

Учебный курс
«ИНФОРМАТИКА»

Преподаватель:
ст. преп. Зуева Екатерина Александровна

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Лекция 2

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

1. Системы счисления, определения
2. Позиционные СС
3. Непозиционные СС
4. Логические основы ЭВМ
5. Логические операции
6. Логические функции

Определения

Система счисления – это способ записи чисел с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры: набор символов, участвующих в записи числа
0, 1, 2, ... I, V, X, L, ...

Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит

Алфавит – совокупность различных цифр, используемых для записи чисел.

Непозиционные системы

Период палеолита.
10-11 тысяч лет до н.э.

- Единичная («палочная»)



или

2,5 тысяч лет до н.э.



- Древнеегипетская десятичная непозиционная система



= 3 4 5

- единицы

- десятки

-
СОТНИ

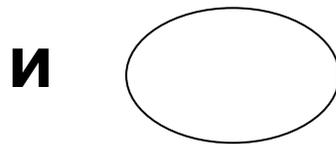
Непозиционные системы

2 тысячи лет до н.э.



- Вавилонская шестидесятеричная

цифры:



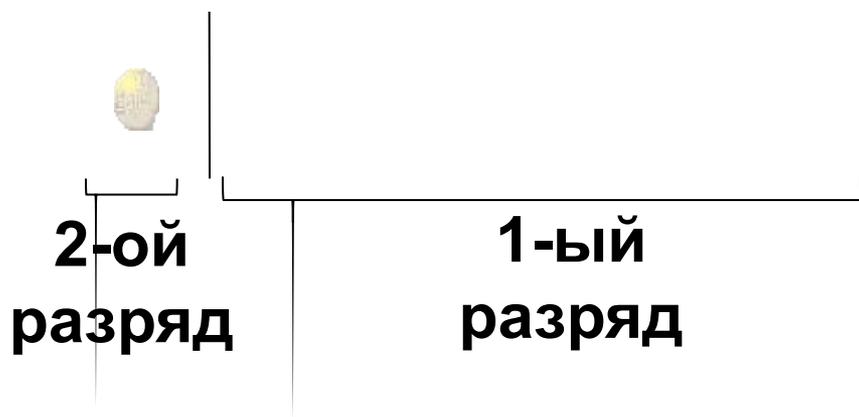
- единицы

- десятки

 - 60 ; ; ... ;
= 33 60² 60³ 60ⁿ

$$= 60 + 20 + 2 = 82$$

пример



$$= 384$$



$$= 3600 + 30 + 2 = 3632$$

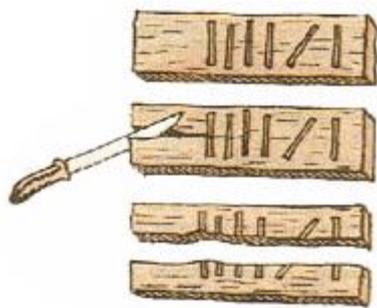
пропущенный шестидесятичный разряд



**Шестидесятеричная вавилонская система –
первая известная нам система счисления,
основанная на позиционном принципе.**

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



Римская:

I – 1 (палец), **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),
X – 10 (две ладони), **L** – 50,
C – 100 (*Centum*), **D** – 500 (*Demimille*),
M – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

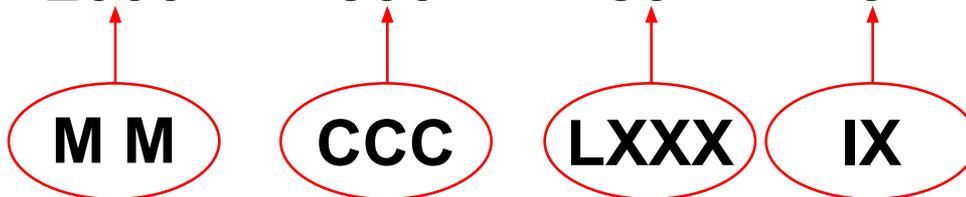
Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{M M C C C L X X X I X}$$

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V**, **X**, **L**, **C**, **D**, **M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:
СССLIX + СLXXIV = ?

Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «**Пираты XX века**»
- циферблат часов



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

Ѧ

аз
1

Ѣ

вѣди
2

Ѧ

глаголь
3

Ѧ

добро
4

Ѧ

есть
5

Ѧ

зелѣ
6

Ѧ

земля
7

Ѧ

иже
8

Ѧ

фита
9

Ѧ

и
10

Ѧ

како
20

Ѧ

люди
30

Ѧ

мыслѣте
40

Ѧ

наш
50

Ѧ

кси
60

Ѧ

ом
70

Ѧ

покой
80

Ѧ

червь
90

Ѧ

рцы
100

Ѧ

слово
200

Ѧ

твёрдо
300

Ѧ

ук
400

Ѧ

ферт
500

Ѧ

хер
600

Ѧ

пси
700

Ѧ

о
800

Ѧ

цы
900

Позиционные системы

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах

изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): 10



Другие позиционные системы:

- двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- 60-ричная (1 мин = 60 секунд, 1 ч = 60 мин)

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Двоичная система счисления

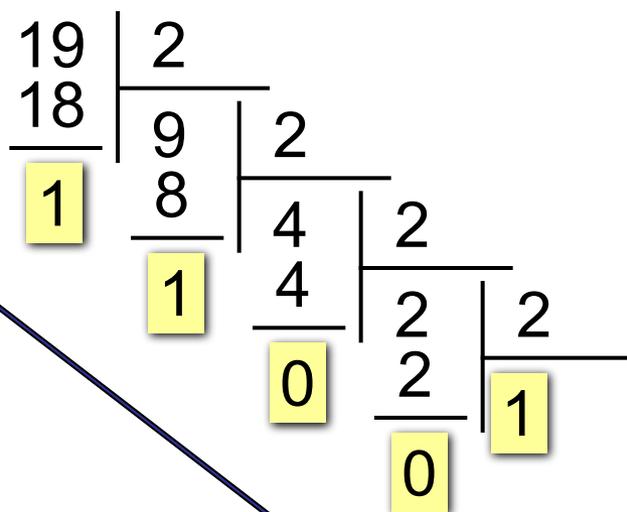
Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): 2

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система
счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 разряды

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

2

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

Примеры (2 варианта, решить самостоятельно):

131

=

101011₂

=

79

=

110110₂

=

Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0,375 = 0,011$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$0,750$$

$$0,75$$

$$\times \quad 2$$

$$1,50$$

$$0,5$$

$$\times \quad 2$$

$$1,0$$



$$0,7 = ?$$

$$0,7 =$$

$$0,101100110\dots$$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$101,011$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375$$

2

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} =$$

$$0,25$$

Примеры (по 1 на каждый вариант):

0,625

=

3,875

=

Арифметические операции

сложение

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=10_2$$

$$1 + 1 + 1 = 11_2$$

перенос

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0_2 \\ \hline 1011011 \\ \hline 1_2 \end{array}$$

вычитание

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad 10_2-1=1$$

заем

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ 0110 \\ \hline \cancel{10_2} \cancel{0} \cancel{0} \cancel{0} \cancel{10_2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1_2 \\ \hline -0101010 \\ \hline 1_2 \end{array}$$

18

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

умножение

деление

e

$$\begin{array}{r} 10101_2 \\ \times 10 \\ \hline 121010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1_2 \\ + 101010_2 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1010 \quad | \quad 11 \\ \hline 1_2 \quad | \quad 121_2 \\ - 111_2 \\ \hline 1_2 \\ - 110 \\ \hline 1_2 \end{array}$$

Плюсы и минусы двоичной системы

-  нужны технические устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
 - **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов;
 - выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.
-
-  простые десятичные числа записываются в виде **бесконечных** двоичных дробей;
 - двоичные числа имеют **много разрядов**;
 - запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

$$\begin{array}{r|l} 100 & 8 \\ \hline 96 & 12 \\ \hline 4 & 8 \\ & \hline & 4 \\ & \hline & 1 \end{array}$$

$$100 = 144_8$$

система
счисления

8 → 10

2 1 0 разряды

$$= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$$

$$144_8 = 64 + 32 + 4 = 100$$

Примеры:

