

# Модели атомных ядер

# Модели атомных ядер.

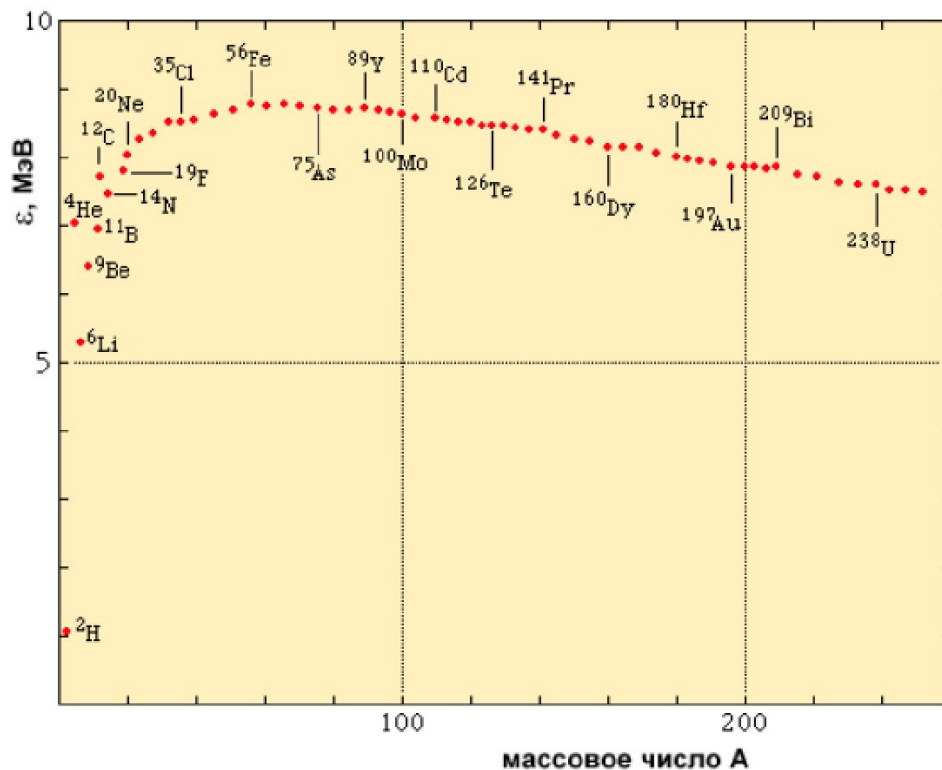
- Что мы ждём?
- Микроскопические и коллективные модели.
- Модель жидкой капли.
- Оболочечная модель.
- Модель Ферми-газа.
- Оптическая модель.

# Что мы ждём?

- Стабильность ядер?
- Виды распадов?
- Энергии и угловые распределения частиц?
- Радиусы, массы, энергии связи?
- Спины, моменты, чётности?
- Энергетические уровни?
- Вероятности переходов?
- Сечения взаимодействия?
- Распространённость изотопов?
- .....

# Физические обоснования моделей

1. Плотность ядерного вещества приблизительно постоянна:  $R = r_0 \cdot A^{1/3}$ ,  $\rho \approx 0.17$  нуклон/ферми<sup>3</sup>
2. Удельная энергия связи приблизительно постоянна



$$\epsilon(A, Z) = \frac{W(A, Z)}{A}$$

**Свойства 1 и 2 обусловлены природой ядерных сил, которые имеют конечный радиус действия и вызывают сильное взаимное притяжение нуклонов, находящихся друг от друга на расстоянии от  $\sim 2$  ферми до  $\sim 0.5$  ферми, но при уменьшении этого расстояния начинают действовать как очень сильные отталкивающие силы.**

# Коллективные модели

- в этих моделях предполагается, что взаимодействие между соседними нуклонами настолько велико, что степени свободы индивидуальных нуклонов можно не учитывать (капельная модель, макроскопические модели).

# Физические обоснования моделей

- Средняя длина пробега нуклонов в ядре велика по сравнению с расстоянием между ними и превышает размеры ядра. Взаимодействие нуклонов приводит к возникновению среднего ядерного поля, в котором частицы движутся независимо друг от друга.

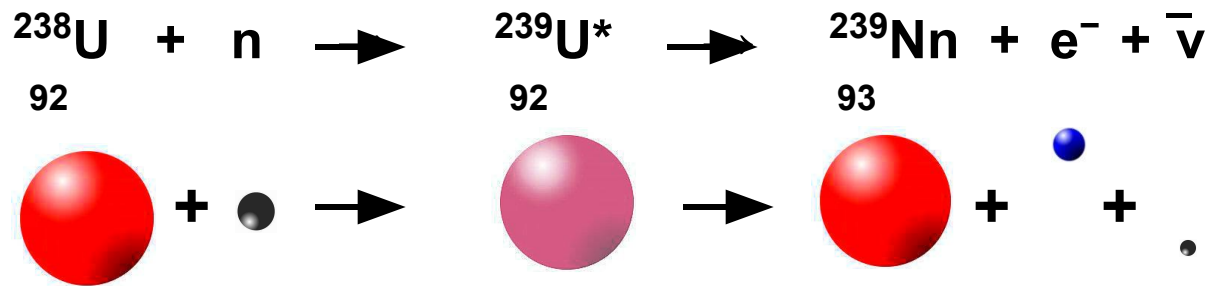
(модели независимых частиц,  
микроскопические модели)

# Капельная модель

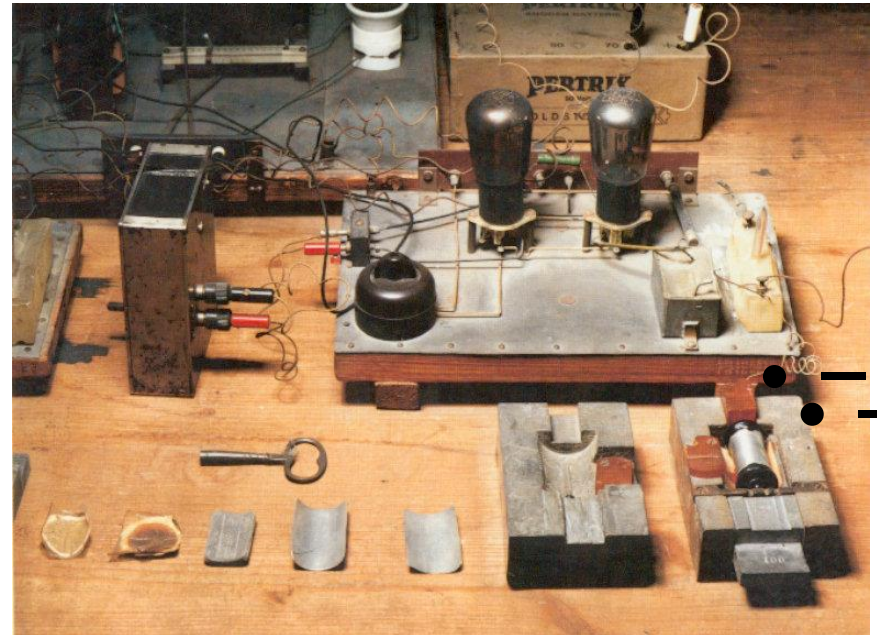
- **Опыты Резерфорда по изучению  $\alpha$ -радиоактивности 1911 год.**
- **$R = r_0 \cdot A^{1/3}$ ,**
- **$\rho_n = A/V = A/(4/3\pi R^3) \approx 10^{38}$  нуклон/см<sup>3</sup>,**
- **$\rho(\text{г/см}^3) = \rho_n m_n \approx 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>**



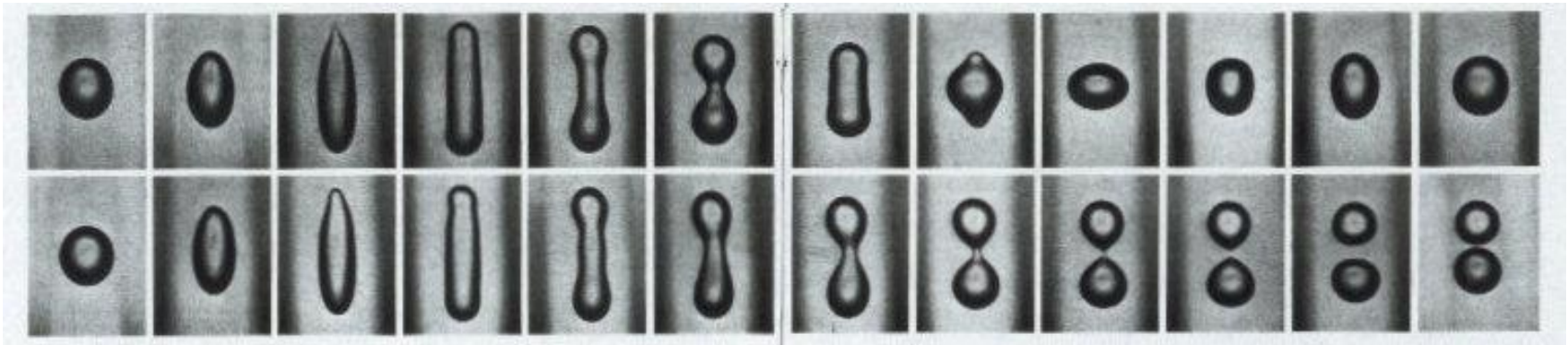
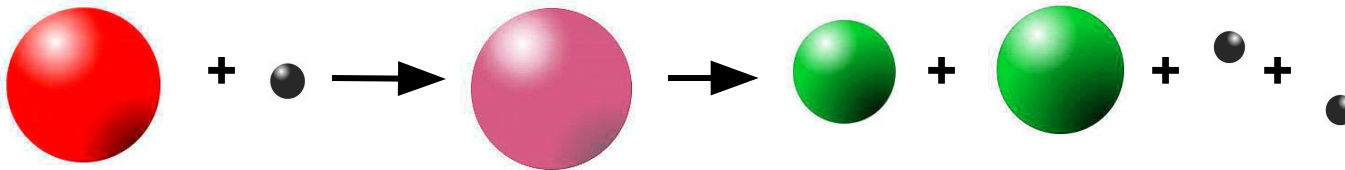
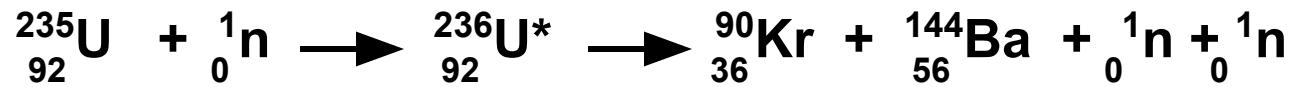
# 1934: поиск трансуранов



