реальной действительности, например: «Париж – столица США». Ложность высказывания кодируется нулем (0) и имеет значение «ложь».

Обычно высказывания обозначаются логическими переменными – заглавными латинскими буквами с индесом или без, например, A = «Сегодня идет дождь». Логические переменные принимают только два значения 0 и 1

Логические основы ЭВМ

Умозаключение позволяет из известных фактов (истинных высказываний) получать новые факты. Например, из факта «Все углы треугольника равны» следует истинность высказывания «Этот треугольник равносторонний».

Высказывания и логические операции над ними образуют алгебру высказываний (булеву алгебру), предложенную английским математиком Джорджем Булем.

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Логические операции

Логические операции

Основные логические операции над высказываниями, используемыми в ЭВМ, включают отрицание, конъюнкцию, дизъюнкции, стрелку Пирса и штрих Шеффера. Рассмотрим эти логические операции.

1. Отрицание $\overline{X}$ (обозначается также $\neg X$, $\sim X$).

Отрицание $\overline{X}$ (NOT, читается «не X») – это высказывание, которое истинно, если X ложно, и ложно, если X истинно.

2. Конъюнкция XY ($X\&Y$, $X \wedge Y$).

Конъюнкция XY (AND, логическое умножение, «X и Y») – это высказывание, которое истинно только в том случае, если X истинно и Y истинно.

3. Дизъюнкция X+Y ($X \vee Y$).

Дизъюнкция X+Y (OR, логическая сумма, «X или Y или оба») – это высказывание, которое ложно только в том случае, если X ложно и Y ложно.

Логические операции

4. Стрелка Пирса X ↓ Y.

Стрелка Пирса X ↓ Y (NOR (NOT OR), ИЛИ-НЕ) – это высказывание, которое истинно только в том случае, если X ложно и Y ложно.

5. Штрих Шеффера X | Y.

Штрих Шеффера X | Y (NAND (NOT AND), И-НЕ) – это высказывание, которое ложно только в том случае, если X истинно и Y истинно.

Определить значения логических операций при различных сочетаниях аргументов можно из **таблицы** истинности.

Логические операции

Таблица истинности для основных логических операций, используемых в ЭВМ

X	Y		XY	X + Y	X ↓ Y	X | Y
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0

Чтобы определить значение операции 0 + 1 в таблице истинности, необходимо на пересечении столбца X + Y (определяет операцию) и строки, где X = 0 и Y = 1 (так первый аргумент равен 0, а второй – 1), найти значение 1, которое и будет являться значением операции 0 + 1.

Логические операции

В алгебре высказываний существуют две нормальные формы: конъюнктивная нормальная форма (**КНФ**) и дизъюнктивная нормальная форма (**ДНФ**).

КНФ – это конъюнкция конечного числа дизъюнкций нескольких переменных или их отрицаний (произведение сумм). Например, формула X(Y + Z) находится в КНФ.

ДНФ – это дизъюнкция конечного числа конъюнкций нескольких переменных или их отрицаний (сумма произведений). Например, формула X + YZ находится в ДНФ.