134

=

75

=

134₈

=

75₈

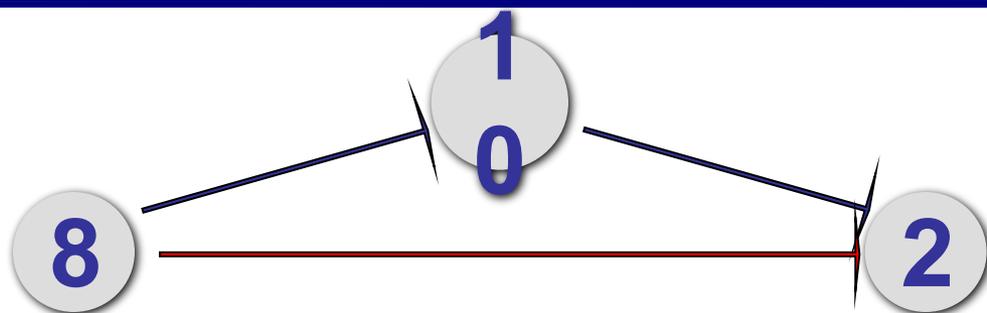
=

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



- трудоемко
- 2 действия

$$8 =$$

$$2^3$$



Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5_2$$

Примеры:

3467₈

=

~~**2148₈**~~

=

7352₈

28

Перевод из двоичной системы

1001011101111

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

001 001 011 101

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

001 001 011 101

111₂ 1 3 5 7

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

101101010010_2

=

11111101011_2

=

1101011010_2

=

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040 \end{array}$$

8

1 в перенос

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0 \quad \text{1 в перенос}$$

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

• •

$$\begin{array}{r} 456_8 \\ - 277_8 \\ \hline 157 \end{array}$$

8

заем

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

заем

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Шестнадцатиричная система счисления

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр):

16

A, B, C, D, E, F

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

10 → 16

$$\begin{array}{r|l} 107 & 16 \\ \hline 96 & 6 \end{array}$$

$$107 = 6B_{16}$$

система
счисления

B

11

16 → 10

2 1 0 разряды

C

$$\begin{aligned} 1C5_{16} &= 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 \\ &= 256 + 192 + 5 = 453_{10} \end{aligned}$$

Примеры:

171

=

206

=

1BC₁₆

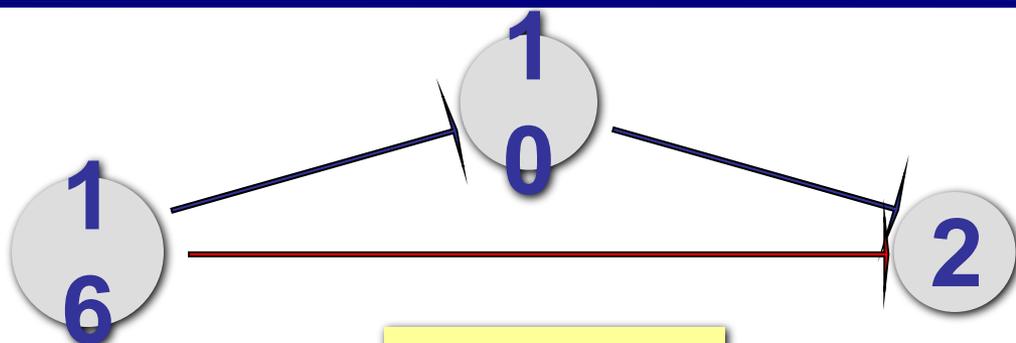
=

22B₁₆

=

X_{10}	X_{16}	X_2		X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000		8	8	1000
1	1	0001		9	9	1001
2	2	0010		10	A	1010
3	3	0011		11	B	1011
4	4	0100		12	C	1100
5	5	0101		13	D	1101
6	6	0110		14	E	1110
7	7	0111		15	F	1111

Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

$$16 = 2^4$$

! Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1111}_F \underbrace{0001}_1 \underbrace{1010}_A_2$$

Примеры:

C73B₁₆
=

2FE1₁₆
=

Перевод из двоичной системы

1001011101111

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

0001 0010 1110

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

0001 0010 1110

1 1 2 E F

Ответ: $1001011101111_2 =$

$12EF_{16}$

Примеры:

1010101101010110₂

=

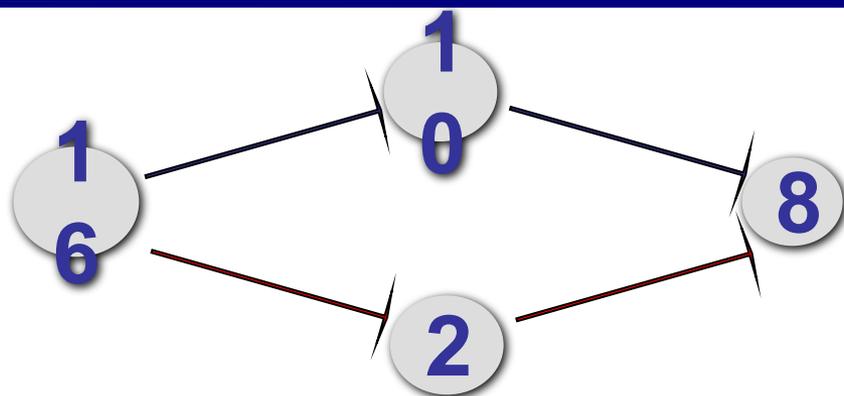
111100110111110101₂

=

110110110101111110₂

=

Перевод в восьмеричную и обратно



трудоемко

Шаг 1. Перевести в двоичную

систему:

$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$

Шаг 2. Разбить на

триады: $011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная

цифра: $3DEA_{16} = 36752_8$

Примеры:

$$A35_{16} \\ =$$

$$765_8 \\ =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{D} \end{array}$$

9_{16}

$$\begin{array}{r} \bullet \quad \bullet \\ \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{13 } 9 \end{array}$$

1 в перенос

$$11 + 14 = 25 = 16 + 9$$

$$5 + 7 + 1 = 13 = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = 16 + 6$$

Пример:

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

заем

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D} \end{array}$$

D_{16}

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \cdot \\ 12 \ 5 \ 11 \\ - 10 \ 7 \ 14 \\ \hline 1 \ 13 \ 13 \end{array}$$

заем

$$(11 + 16) - 14 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(5 - 1) + 16 - 7 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(12 - 1) - 10 = 1$$

Пример:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ B A}_{16} \\ - \text{ A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

«ЛОМАЕМ» ГОЛОВУ *стихотворение А.Н.Старикова:*

Ей было 1100 лет,
Она в 101-й класс ходила,
В портфеле по 100 книг носила -
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато 100-ногий.
Она ловила каждый звук
Своими 10-ю ушами,
И 10 загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И 10 темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Поняли ли вы рассказ поэта?



«ЛОМАЕМ» голову

Шел Кондрат
В Ленинград,
А навстречу – 1100 ребят.
У каждого по 11 лукошек,
В каждом лукошке – кошка,
У каждой кошки – 1100 котят.
У каждого котенка
В зубах по 100 мышат.
И задумался старый Кондрат:
«Сколько мышат и котят
Ребята несут в Ленинград?»



«ЛОМАЕМ» голову

10 ног на 11 ногах,
А 100 в зубах.
Вдруг 100 прибежали
И с одного убежали.
Подскочили 10 ног,
Ухватили 11 ног,
Закричали на весь дом –
Да 11 по 100!
Но 100 завизжали
И с одного убежали.



Пословицы и поговорки с использованием СС

Конь о 100 ногах и тот спотыкается.

У 111 мамок дитя без глаза.

За битого 10 небитых дают.

За 10 зайцами погонишься – ни одного не поймать.

Старый друг лучше новых 10.

Один воин 1111101000 водит.

Не держи 1100100 рублей, а держи 1100100 друзей.

Не велик городок, до 111 воевод.

В добрую голову 1100100 рук.

1010 раз смеряй, одинажды отрежь.

Ум хорош, а 10 лучше.

Богатый не то 10 раз обедает, а бедному мосол, он и сыт и весел.

10 медведей в одной берлоге не уживутся.

Пословицы и поговорки с использованием СС

Добрый друг лучше 1100100 родственников.