Otto Hahn und Lise Meitner



# 1938: открытие деления ядер



Модель жидкой капли

# Формула Вайцзеккера

- Энергия связи ядра  $W(A,Z)$  – энергия, которая необходима для того, чтобы разделить ядро на отдельные составляющие его нуклоны.

$$W \approx \alpha A$$

- Нуклоны неравноценны

$$W \approx \alpha A - \beta A^{2/3}$$

- Кулоновское расталкивание

$$W \approx \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z^2 / A^{1/3}$$

# «Некапельные» члены

- «Энергия симметрии»

$$- \delta (A/2 - Z)^2/A$$

- Эффекты чётности

$$\zeta A^{-3/4}$$

$\zeta = +34$  МэВ – чётно-чётные ядра;

$\zeta = 0$  – нечётные ядра;

$\zeta = -34$  МэВ – нечётно-нечётные ядра.

# Формула Вайцзеккера

$$W(A, Z) = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \delta \frac{(A-2Z)^2}{A} + \zeta A^{-3/4}$$

$\alpha = 15.6$  МэВ,  
 $\beta = 17.2$  МэВ,  
 $\gamma = 0.72$  МэВ,  
 $\delta = 23.6$  МэВ.

$\zeta = +34$  МэВ – чётно-чётные ядра;  
 $\zeta = 0$  – нечётные ядра;  
 $\zeta = -34$  МэВ – нечётно-нечётные ядра.

# Область применения

- Вычисление энергии связи с точностью  $\sim 10^{-4}$
- Вычисление масс ядер;
- Вычисление энергий отделения частиц;
- Вычисление энергий распадов;
- Колебания жидкости;
- Качественная теория деления ядер;
- Линия  $\beta$ -стабильности.

# Недостатки

- **Непоследовательность модели;**
- **Низкая точность;**
- **Качественный характер;**
- **Игнорирует периодичность.**

# Модель ферми-газа

- В этой модели рассматривается движение невзаимодействующих друг с другом нуклонов в области объемом  $V$ , в пределах которой потенциал считается постоянным,
- Волновые функции нуклонов – плоские волны,
- В ограниченном объеме  $V$  возможен только дискретный набор значений вектора импульса,  $\vec{p} = \{ p_x, p_y, p_z \}$
- На каждом нейтронном (или протонном) уровне могут в соответствии с принципом Паули находиться только два нейтрона (или протона), имеющие разные проекции спина,
- Граница, разделяющая заполненные и незаполненные одночастичные уровни, называется границей Ферми.



- Из статистики Ферми:

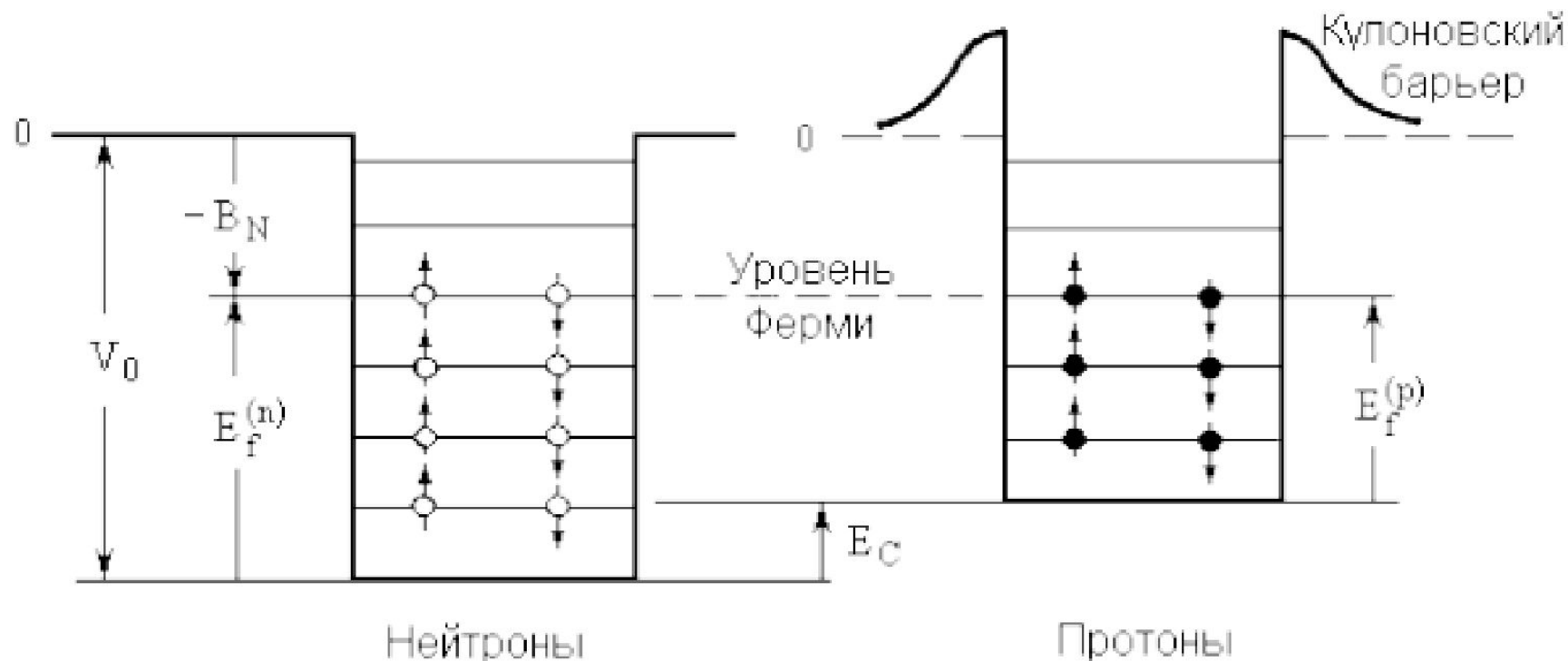
$$p_f^{(n)} = (3 \pi^2 \hbar^3 N/V)^{1/3}, \text{ и } p_f^{(p)} = (3 \pi^2 \hbar^3 N/V)^{1/3}.$$

$$p_f = p_f^{(n)} = p_f^{(p)} = ((9 \pi \hbar)/(8r_0))^{1/3} = 8.1 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с/Ферми},$$

$$E_f^{(n)} = \frac{(p_f^{(n)})^2}{2m}, \quad E_f^{(p)} = \frac{(p_f^{(p)})^2}{2m}$$

$$E_f = E_f^{(n)} = E_f^{(p)} = 32 \text{ МэВ}.$$

# Нейтронные и протонные одночастичные уровни энергии в модели ферми-газа.



## Область применения

- В случаях, где важно движение нуклонов внутри ядра: рождение частиц, некоторые реакции.

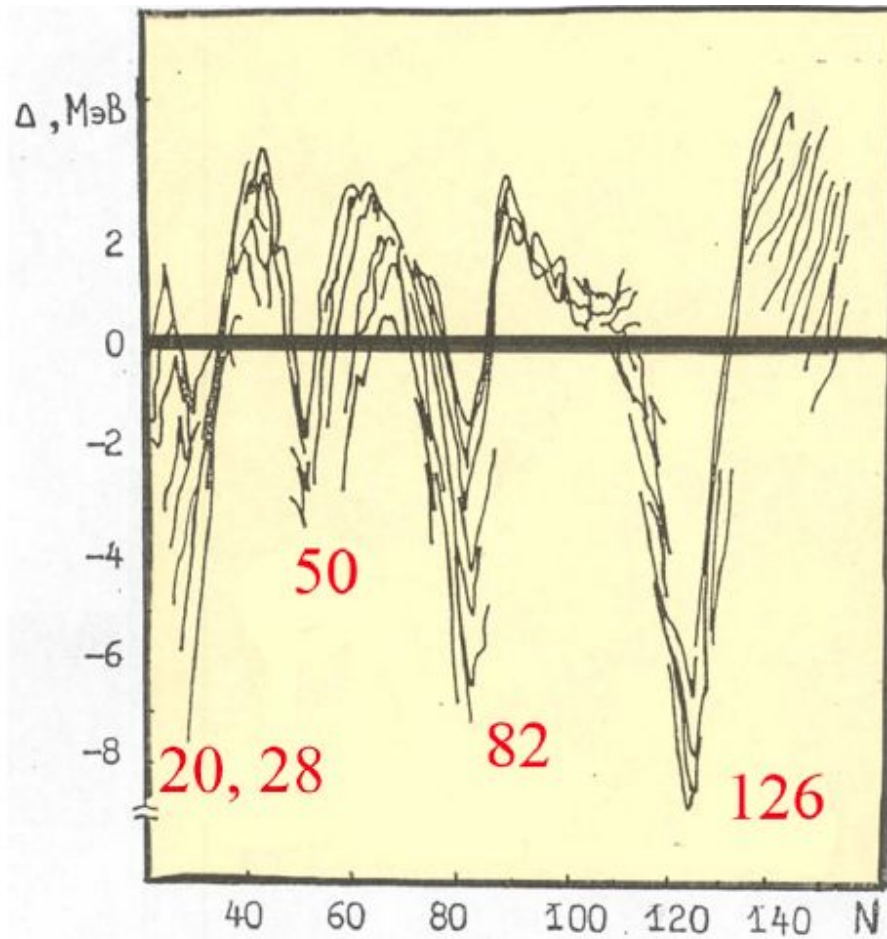
# Оболочечная модель

- В модели оболочек предполагается, что нуклоны движутся независимо друг от друга в сферически-симметричной потенциальной яме. Собственные состояния нуклона в такой яме находят, решая соответствующее уравнение Шредингера.

