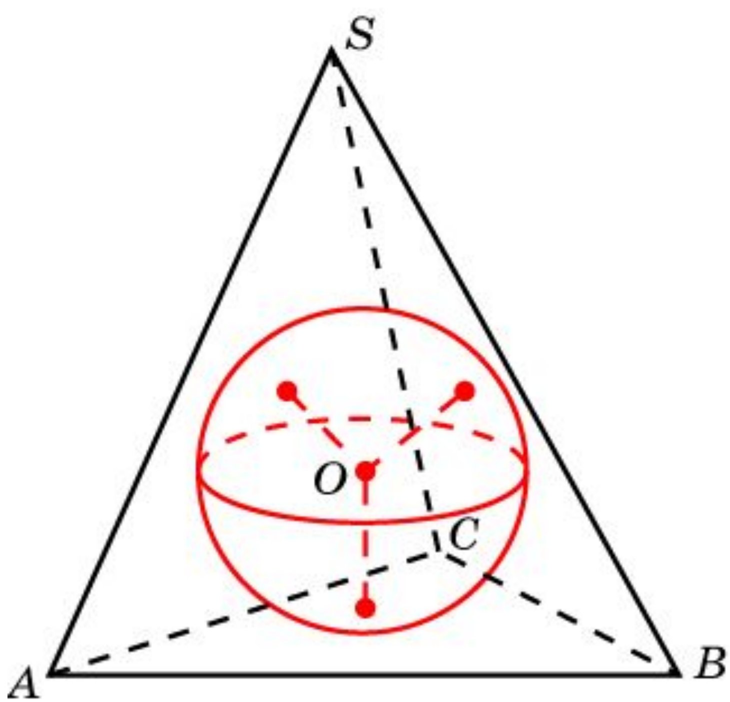
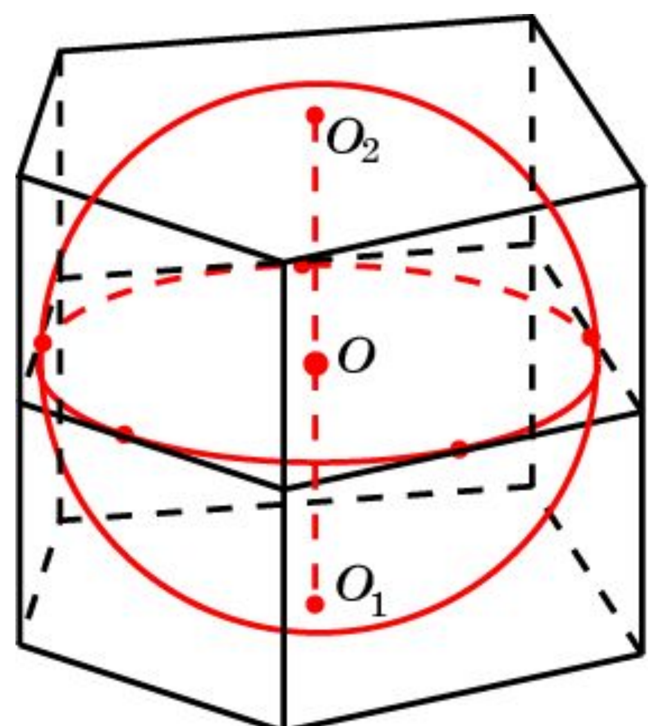
Многогранники, описанные около сферы

Многогранник называется описанным около сферы, если плоскости всех его граней касаются сферы. Сама сфера называется вписанной в многогранник.

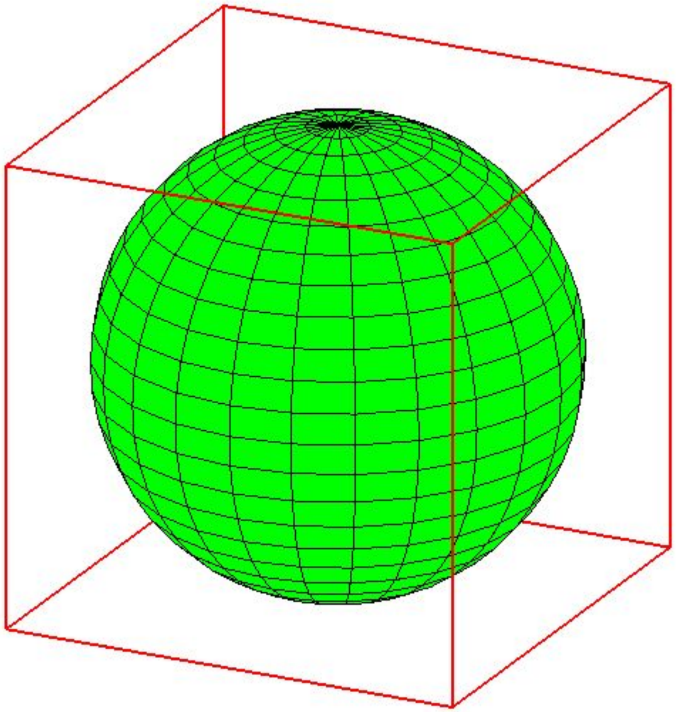
Теорема. В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну.

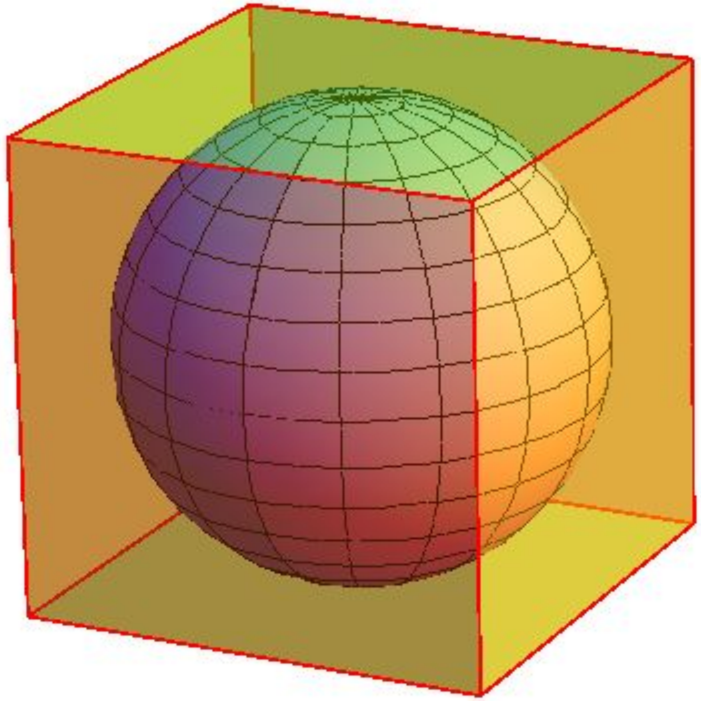
Теорема. В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности.