С одного вола, 10 шкур не дерут.

111 пятниц на неделе.

111 пядей во лбу.

Один с сошкой, а 111 с ложкой.

У бедного Тимошки скота – то 10 кошек.

Хата брата все богата: 10 полен, 11 ушат.

За 1 ученого, 10 неученых дают.

Хорошо ружьецо бьет, с печи упало 111 горшков разбило.

Без 100 углов изба не рубится.

За 111 печатями.

111 одного не ждут.

От горшка 11 вершков.

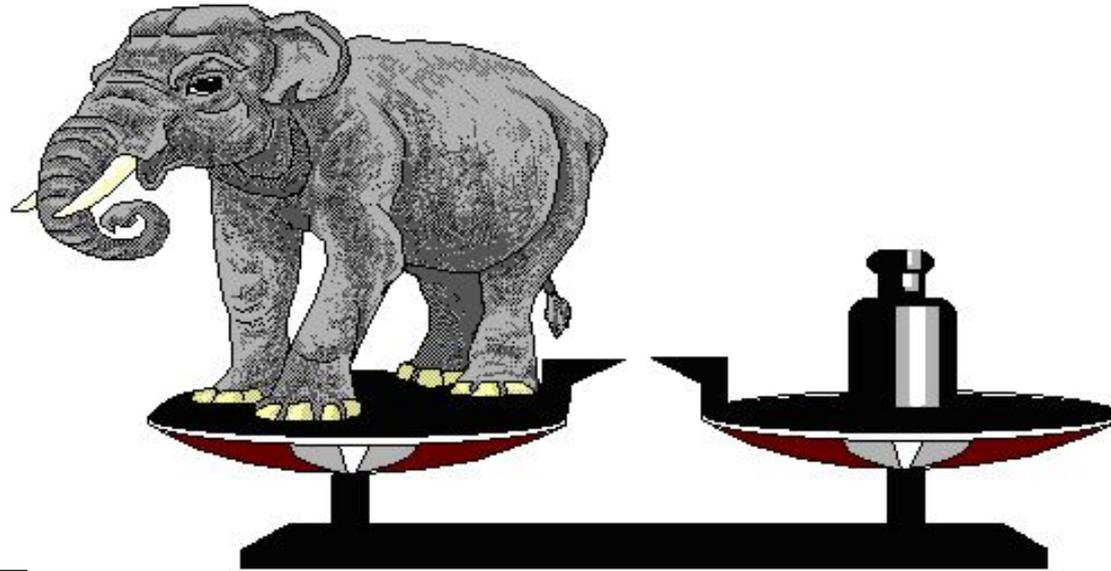
1 дурак, а умных 101 ссорит.

1 дурак может больше спросить, чем 1010 умных
ответить.

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Другие системы счисления

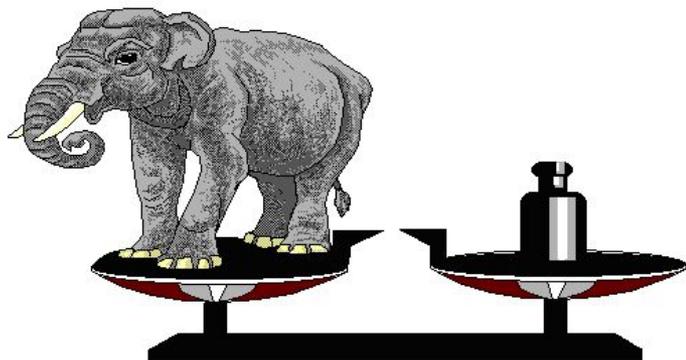
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гирь можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа
0 гиря снята
- 1 гиря слева

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$

1 1 1 1_{Зур} = 40

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов



Троичная система!

**Системы счисления.
Логические основы ЭВМ**

Логические основы ЭВМ

Логические основы ЭВМ

Принципы работы ЭВМ основываются на законах математической логики, поэтому ее элементы широко используются для поиска и обработки информации и при разработке схем электронных устройств.

Математическая логика – это наука о формах и способах мышления и их математическом представлении.

Мышление основывается на понятиях, высказываниях и умозаклчениях.