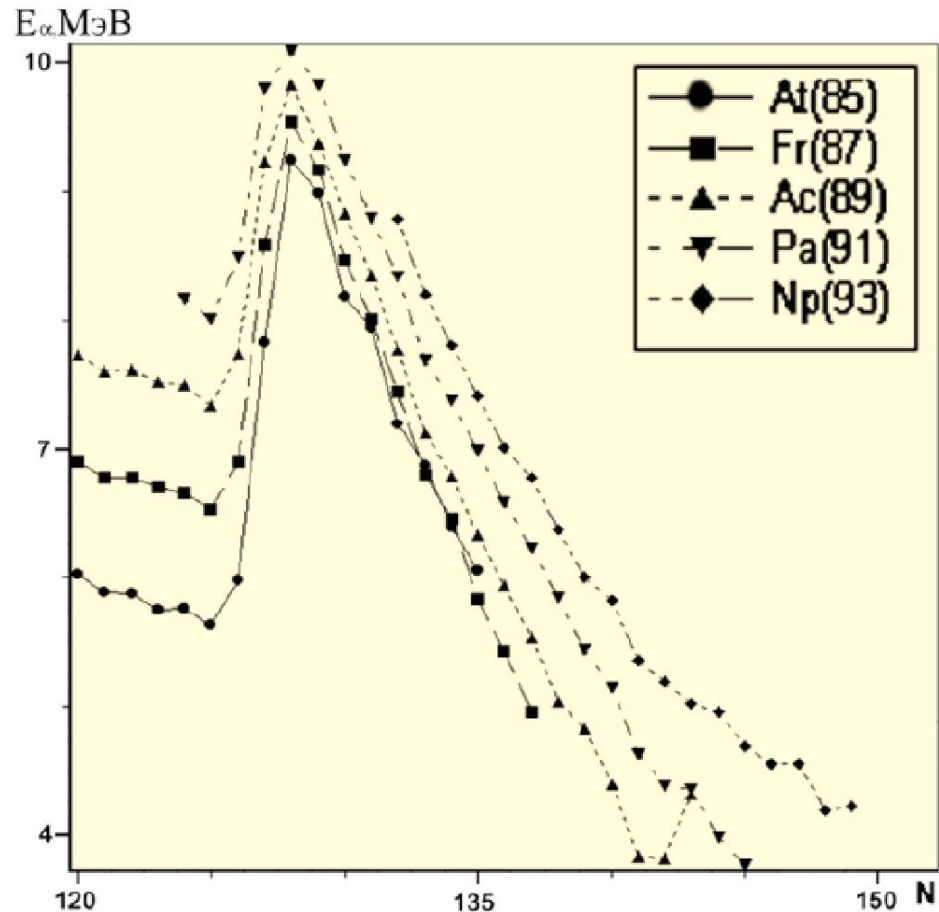
# Обоснование модели

- Периодичность свойств;
- Магические числа: 2, 8, 20, 50, 82, 126;
- Нулевые квадрупольные моменты (сферичность ядер);
- Распространённость изотопов.