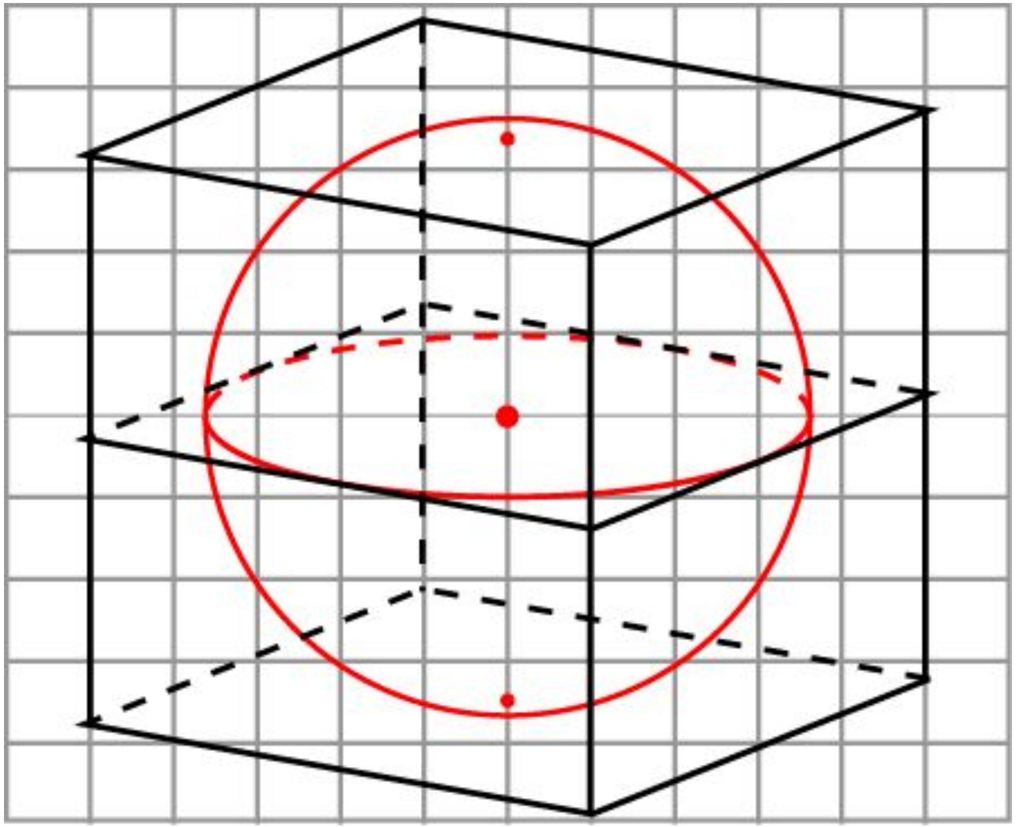
Сфера, вписанная в куб





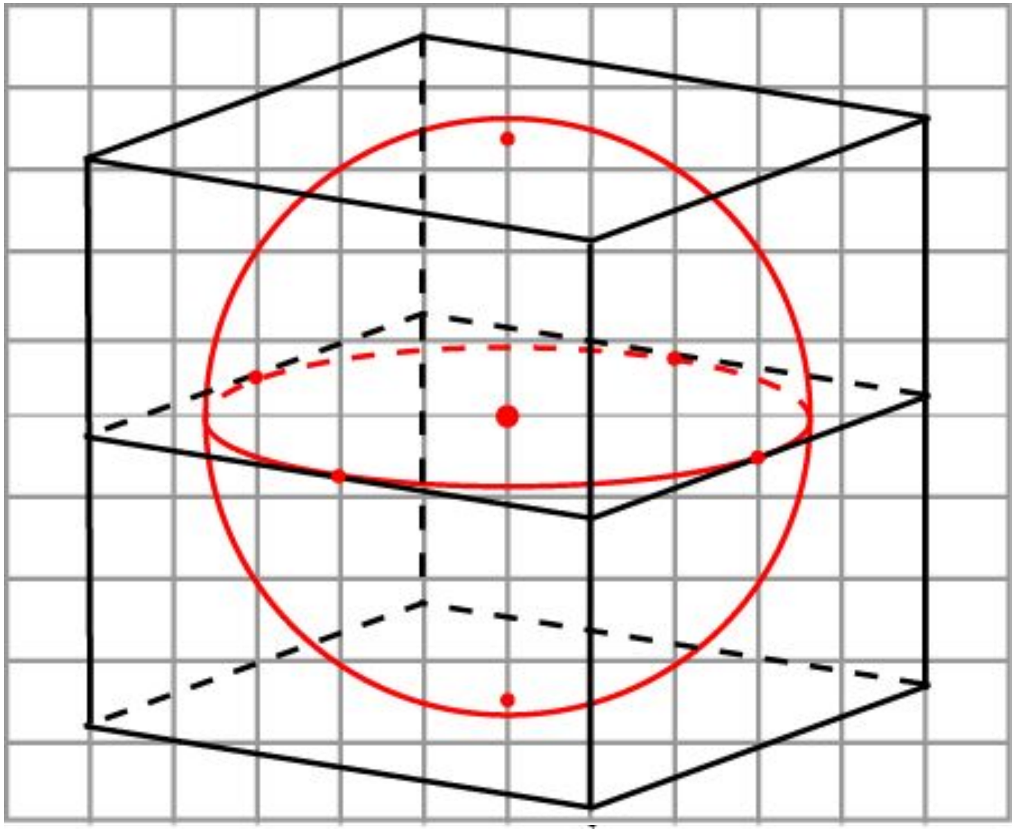
Сфера, вписанная в куб

На рисунке изображена сфер, вписанная в куб.



Упражнение 1

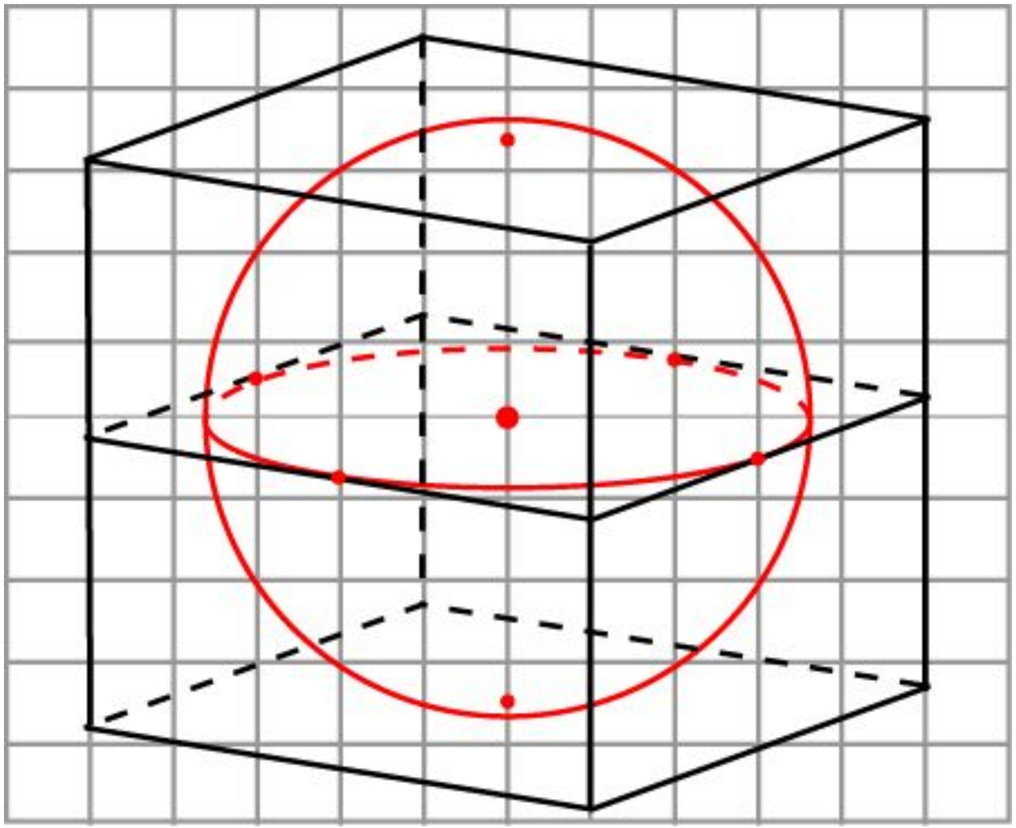
Изобразите сферу, вписанную в куб, как на предыдущем слайде. Для этого изобразите эллипс вписанный в параллелограмм, полученные сжатием окружности и квадрата в 4 раза. Отметьте полюса сферы и точки касания эллипса и параллелограмма.



Сотрите квадрат и нарисуйте два параллелограмма, изображающих верхнюю и нижнюю грани куба. Соедините их вершины отрезками. Получите изображение сферы, вписанной в куб.

Упражнение 2

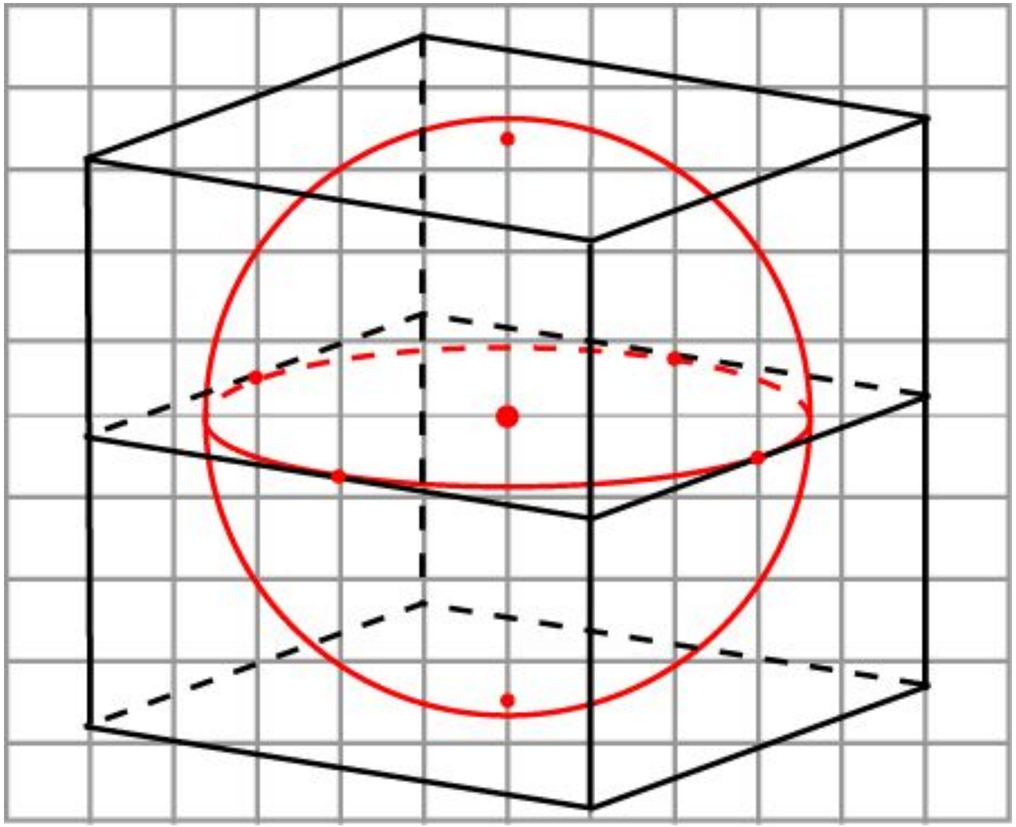
Найдите радиус сферы, вписанной в единичный куб.



Ответ: $r = \dfrac{1}{2}.$

Упражнение 3

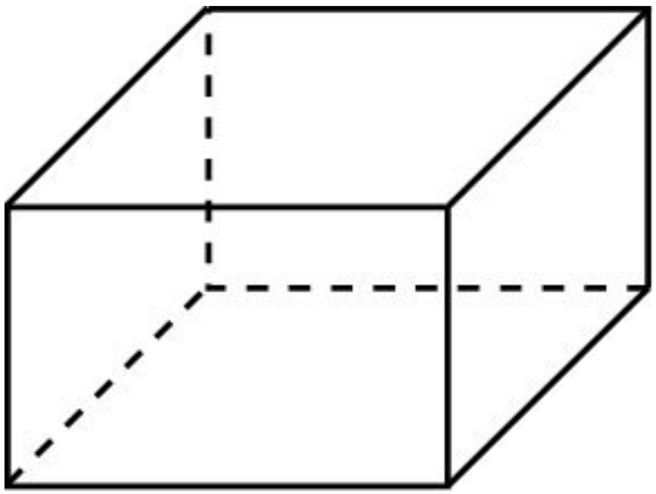
В куб вписана сфера радиуса 1. Найдите ребро куба.



Ответ: 2.

Упражнение 4

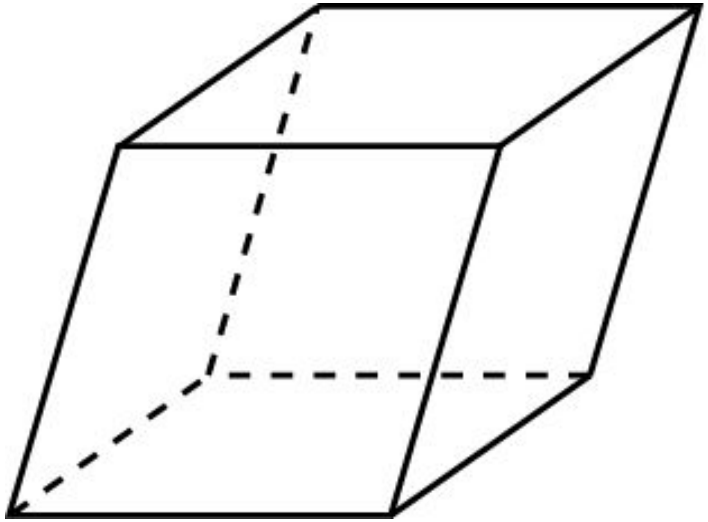
Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед, отличный от куба?



Ответ: Нет.