Понятие объединяет совокупность объектов, обладающими некоторыми существенными признаками, которые отличают их от других объектов.

Логические основы ЭВМ

Понятие имеет две характеристики:

- 1) содержание;
- 2) объем.

Содержание понятия – это совокупность существенных признаков, выделяющих объекты, соответствующие данному понятию, среди других объектов. Например, содержание понятия «человек» можно раскрыть так: «Общественное существо, обладающее сознанием и разумом».

Объем понятия «человек» определяется численностью людей, живущих в мире.

Логические основы ЭВМ

Высказывание (суждение, утверждение) – это повествовательное предложение, в котором утверждаются или отрицаются свойства реальных предметов и отношения между ними. Высказывание может быть истинным или ложным.

Истинным называется высказывание, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей, например: «Москва – столица России». Истинность высказывания кодируется единицей (1) и имеет значение «истина».

Ложным высказывание будет в том случае, когда оно не соответствует реальной действительности, например: «Париж – столица США». Ложность высказывания кодируется нулем (0) и имеет значение «ложь».

Обычно высказывания обозначаются логическими переменными – заглавными латинскими буквами с индексом или без, например, $A = \text{«Сегодня идет дождь»}$.⁶⁰ Логические переменные принимают только два значения 0 и 1

Логические основы ЭВМ

Умозаключение позволяет из известных фактов (истинных высказываний) получать новые факты. Например, из факта «Все углы треугольника равны» следует истинность высказывания «Этот треугольник равносторонний».

Высказывания и логические операции над ними образуют алгебру высказываний (булеву алгебру), предложенную английским математиком Джорджем Булем.

Системы счисления. Логические основы ЭВМ

Логические операции

Логические операции

Основные логические операции над высказываниями, используемыми в ЭВМ, включают отрицание, конъюнкцию, дизъюнкции, стрелку Пирса и штрих Шеффера. Рассмотрим эти логические операции.

1. Отрицание (обозначается также $\neg X$, $\sim X$).

Отрицание ~~X~~ (NOT, читается «не X») – это высказывание, которое истинно, если X ложно, и ложно, если X истинно.

2. Конъюнкция XY ($X \& Y$, $X \wedge Y$).

Конъюнкция XY (AND, логическое умножение, «X и Y») – это высказывание, которое истинно только в том случае, если X истинно и Y истинно.

3. Дизъюнкция $X+Y$ ($X \vee Y$).

Дизъюнкция $X+Y$ (OR, логическая сумма, «X или Y или оба») – это высказывание, которое ложно только в том случае, если X ложно и Y ложно.

Логические операции

4. Стрелка Пирса $X \downarrow Y$.

Стрелка Пирса $X \downarrow Y$ (NOR (NOT OR), ИЛИ-НЕ) – это высказывание, которое истинно только в том случае, если X ложно и Y ложно.

5. Штрих Шеффера $X | Y$.

Штрих Шеффера $X | Y$ (NAND (NOT AND), И-НЕ) – это высказывание, которое ложно только в том случае, если X истинно и Y истинно.

Определить значения логических операций при различных сочетаниях аргументов можно из **таблицы истинности**.

Логические операции

Таблица истинности для основных логических операций, используемых в ЭВМ

X	Y		XY	$X + Y$	$X \downarrow Y$	$X Y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0

Чтобы определить значение операции $0 + 1$ в таблице истинности, необходимо на пересечении столбца $X + Y$ (определяет операцию) и строки, где $X = 0$ и $Y = 1$ (так первый аргумент равен 0, а второй – 1), найти значение 1, которое и будет являться значением операции $0 + 1$.

Логические операции

В алгебре высказываний существуют две нормальные формы: конъюнктивная нормальная форма (**КНФ**) и дизъюнктивная нормальная форма (**ДНФ**).

КНФ – это конъюнкция конечного числа дизъюнкций нескольких переменных или их отрицаний (произведение сумм). Например, формула $X(Y + Z)$ находится в КНФ.

ДНФ – это дизъюнкция конечного числа конъюнкций нескольких переменных или их отрицаний (сумма произведений). Например, формула $X + YZ$ находится в ДНФ.