# Энергии связи ядер

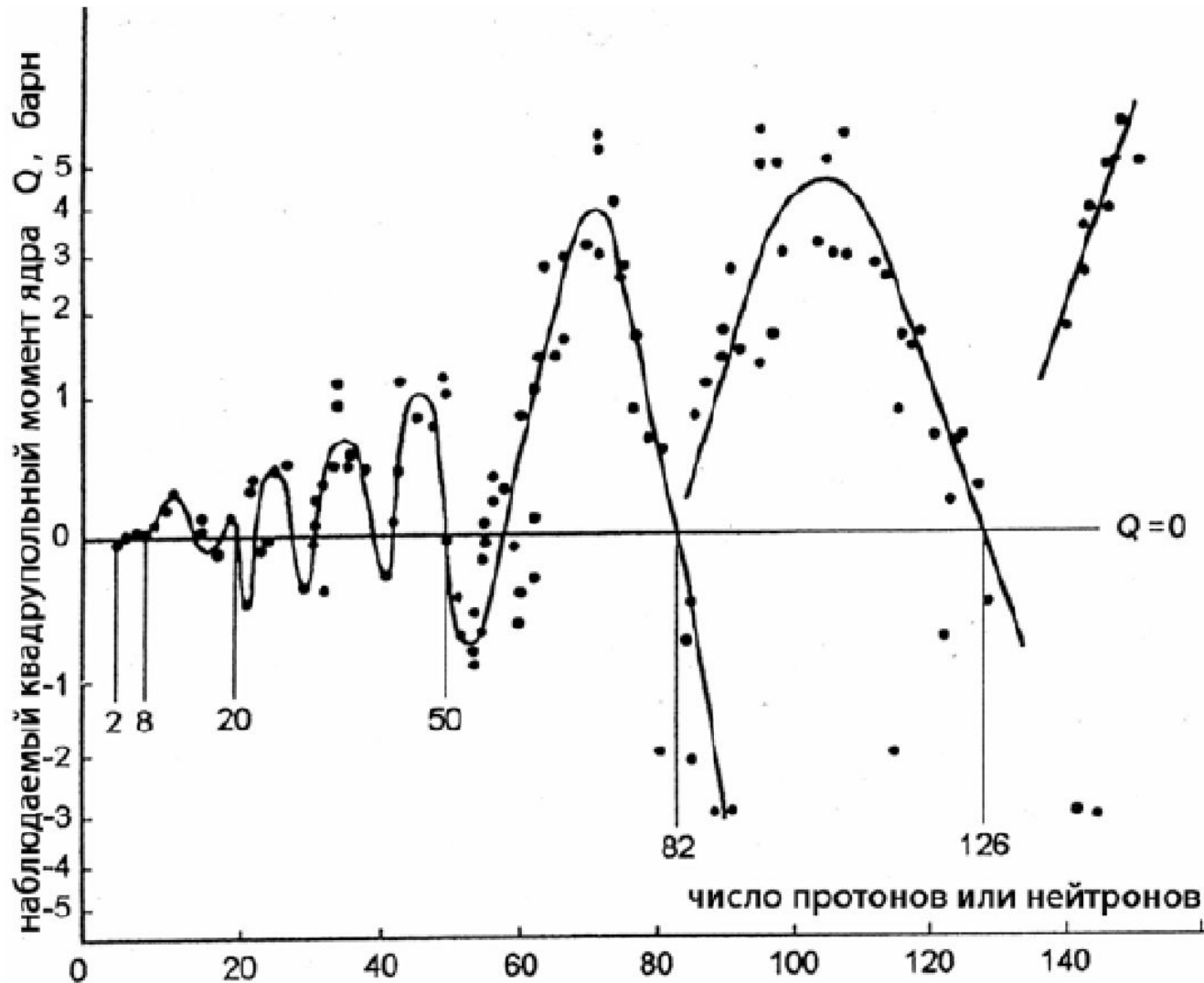


# Энергия $\alpha$ -распада $Q_\alpha(A, Z)$



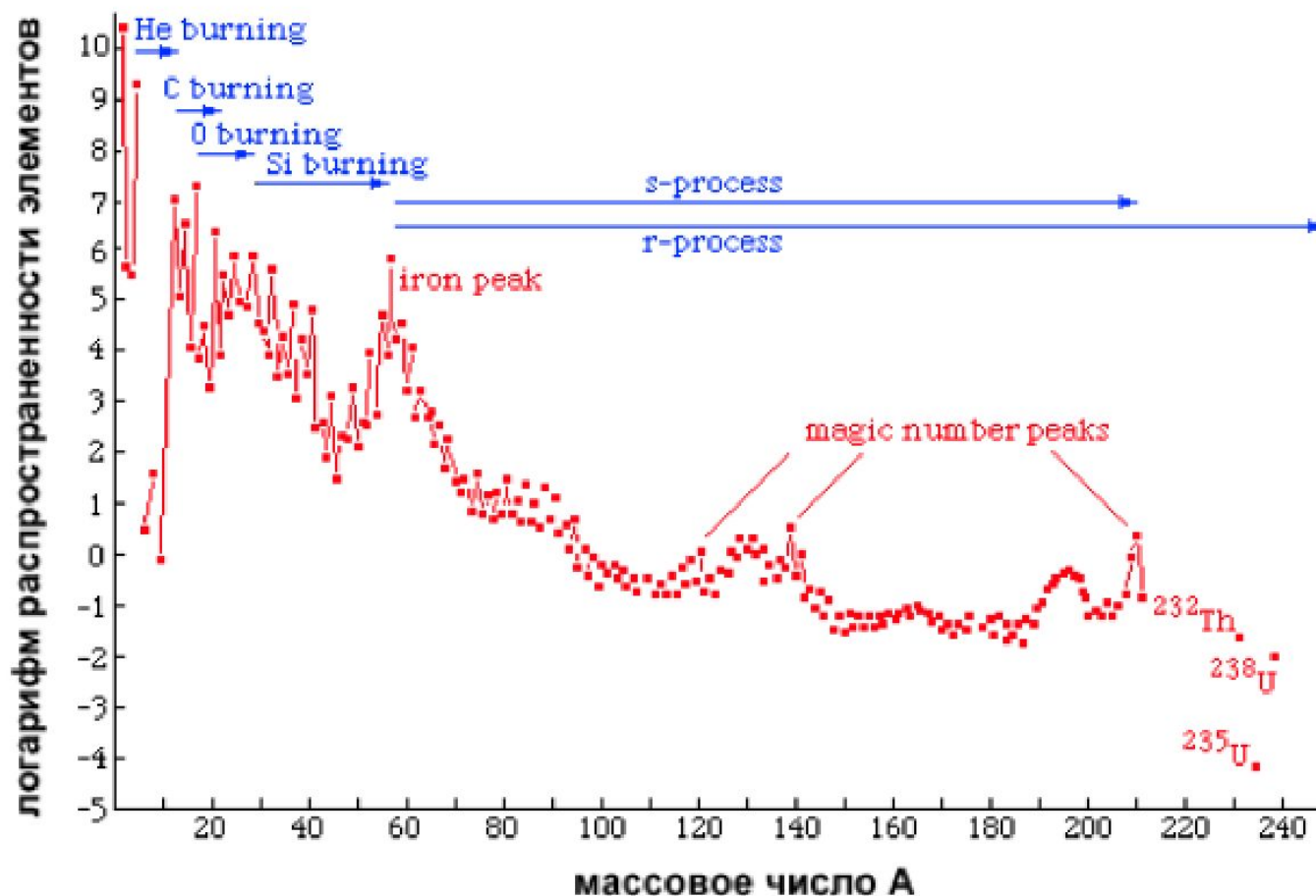
Зависимости энергии  $\alpha$ -распада  $E_\alpha$  изотопов  $Z = 85, 87, 89, 91, 93$  от числа нейтронов в ядре.

# Квадрупольные моменты ядер



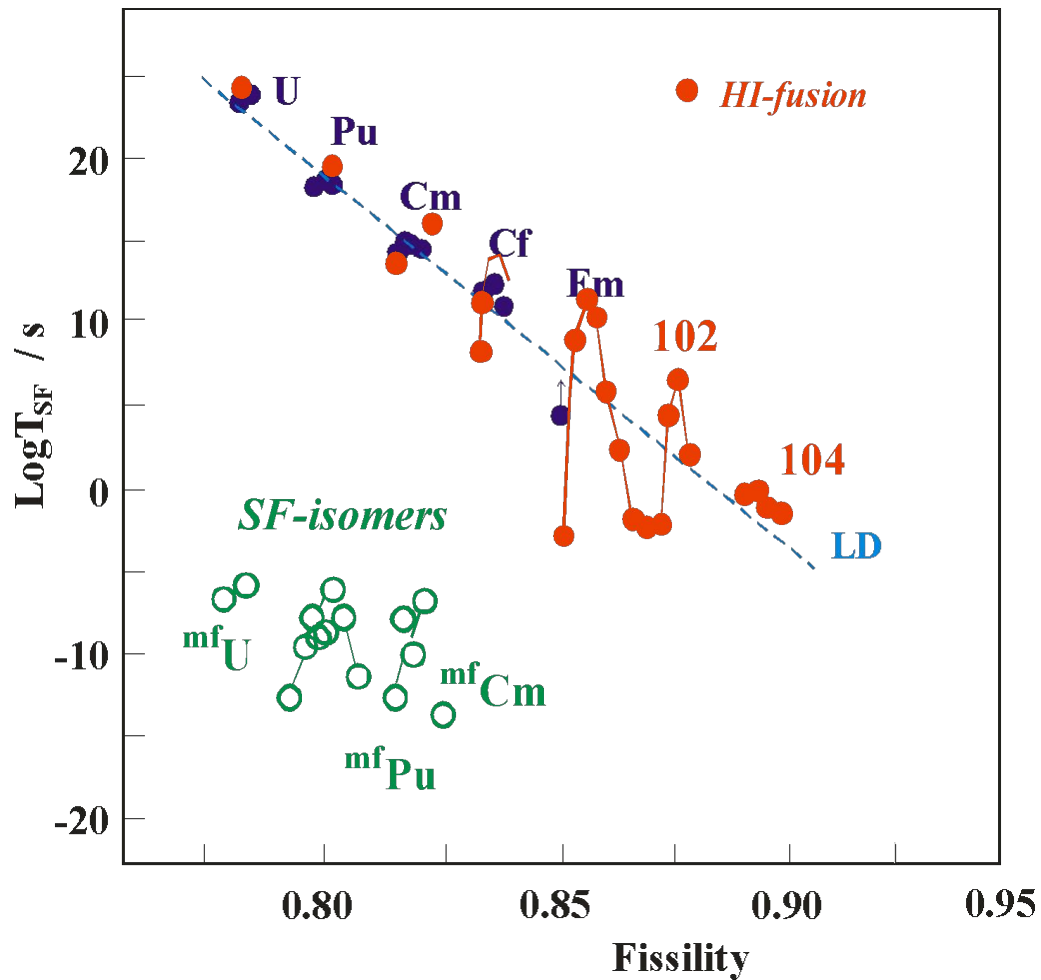


# Распространённость нуклидов во Вселенной



Распространенность *Si* принята равной  $10^6$ .

# Периоды полураспада актинилов



- **Первые попытки: Бартлет (1932 г.) и Эльзассер (1933 г.): объяснили 2, 8, 20.**
- **Окончательный вид 1949 г: М. Гепперт-Майер и Дж. Иенсен.**

# Построение модели

- **Принцип Паули выполняется.**
- **В атоме есть силовой центр и электроны слабо взаимодействуют между собой.**
- **В ядре нет силового центра, нуклоны сильно взаимодействуют между собой.**

$$n \approx 10^{38} \text{ нукл/см}^3; \sigma \approx 3 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2;$$

$$\lambda = 1/(n\sigma) \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ см !!}$$

# Построение модели

- **Малый радиус взаимодействия.**
- **Сложение эффектов от потенциальных ям.**
- **Большая плотность ядра → однородность потенциала.**
- **Принцип Паули → большая длина свободного пробега → отсутствие взаимодействия.**

## **Основные положения:**

- **В сферическом потенциале движутся невзаимодействующие нуклоны.**
- **Потенциал одинаков для протонов и нейтронов.**
- **Орбитальный момент является интегралом движения.**
- **Выполняется принцип Паули ( $2(2l+1)$ ).**
- **Решения уравнений Шредингера.**

# Ядерные потенциалы

В первом приближении можно считать ядерный потенциал сферически симметричным. В качестве потенциалов используют:

прямоугольную потенциальную яму  $V_{ня}$

$$V_{ня}(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq R, \\ 0, & r \geq R. \end{cases}$$

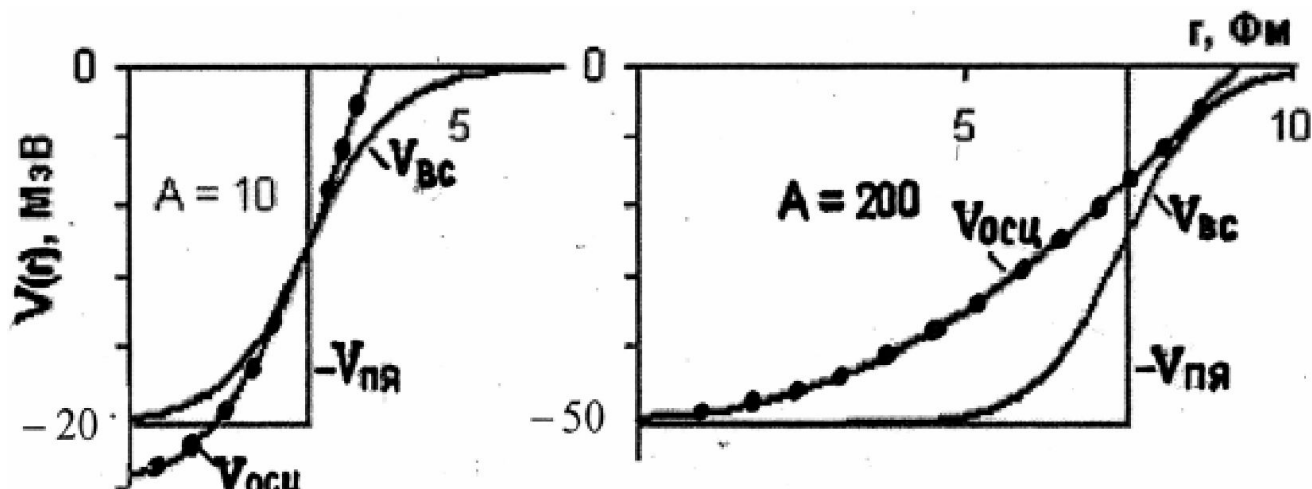
осцилляторный потенциал  $V_{осц}$ ,

$$V_{осц}(r) = -V_0 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2,$$

потенциал Вудса-Саксона  $V_{ВС}$ .