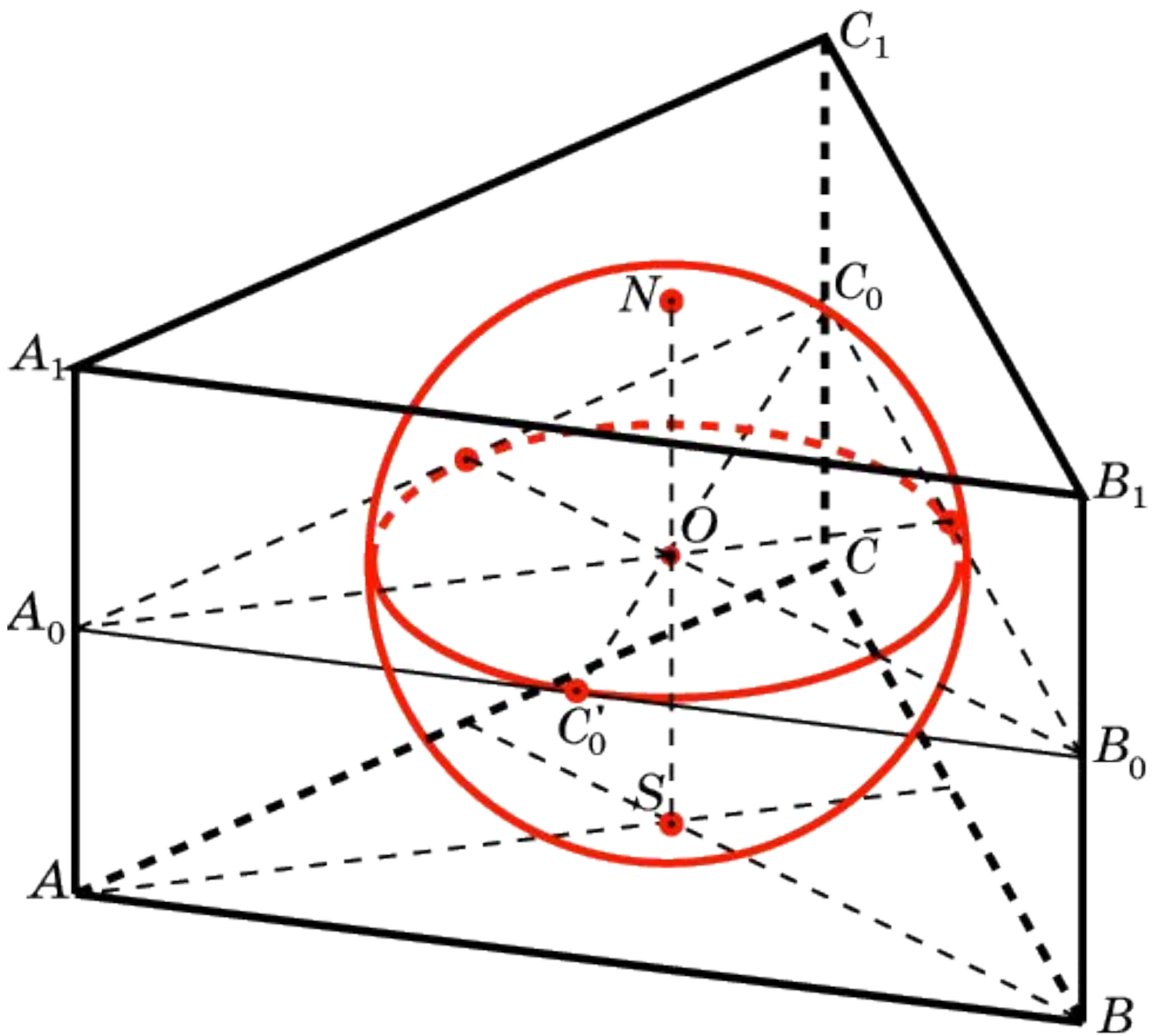
Упражнение 5

Можно ли вписать сферу в наклонный параллелепипед, все грани которого ромбы?



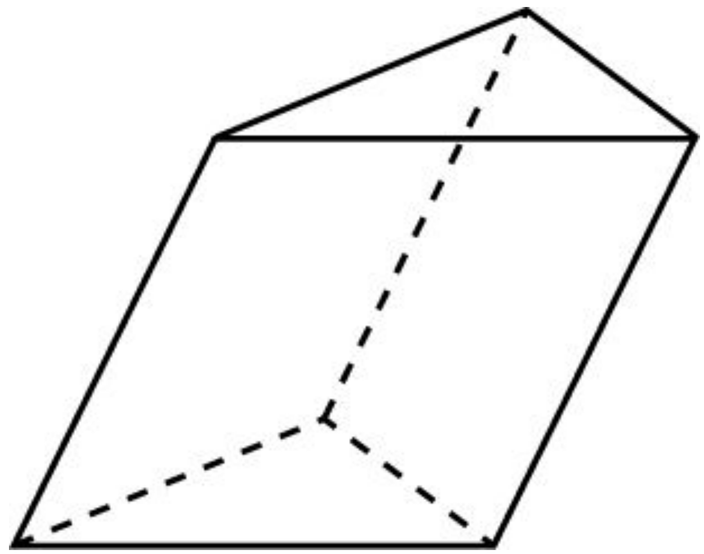
Ответ: Нет.

Сфера, вписанная в треугольную призму



Упражнение 1

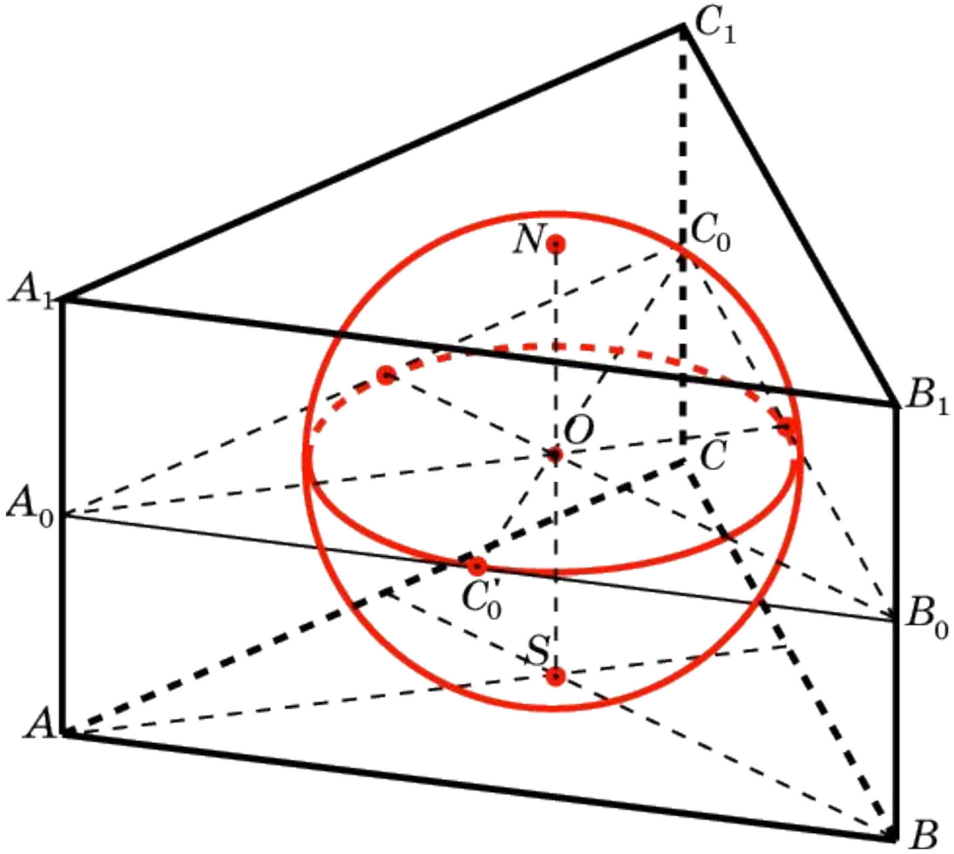
Можно ли вписать сферу в наклонную треугольную призму, в основании которой правильный треугольник?



Ответ: Нет.

Упражнение 2

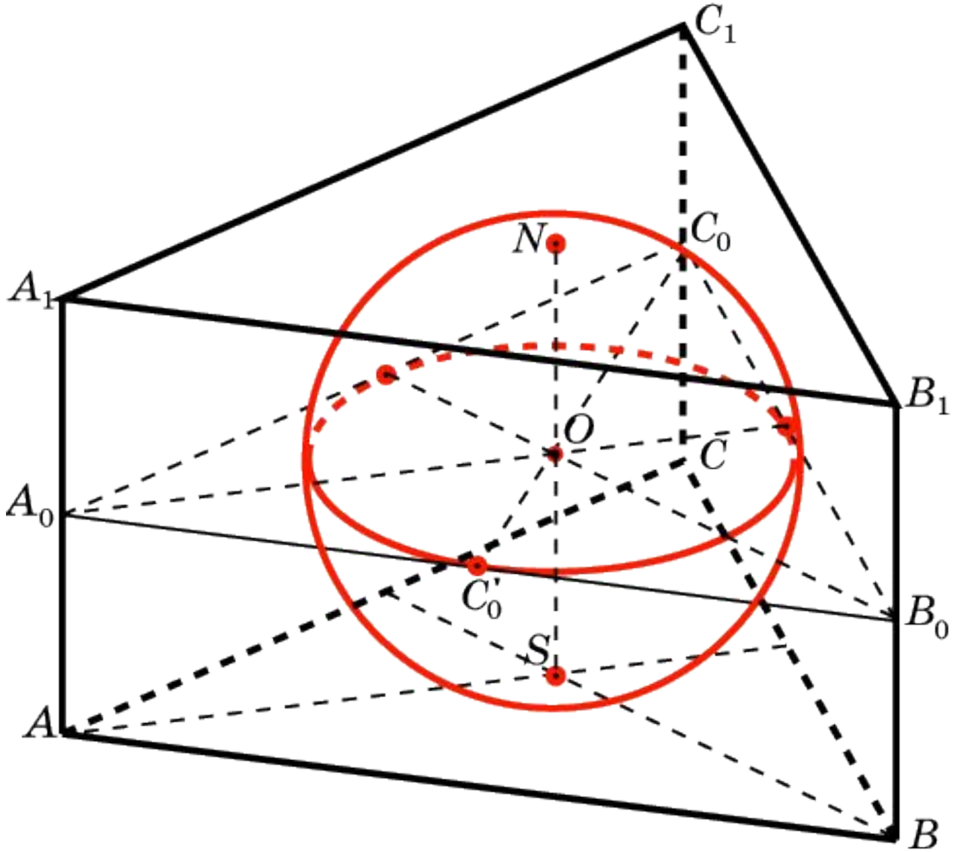
Найдите высоту правильной треугольной призмы и радиус, вписанной в нее сферы, если ребро основания призмы равно 1.