$$V_{ВС}(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}.$$

# Ядерные потенциалы



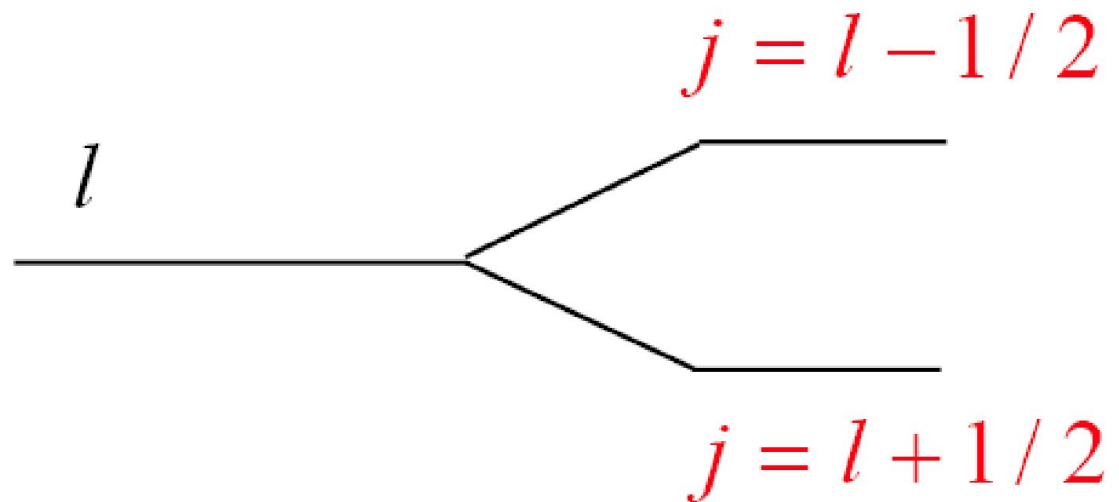
Магические числа в прямоугольной яме: 2, 8, 10, 20, 34, 40, 58, 68, 70, 92, 106, 112

**Необходимо вводить спин-орбитальное взаимодействие!**

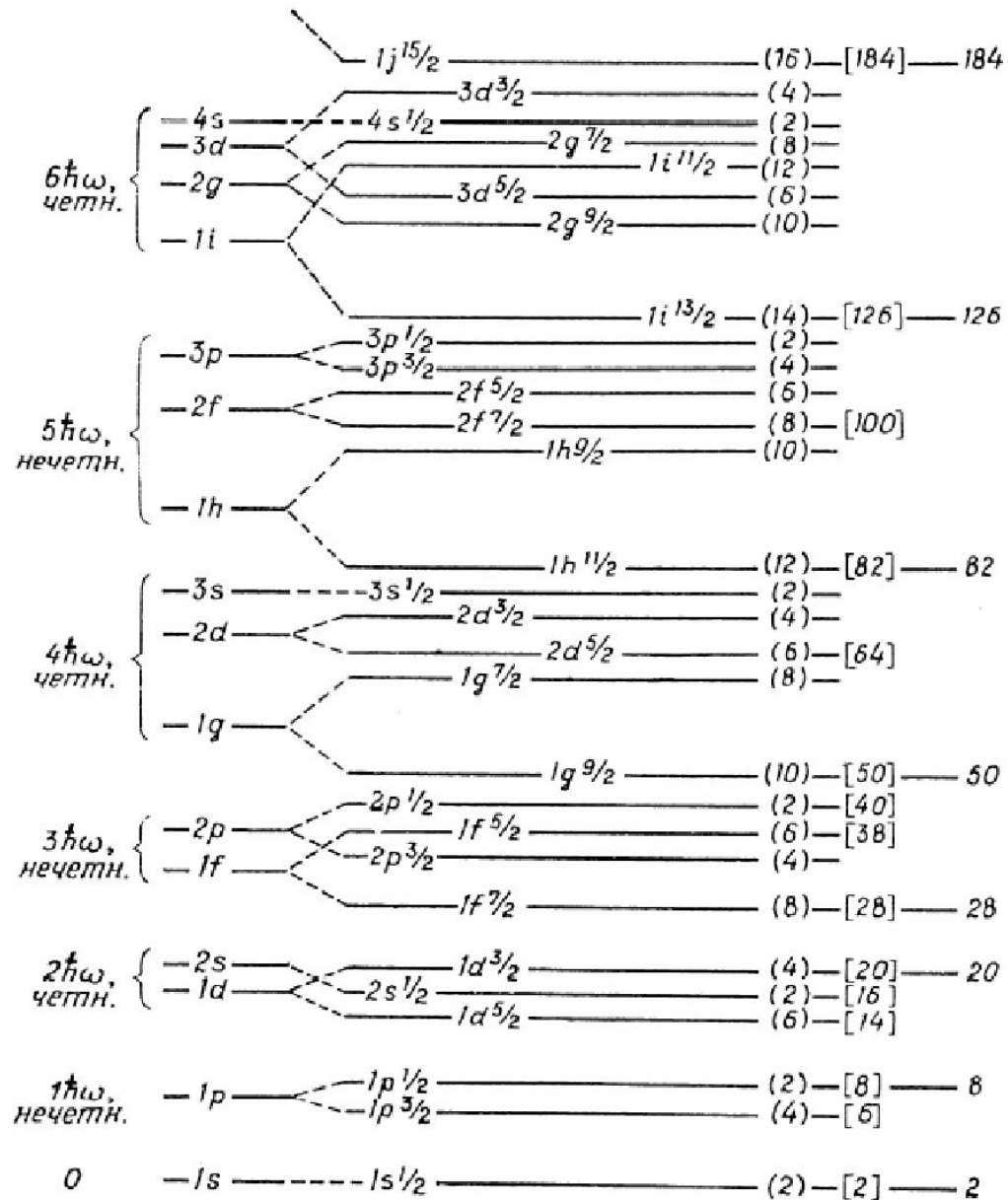


# Спин-орбитальное взаимодействие

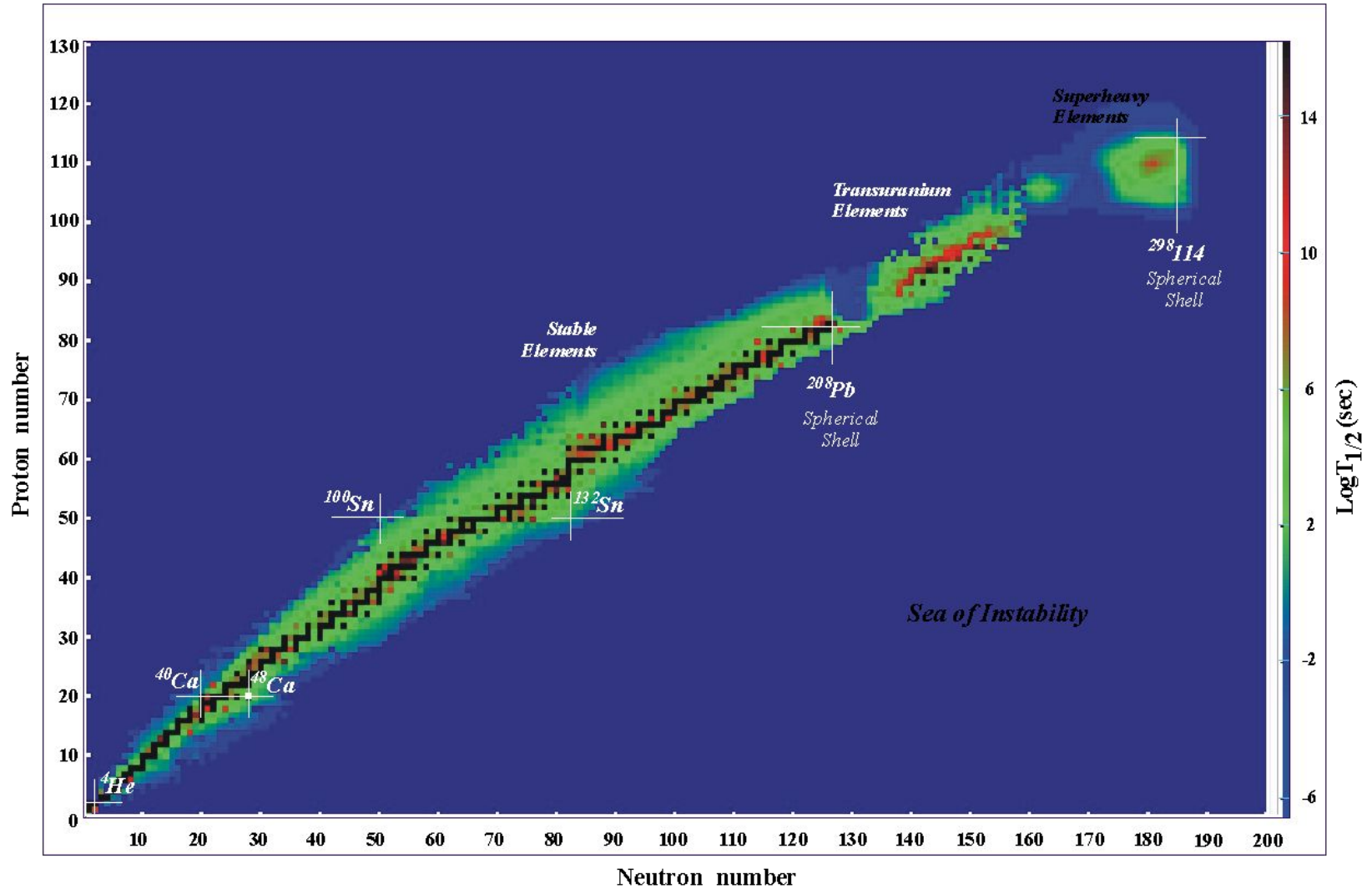
- Энергия состояния с данным  $l$  принимает два значения.
- Параллельной ориентации спина и момента соответствует большая энергия связи.
- Уровни с данным  $l$  расщепляются на два  $j = l \pm 1/2$
- $np \rightarrow np_{1/2}$  и  $np_{3/2}$
- $nd \rightarrow nd_{3/2}$  и  $nd_{5/2}$



# Одночастичные уровни в оболочечном потенциале



# Карта изотопов



# Недостатки оболочечной модели

- Объясняет немногие свойства ядер в основном состоянии.
- Неправильные значения спинов.
- Наличие вращательных уровней у чётно-чётных ядер.
- Заниженные значения электрических квадрупольных моментов.
- Заниженные вероятности E2 переходов.