Ответ: $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}.$

Упражнение 3

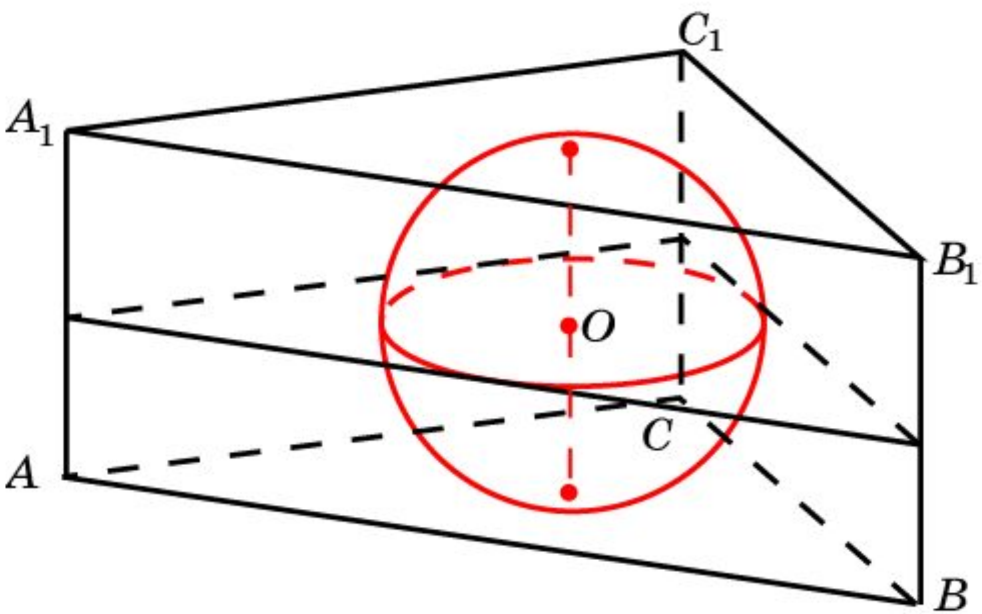
В правильную треугольную призму вписана сфера радиуса 1. Найдите сторону основания и высоту призмы.



Ответ: $a = 2\sqrt{3},\ h = 2.$

Упражнение 4

В призму, в основании которой прямоугольный треугольник с катетами, равными 1, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту призмы.



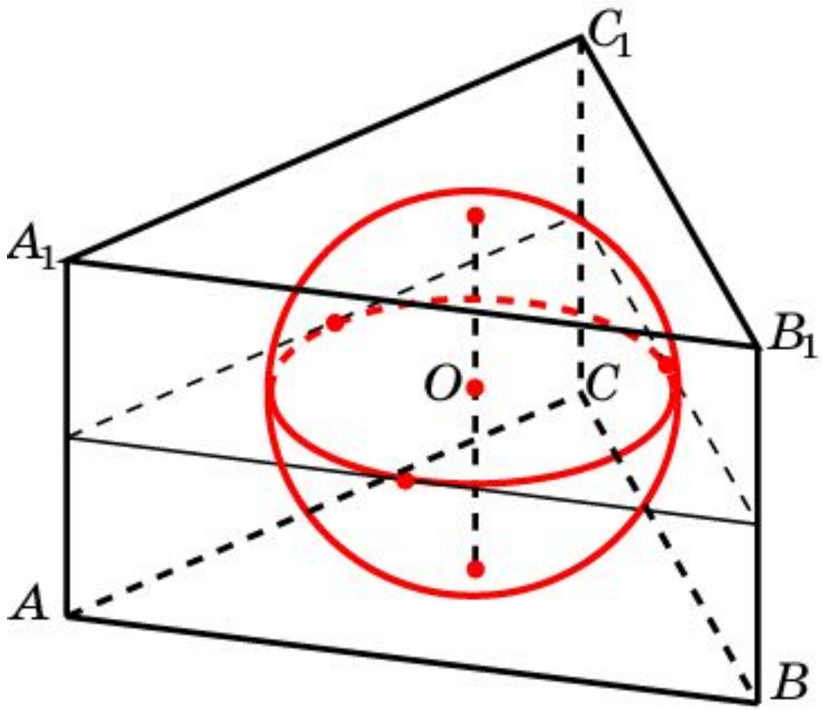
Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}$, , периметр $2+\sqrt{2}$.

Воспользуемся формулой $r = S/p$. Получим

$$r = \frac{2-\sqrt{2}}{2},\ h = 2-\sqrt{2}.$$

Упражнение 5

В призму, в основании которой равнобедренный треугольник со сторонами 2, 3, 3, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту призмы.

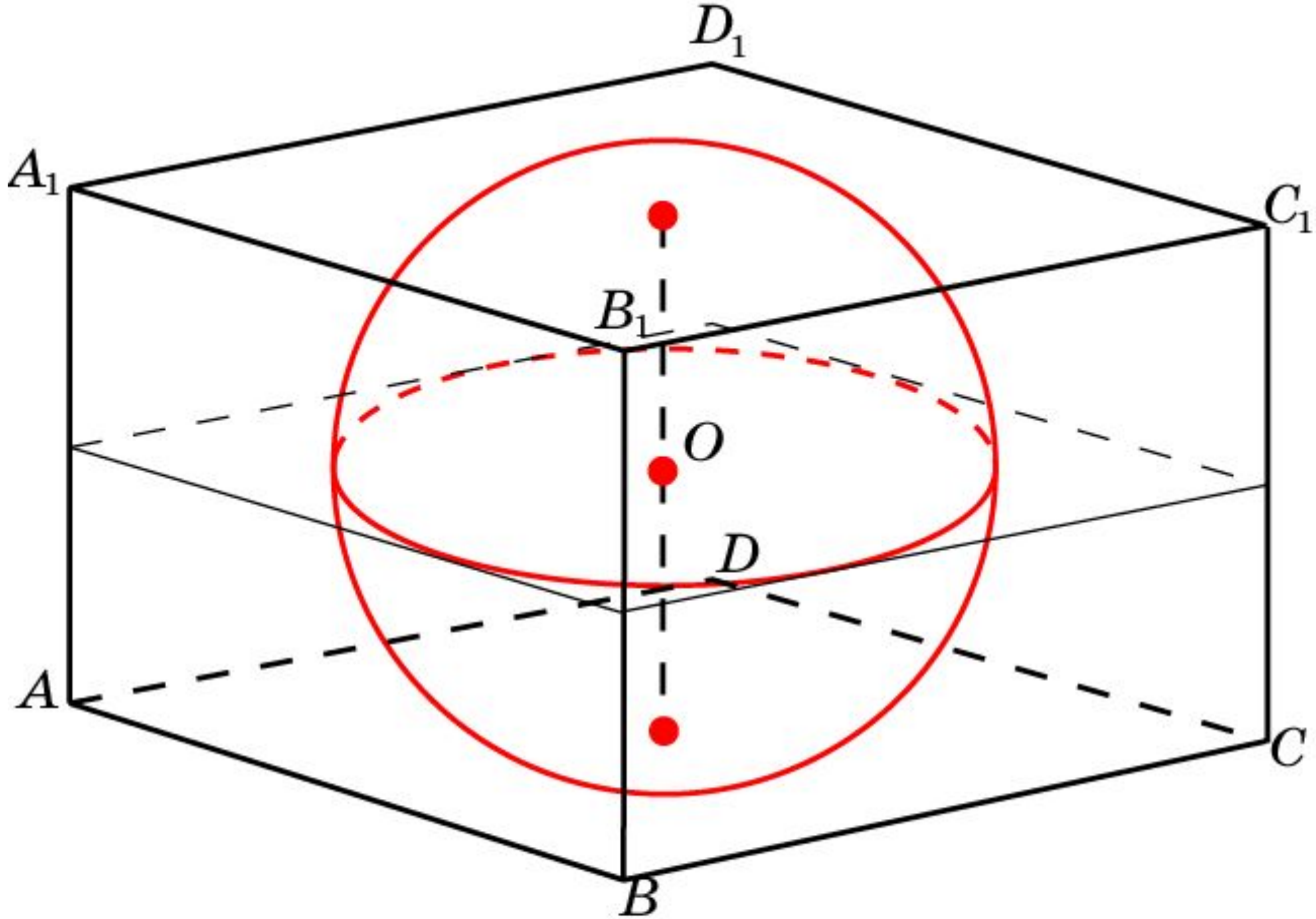


Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{2}$. Периметр равен 8.

Воспользуемся формулой $r = S/p$. Получим

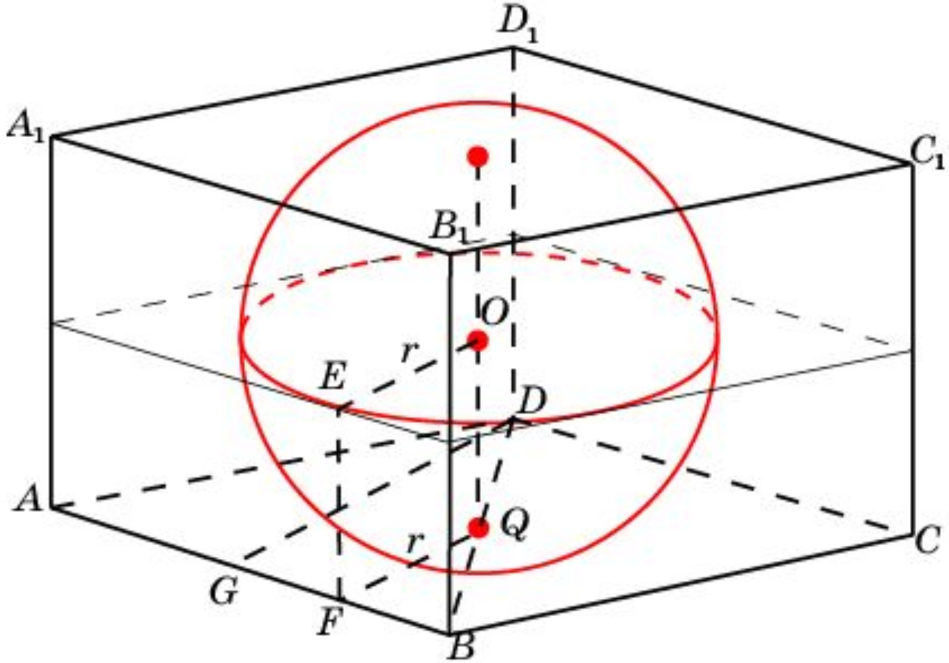
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}, h = \sqrt{2}.$$

Сфера, вписанная в четырехугольную призму



Упражнение 1

Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Найдите радиус сферы и высоту призмы.



Решение. Радиус сферы равен половине высоты DG основания, т.е.

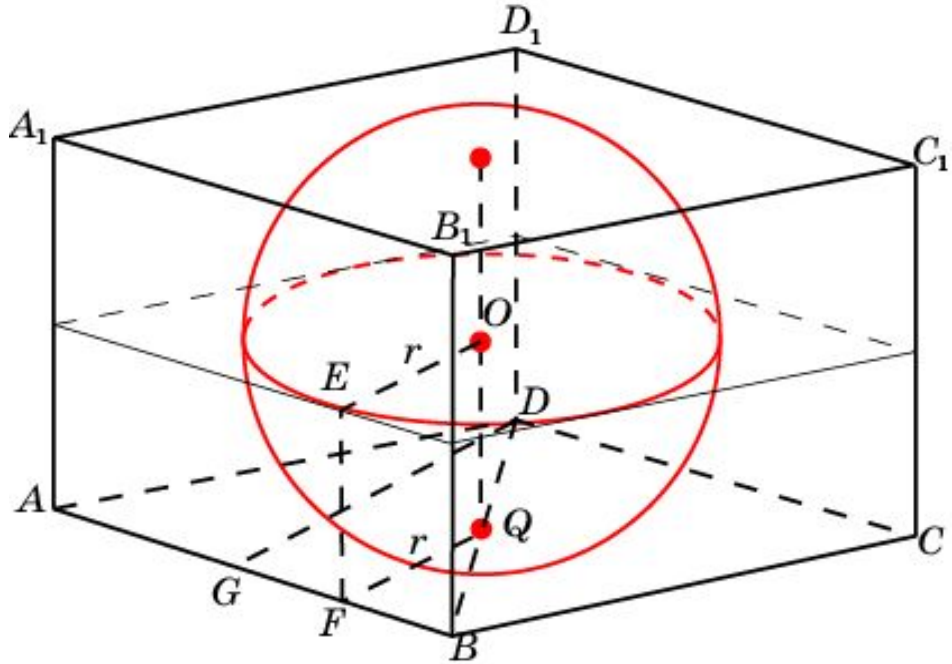
$$r = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Высота призмы равна диаметру сферы, т.е.

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнение 2

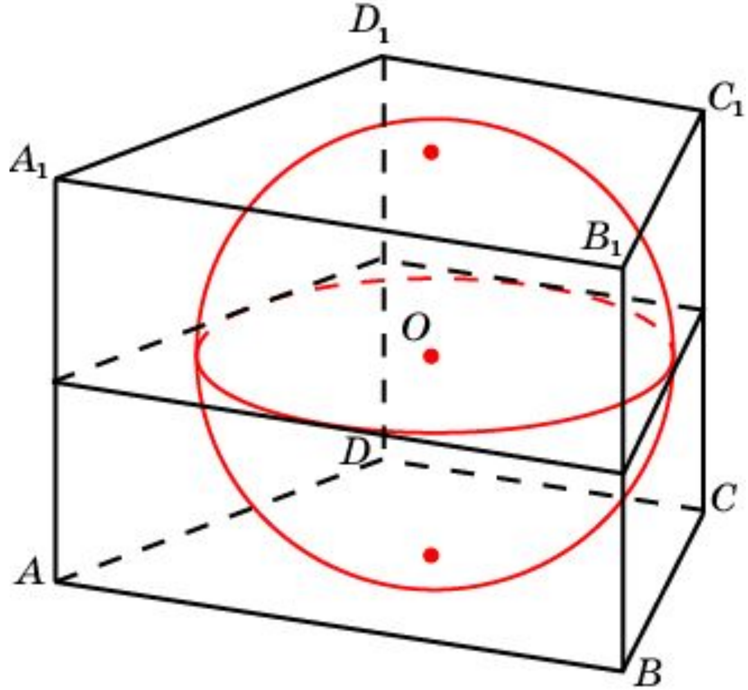
Единичная сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб с острым углом 60°. Найдите сторону основания a и высоту призмы h.



Ответ: $a = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}, h = 2.$

Упражнение 3

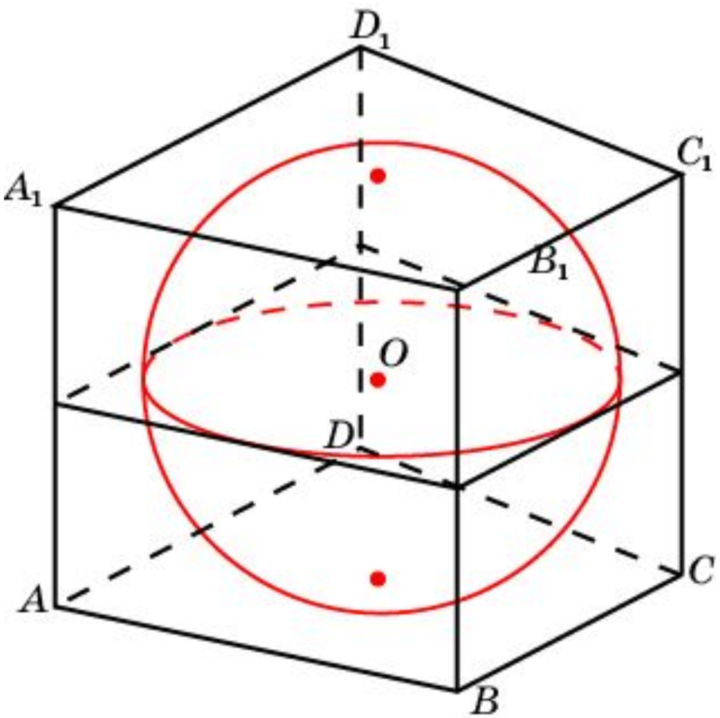
Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой трапеция. Высота трапеции равна 2. Найдите высоту призмы h и радиус r вписанной сферы.



Ответ: $r = 1, h = 2.$

Упражнение 4

Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой четырехугольник, периметра 4 и площади 2. Найдите радиус r вписанной сферы.

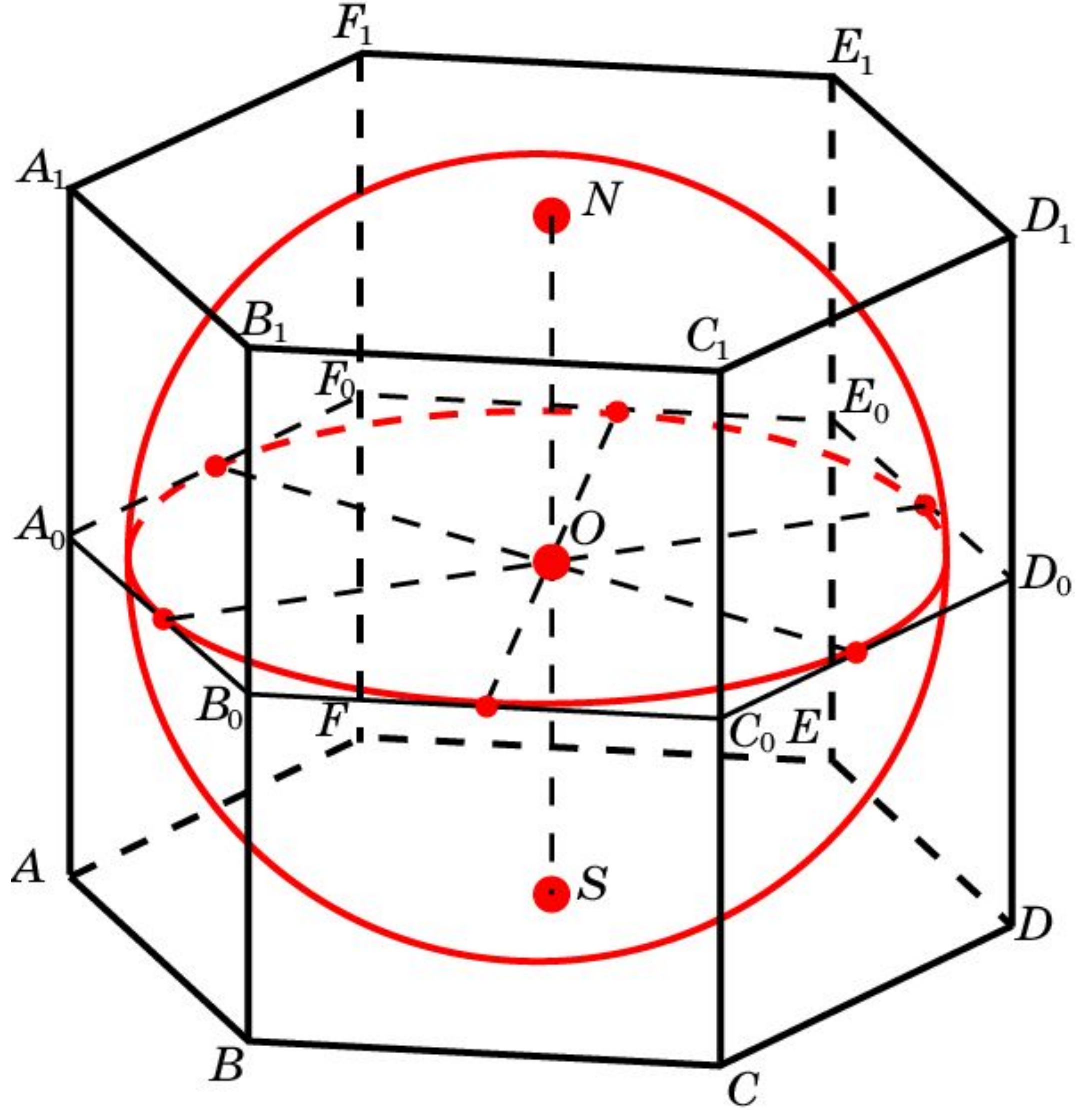


Решение. Заметим, что радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы.