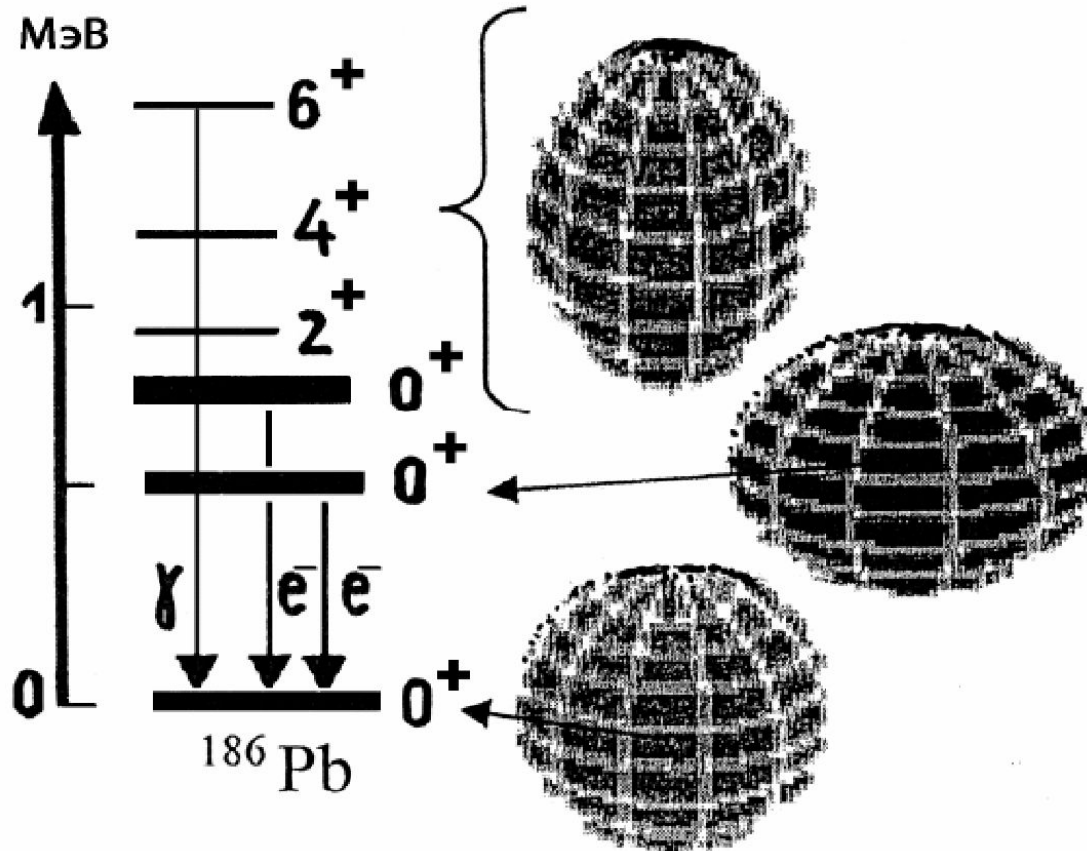
# Недостатки оболочечной модели

- Объясняет немногие свойства ядер в основном состоянии.
- Неправильные значения спинов.
- Наличие вращательных уровней у чётно-чётных ядер.
- Заниженные значения электрических квадрупольных моментов.
- Заниженные вероятности E2 переходов.

# Обобщённая модель ядра

- Потенциал не является жёстким.
- Взаимодействие определяется числом нуклонов сверх замкнутой оболочки.
- Центробежное давление на стенки ядра.
- Деформация ядер в основном состоянии.
- Появление вращательных степеней свободы.
- Перестройка остова ядра.
- Связь всех степеней свободы.

# Форма ядра



Форма атомных ядер может изменяться в зависимости от того, в каком возбужденном состоянии оно находится. Например, ядро  $^{186}\text{Pb}$  в основном состоянии ( $0^+$ ) сферически симметрично, в первом возбужденном состоянии  $0^+$  имеет форму сплюснутого эллипсоида, а в состояниях  $0^+, 2^+, 4^+, 6^+$  форму вытянутого эллипсоида.

# Одночастичные состояния в деформированных ядрах

- Аксиально-симметричный потенциал гармонического осциллятора – *потенциал Нильссона*.

$$V_{\text{Нильс}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} M \left[ \omega_{xy}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right] + C \bar{l} s + D \bar{l}^2,$$

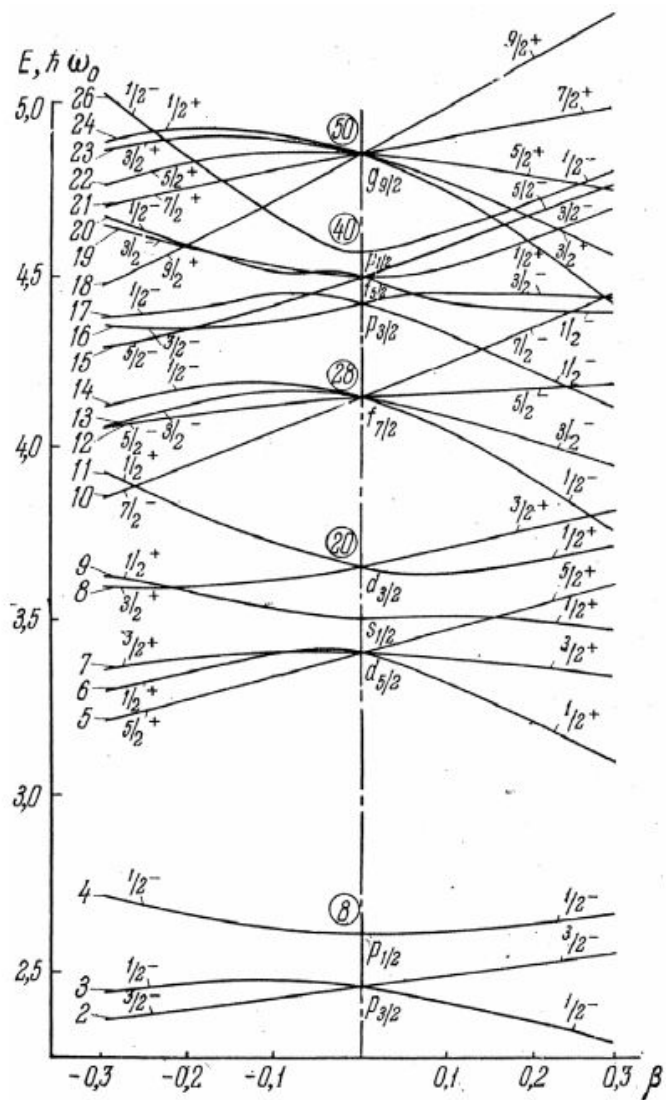
- Положение одночастичных уровней в потенциале Нильссона зависит от величины и знака параметра деформации  $\beta$ .

$$\omega_z = \omega_0 \left( 1 + \frac{2}{3} \beta \right), \quad \omega_{xy} = \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \beta \right).$$

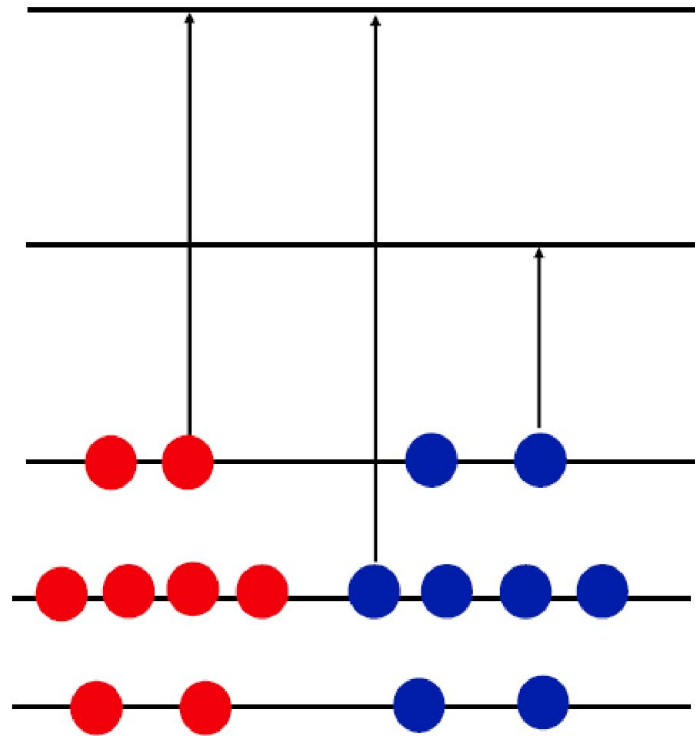


- В сферически-симметричной потенциальной яме состояния нуклона характеризуются квантовыми числами орбитального  $l$  и полного моментов  $j = l \pm 1/2$ , причем уровни вырождены по проекции момента  $j$  на ось  $z$ , т.е. кратность вырождения равна  $2j + 1$ .
- В деформированном ядре состояния нуклона нельзя характеризовать квантовыми числами  $l$  и  $j$ . Однако так как сохраняется симметрия относительно поворотов вокруг оси  $z$  (аксиальная симметрия), то момент количества движения, создаваемый нуклоном, характеризуют квантовым числом  $K$  проекции момента  $j$  на ось симметрии  $z$ .

# Одночастичные состояния в деформированных ядрах



# Одночастичные возбуждения атомных ядер

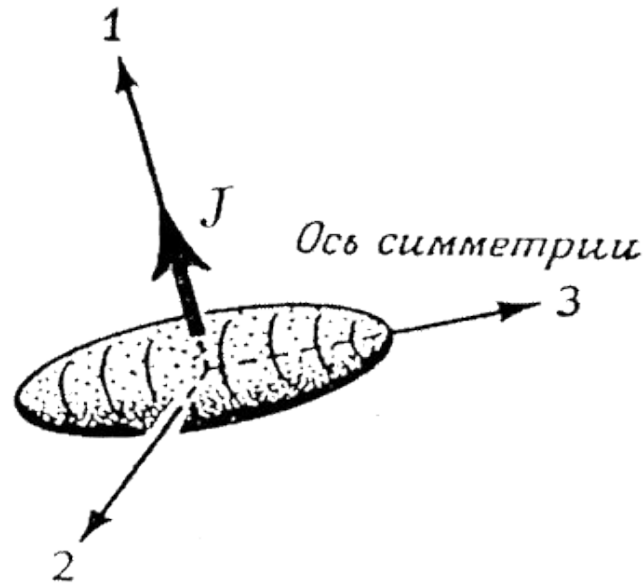


Одночастичные возбуждённые состояния ядер возникают при переходе одного или нескольких нуклонов на более высокие одночастичные орбиты.

# Вращательные состояния ядер

- Сферически-симметричное ядро не может иметь вращательной энергии.
- Если равновесная форма ядра не сферична (деформирована), то появляется пространственная анизотропия, а вместе с ней и вращательные степени свободы.
- Такое ядро обязательно имеет внутренний электрический квадрупольный момент  $Q_0$ .

# Аксиально-симметричный ротатор



- Форма ядра – эллипсоид вращения.
- Аксиально-симметричное ядро не может вращаться вокруг оси симметрии.
- Частота вращения ядра как целого мала по сравнению частотами внутреннего движения:  $\omega_{\text{вращ}} \ll \omega_{\text{внутр}}$
- Пренебрегают кориолисовыми и центробежными вращательными силами
- Рассматривают только коллективные переменные (углы поворота).

# Сложение моментов

- **Полный момент количества движения ядра складывается из коллективного вращательного момента ядра и внутреннего момента нуклонов**

$$\mathbf{I} = \mathbf{K} + \mathbf{\Omega}$$

$$E_{\text{вращ}} = \Omega^2 / 2J_{\text{эфф}} = (I^2 - K^2) / 2J_{\text{эфф}} = \hbar^2 / 2J_{\text{эфф}} [I(I+1) - K(K+1)]$$

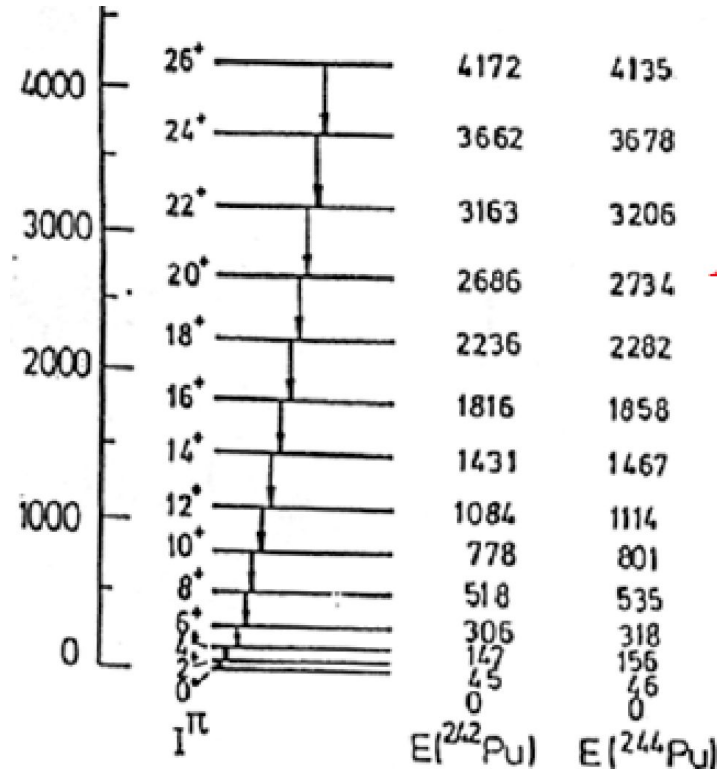
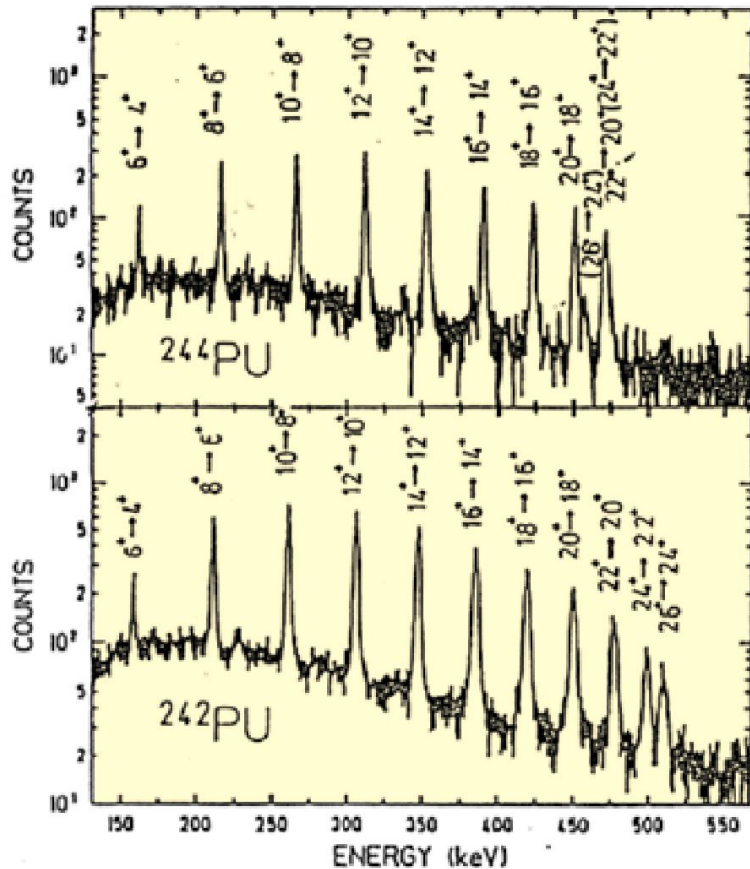
$$\text{При } K=0: E_{\text{вращ}} = \hbar^2 I(I+1) / 2J_{\text{эфф}}, I=0, 2, 4, 6$$

$$J_{\text{эфф}} = J_0 (\Delta R / R)^2$$

# Энергетические уровни $^{168}\text{Er}$

					<u>7</u> 1950.81
					<u>6</u> 1820.14
					<u>5</u> 1708.01
			<u>8</u> 1605.85		<u>4</u> 1615.36
			<u>7</u> 1448.97		<u>3</u> 1541.58
			<u>6</u> 1263.92		<i>K π = 5 -</i>
			<u>5</u> 1117.60		
			<u>4</u> 994.77		
			<u>3</u> 895.82	<u>8</u> 928.26	
			<u>2</u> 821.19		
			<i>K π = 2 +</i>		
				<u>6</u> 548.73	
				<u>4</u> 264.081	
				<u>2</u> 79.800	
				<u>0</u> 0	
				<i>K π = 0 +</i>	

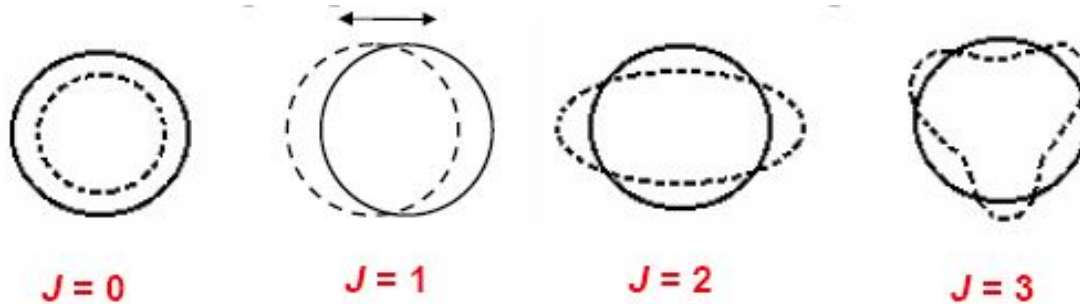
# Вращательные спектры



$$E_J = \frac{\hbar^2}{2J} J(J+1)$$



# Колебательные состояния ядер



*монополярные*    *дипольные*    *квадрупольные*    *октупольные*

Энергии квадрупольных и октупольных возбуждений в квантовой теории могут принимать дискретные значения

$$E_{\text{квадр}} = n_2 \hbar \omega_2, \quad E_{\text{окт}} = n_3 \hbar \omega_3,$$