Воспользуемся тем, что радиус окружности, вписанной в многоугольник, равен площади этого многоугольника делённой на его полупериметр. Получим,

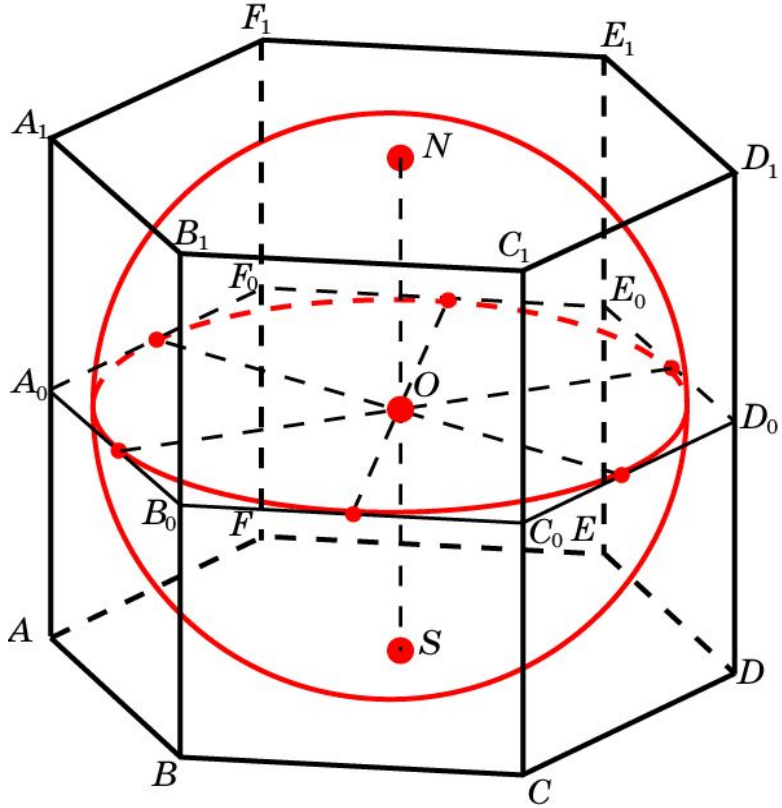
$$r = 1.$$

Сфера, вписанная в правильную шестиугольную призму



Упражнение 1

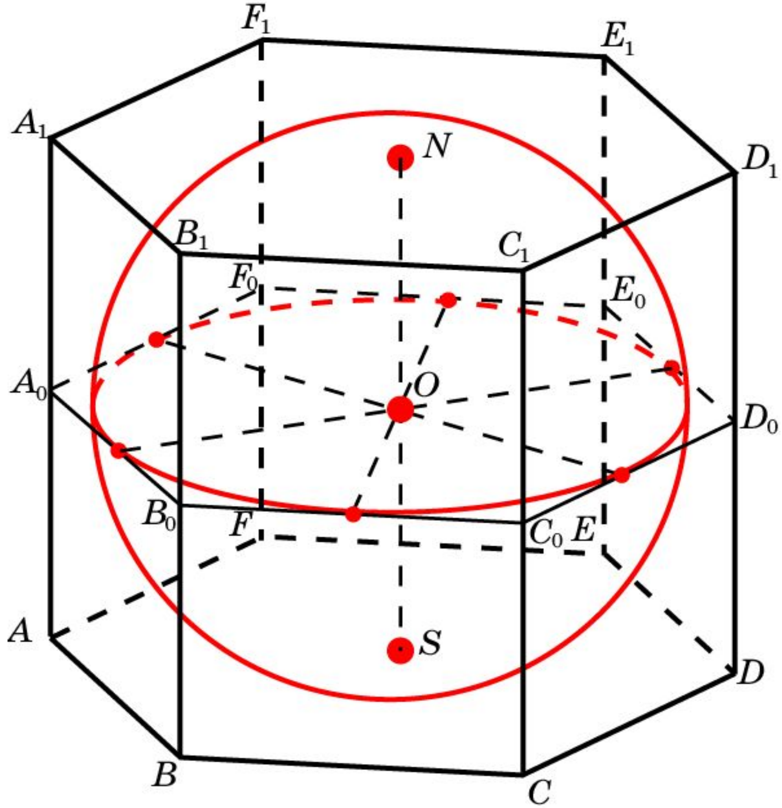
Найдите высоту правильной шестиугольной призмы и радиус, вписанной в нее сферы, если сторона основания призмы равна 1.



Ответ: $h = \sqrt{3}, r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

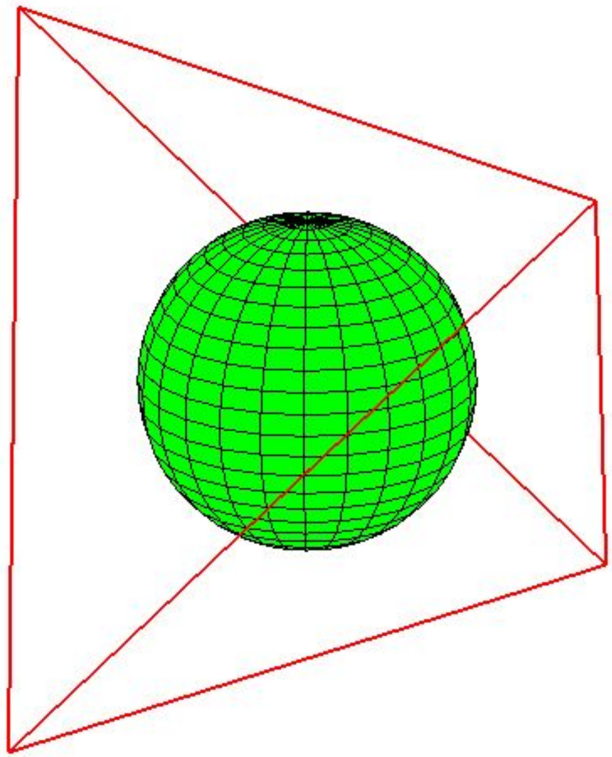
Упражнение 2

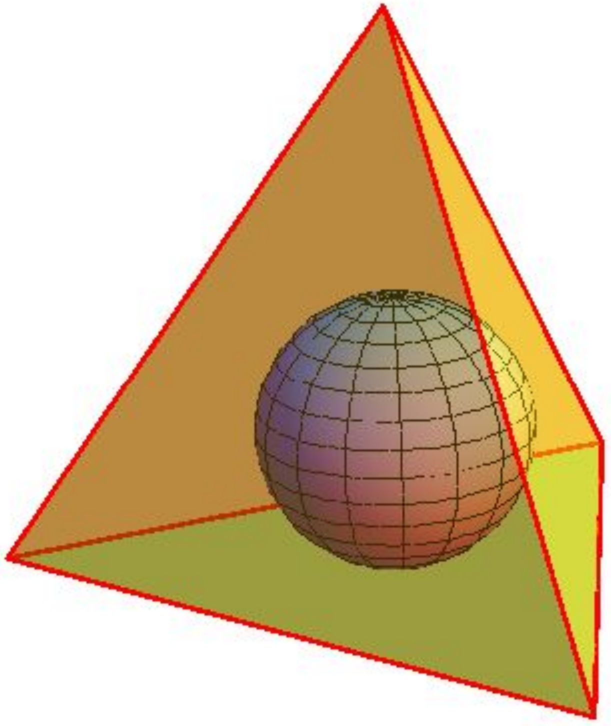
В правильную шестиугольную призму вписана сфера радиуса 1. Найдите сторону основания и высоту призмы.



Ответ: $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, h = 2.$

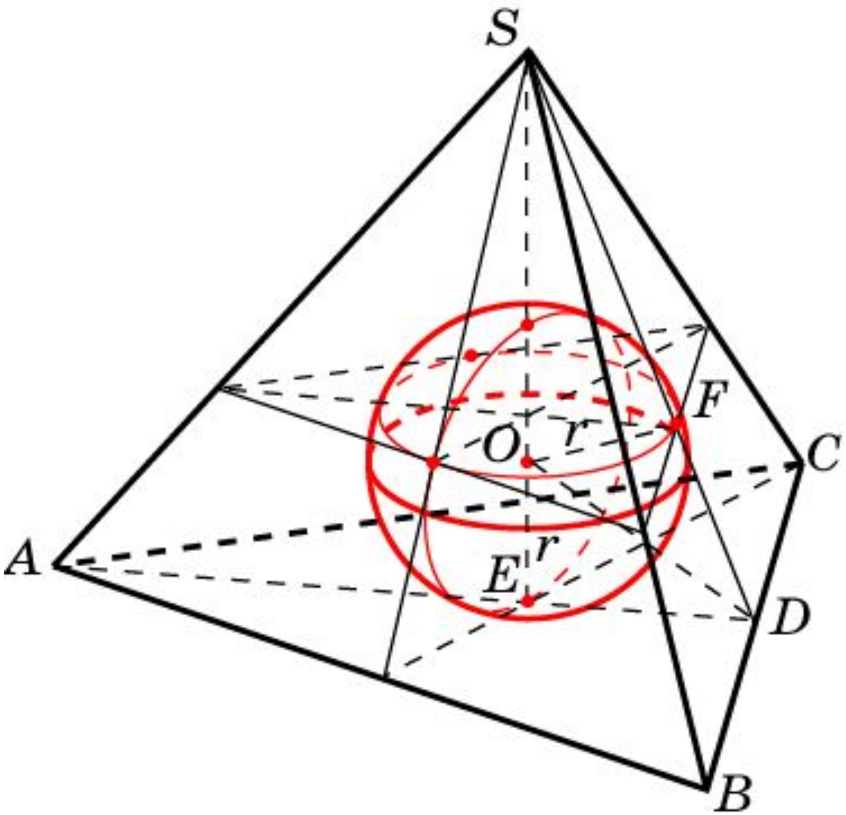
Сфера, вписанная в правильный тетраэдр





Упражнение 1

Найдите радиус сферы, вписанной в единичный тетраэдр.



Решение. В тетраэдре $SABC$ имеем:

$$SD = \frac{\sqrt{3}}{2},\ DE = \frac{\sqrt{3}}{6},\ SE = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Из подобия треугольников SOF и SDE получаем уравнение

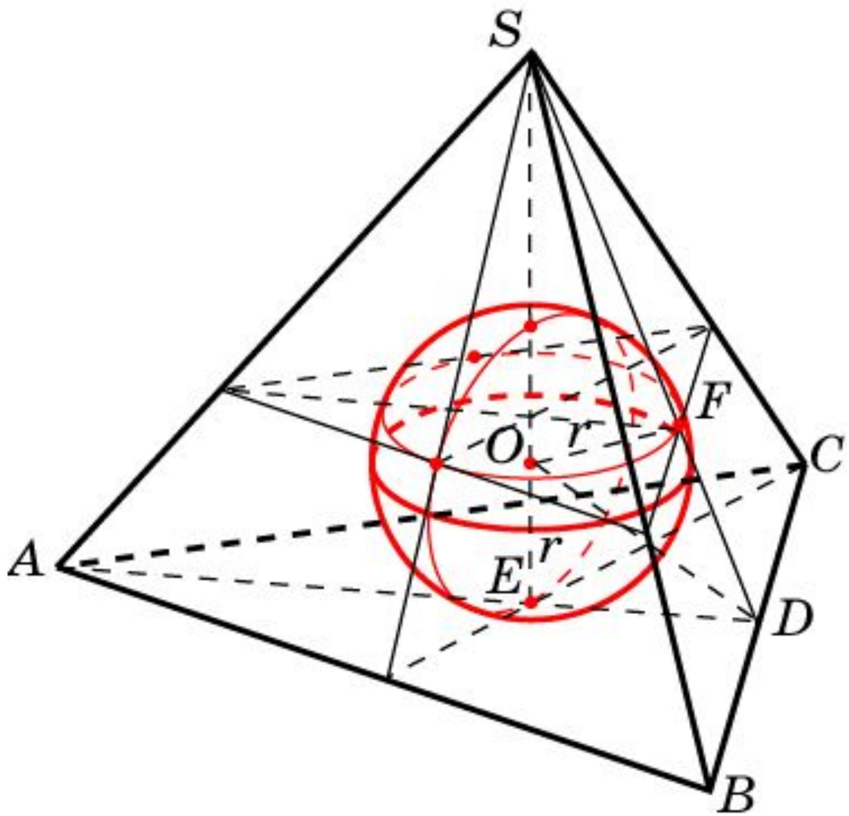
$$r : \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - r\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{2},$$

решая которое, находим $r = \frac{\sqrt{6}}{12}.$

Ответ: $r = \frac{\sqrt{6}}{12}.$

Упражнение 2

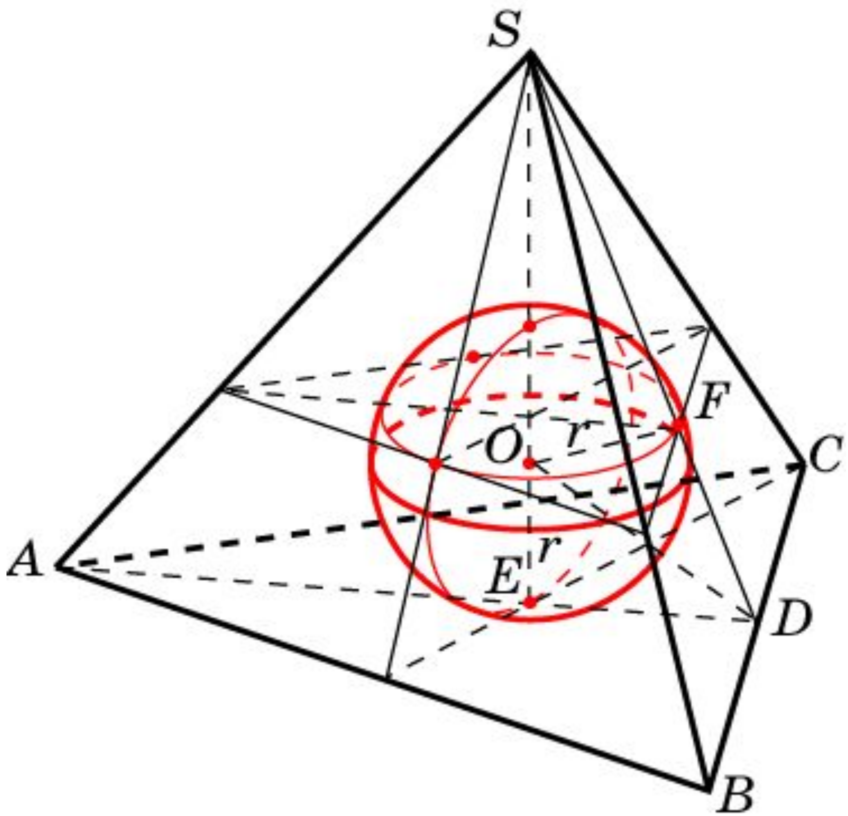
В правильный тетраэдр вписана единичная сфера. Найдите ребро этого тетраэдра.



Ответ: $a = 2\sqrt{6}.$

Упражнение 3

Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна 2, и двугранные углы при основании равны 60°.



Решение. Воспользуемся тем, что центр вписанной сферы является точкой пересечения биссектральных плоскостей двугранных углов при основании пирамиды. Для радиуса сферы OE имеет место равенство

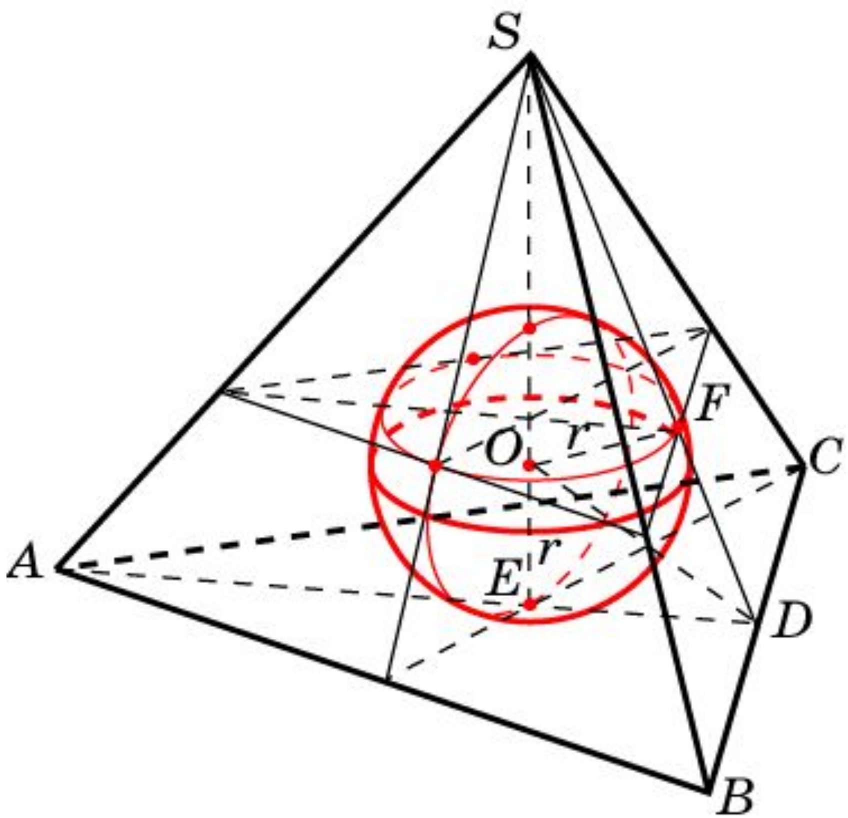
$$OE = DE \cdot tg\angle ODE.$$

Следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} tg 30° = \frac{1}{3}.$$

Упражнение 4

Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, боковые ребра которой равны 1, и плоские углы при вершине равны 90°.



Решение. В тетраэдре $SABC$ имеем:

$$SD = \frac{\sqrt{2}}{2},\ DE = \frac{\sqrt{6}}{6},\ SE = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

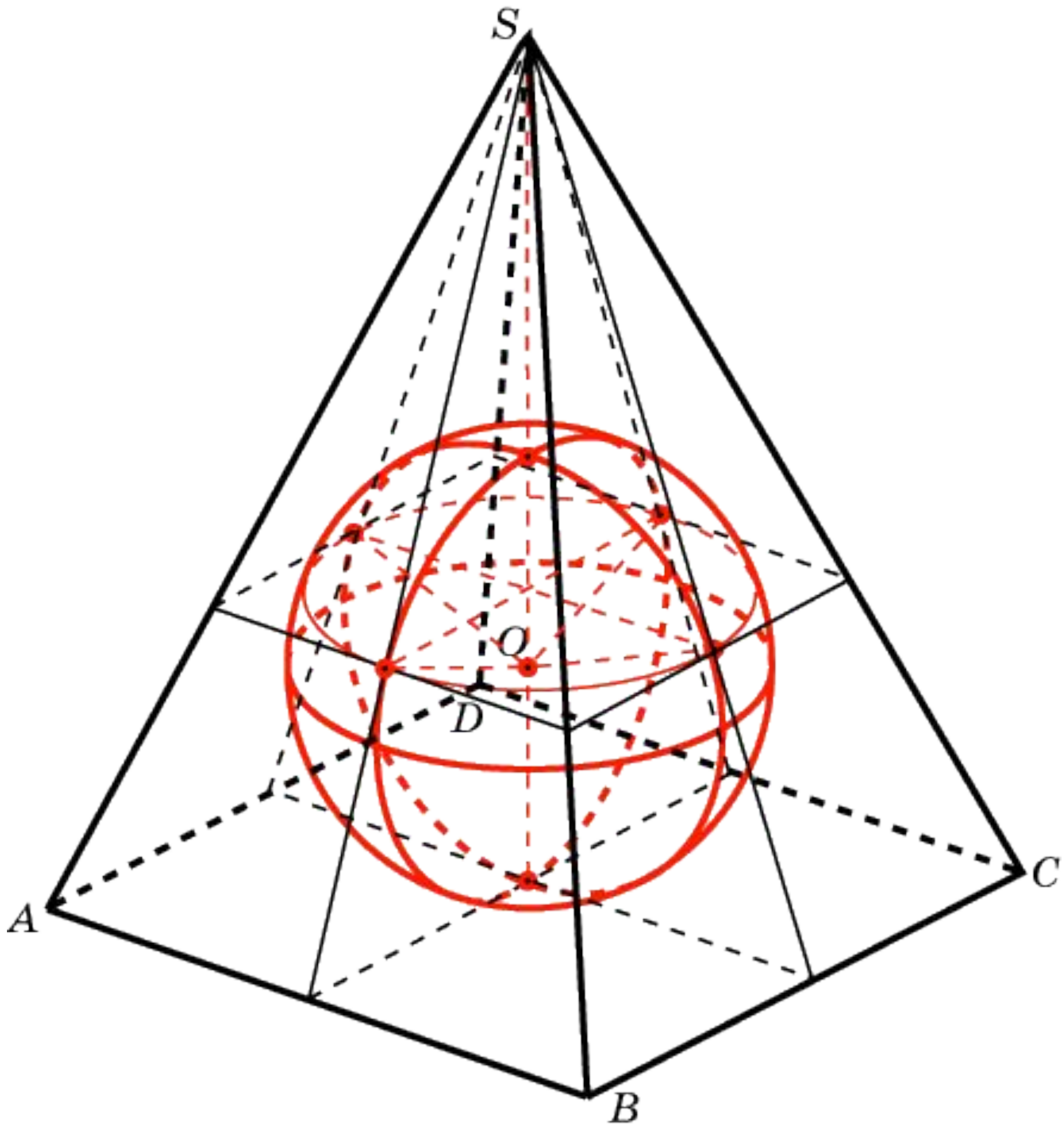
Из подобия треугольников SOF и SDE получаем уравнение

$$r : \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - r\right) = \frac{\sqrt{6}}{6} : \frac{\sqrt{2}}{2},$$

решая которое, находим $r = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$.