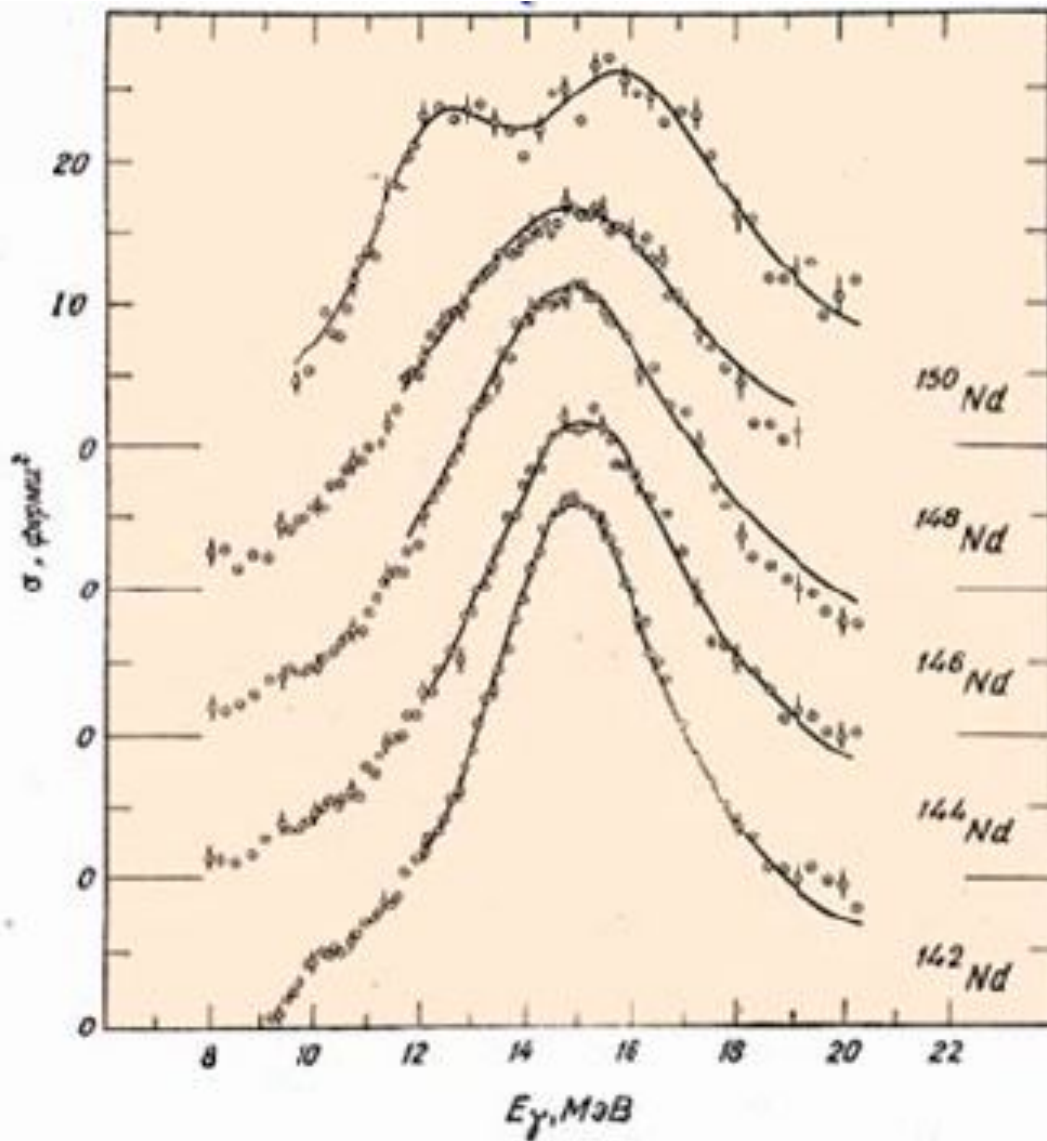
Энергия возбуждения ядра, в котором одновременно происходят различные поверхностные колебания формы, имеет вид

$$E = \sum_{J \geq 2} n_J \hbar \omega_J$$

$n_J$  – число фононов определенного типа,

$\hbar \omega_J$  – энергия фонона.

# Гигантские резонансы



# Пример

Массы нейтральных атомов в атомных единицах массы:  $^{16}\text{O}$  — 15,9949,  $^{15}\text{O}$  — 15,0030,  $^{15}\text{N}$  — 15,0001. Чему равны энергии отделения нейтрона и протона в ядре  $^{16}\text{O}$ ?

**Энергия отделения нейтрона**

$$\varepsilon_n(A, Z) = m_n + M(A-1, Z) - M(A, Z),$$

протона —  $\varepsilon_p(A, Z) = m_p + M(A-1, Z-1) - M(A, Z).$

**В обеих формулах массы должны быть в энергетических единицах.**

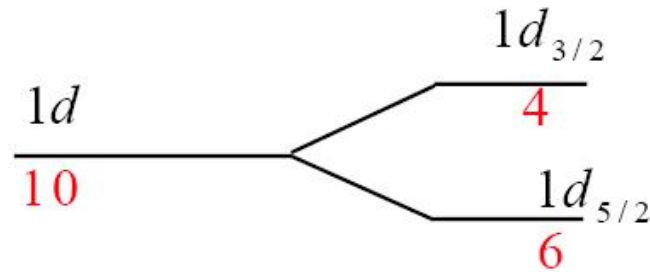
**Для ядра  $^{16}\text{O}$**

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= 939,6 \text{ МэВ} + \\ &+ (15,0030 \text{ а.е.м.} - 15,9949 \text{ а.е.м.}) \times 931,5 \text{ МэВ} = 15,6 \text{ МэВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= 938,3 \text{ МэВ} + \\ &+ (15,0001 \text{ а.е.м.} - 15,9949 \text{ а.е.м.}) \times 931,5 \text{ МэВ} = 11,6 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

## Пример

Определить число частиц одного типа в состояниях  $1d, 1d_{3/2}, 1d_{5/2}$



$$d \rightarrow l = 2$$

$$N(l=2) = 2(2l+1) = 10$$

$$N(j=5/2) = 2j+1 = 6$$

$$N(j=3/2) = 2j+1 = 4$$

В состоянии  $1d$  может находиться 10 протонов и 10 нейтронов.

В состоянии  $1d_{3/2}$ , может находиться 4 протона и 4 нейтрона.

В состоянии  $1d_{5/2}$ , может находиться 6 протонов и 6 нейтронов.

Полное число нуклонов в состоянии  $1d$  равно суммарному числу нуклонов в состояниях  $1d_{3/2}$  и  $1d_{5/2}$

# Пример

Известно, что внутренний электрический квадрупольный момент  $Q_0$  ядра  $^{175}\text{Lu}$  равен  $+5,9 \text{ Фм}^2$ . Какую форму имеет это ядро? Чему равен параметр деформации этого ядра?

Для равномерно заряженного аксиально симметричного эллипсоида, имеющего заряд  $Ze$

$Q_0 = \frac{2}{5} Z(b^2 - a^2)$ , где  $b$  — полуось эллипсоида,

направленная по оси симметрии  $z$ , а  $a$  — по осям

$x$  и  $y$ . Параметр деформации ядра  $\beta = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{\bar{R}^2}$ ,

где  $\bar{R} = \frac{(b+a)}{2}$  — средний радиус ядра. Тогда

$$\beta = \frac{5}{4} \frac{Q_0}{Z(r_0 A^{1/3})^2} = \frac{5 \times 5,9}{4 \times 71 \times (1,2 \times 175^{1/3})^2} = 0,002.$$

Здесь учтено, что при малых деформациях  $\bar{R} \approx R = r_0 A^{1/3}$ . Так как  $Q_0 > 0$ , то  $b > a$ , и ядро представляет из себя эллипсоид вытянутый вдоль оси симметрии  $z$ .

# Пример

Показать, что спектр возбужденных состояний деформированного ядра  $^{180}\text{Hf}$  представляет собой «вращательную полосу».

Для четно-четных деформированных ядер энергия вращательных состояний

$$E = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I},$$

$J$  — спин состояния, который принимает лишь четные значения  $J = 0, 2, 4, \dots$ ,

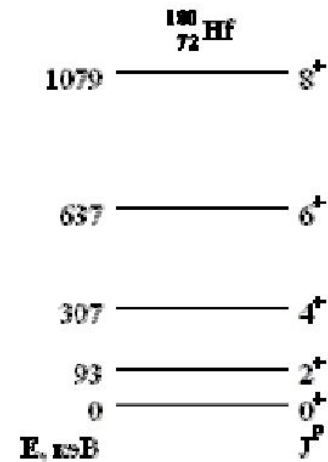
$I$  — момент инерции ядра. Отношение энергий уровней должно быть следующим:

$$\begin{aligned} E_{2^+} : E_{4^+} : E_{6^+} : E_{8^+} &= \\ &= J_{2^+}(J_{2^+} + 1) : J_{4^+}(J_{4^+} + 1) : J_{6^+}(J_{6^+} + 1) : J_{8^+}(J_{8^+} + 1) = \\ &= 2(2+1) : 4(4+1) : 6(6+1) : 8(8+1) = 3 : 10 : 21 : 36. \end{aligned}$$

Подставим приведенные на рисунке значения энергий и получим:

$$\begin{aligned} E_{2^+} : E_{4^+} : E_{6^+} : E_{8^+} &= 93 : 307 : 637 : 1079 = \\ &= \frac{93}{31} : \frac{307}{31} : \frac{637}{31} : \frac{1079}{31} = 3 : 9,90 : 20 : 55 : 34,81. \end{aligned}$$

Полученные отношения, а также отсутствие в спектре в спектре уровней с  $J = 1, 3, 5, \dots$  указывают, что это «вращательная полоса» ядра.



## Задание на дом от 22.03.2012

1. Используя формулу Вайцзеккера, найти условие, связывающее  $A$  и  $Z$  для  $\beta$ -стабильных ядер.
2. Оценить вклад различных слагаемых  $W_{\text{объём}}$ ,  $W_{\text{пов}}$ ,  $W_{\text{кулон}}$ ,  $W_{\text{симм}}$ ,  $W_{\text{пар}}$  в энергию связи ядер  ${}_{16}^{16}\text{O}$  и  ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ .
3. Вычислите энергию, высвобождаемую при делении ядра  ${}^{238}\text{U}$  на два одинаковых осколка.