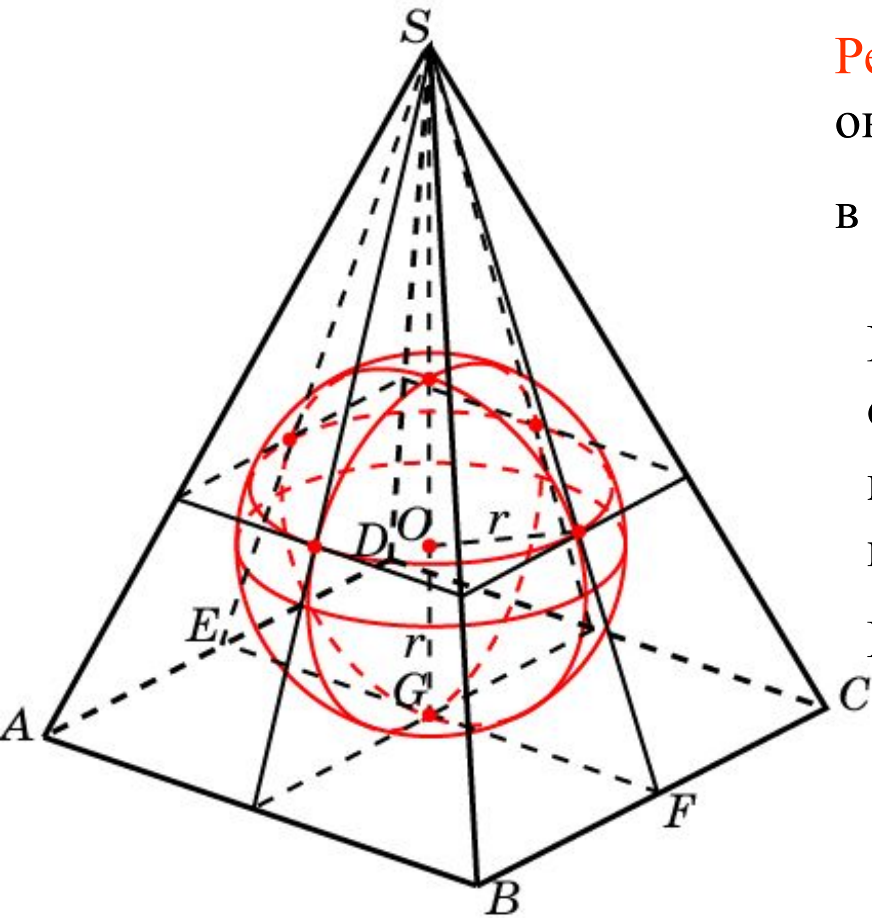
Ответ: $r = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Сфера, вписанная в четырехугольную пирамиду



Упражнение 1

Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны 1.



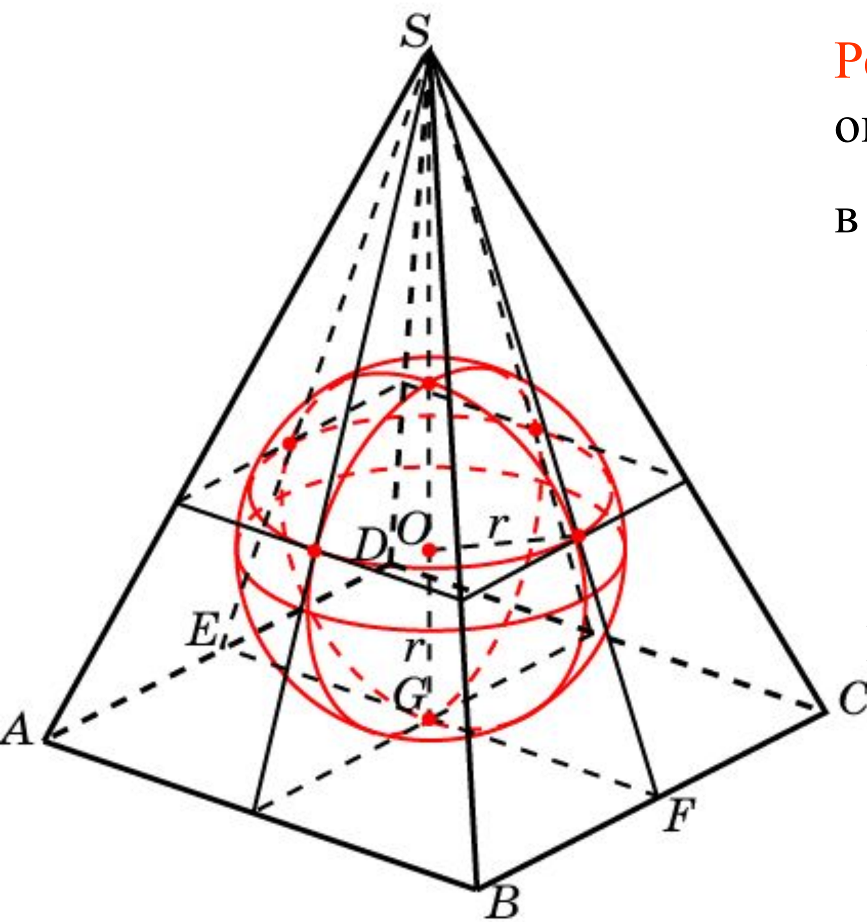
Решение. Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник SEF, в котором $SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $EF=1$, $SG = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Воспользуемся тем, что для радиуса r окружности, вписанной в треугольник, имеет место формула: $r = S/p$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника. В нашем случае $S = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $p = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $r = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Упражнение 2

Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 1, а боковое ребро - 2.



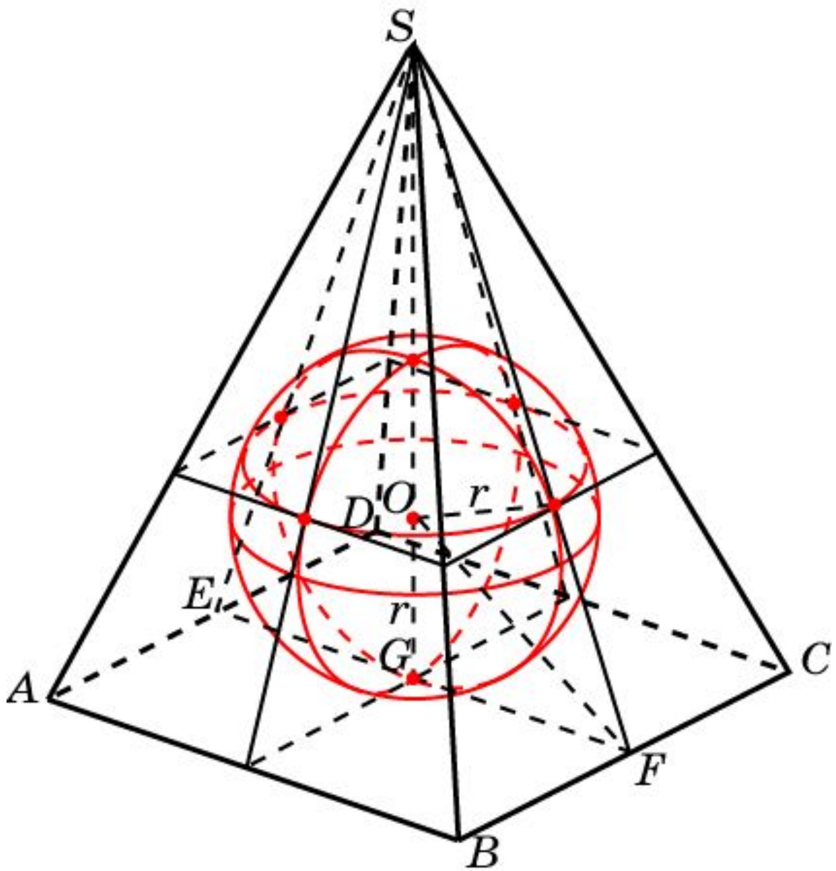
Решение. Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник SEF, в котором $SE = SF = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $EF=1$, $SG = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Воспользуемся тем, что для радиуса r окружности, вписанной в треугольник, имеет место формула: $r = S/p$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника. В нашем случае $S = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $p = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Следовательно, $r = \frac{\sqrt{14}(\sqrt{15}-1)}{28}$.

Упражнение 3

Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 2, и двугранные углы при основании равны 60°.



Решение. Воспользуемся тем, что центр вписанной сферы является точкой пересечения биссектральных плоскостей двугранных углов при основании пирамиды. Для радиуса сферы OG имеет место равенство

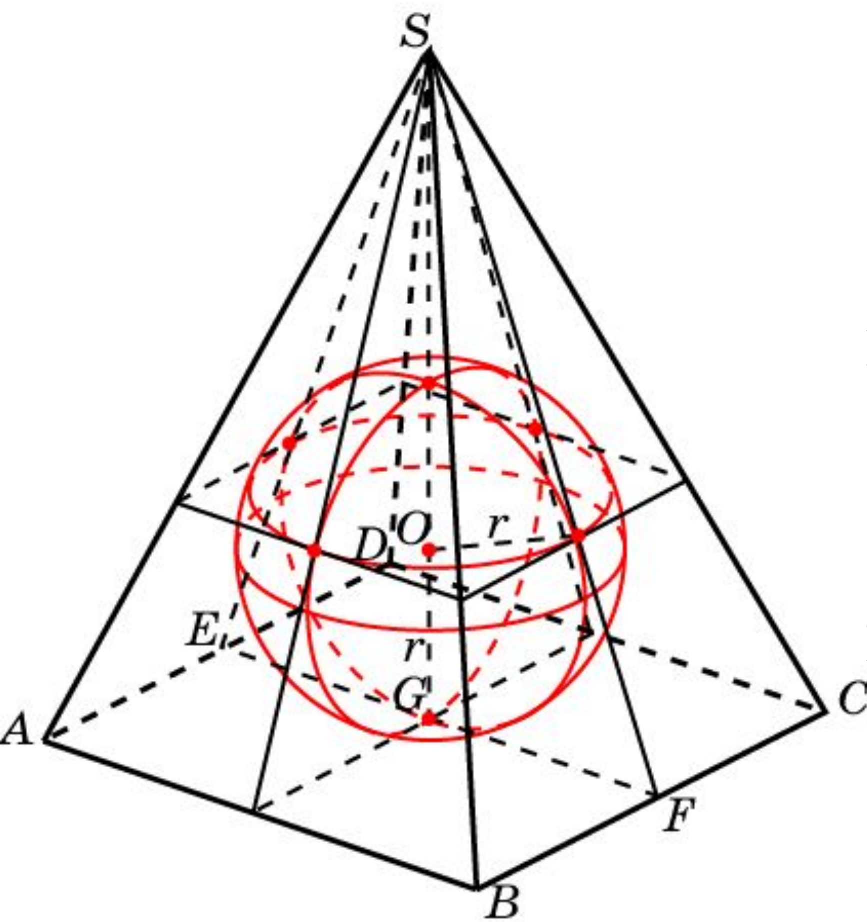
$$OG = FG \cdot tg\angle OFG.$$

Следовательно,

$$r = tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Упражнение 4

Единичная сфера вписана в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 4. Найдите высоту



Решение. Обозначим высоту SG пирамиды h. Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник SEF, в котором

$SE = SF = \sqrt{h^2+4}$, $EF = 4$.

Воспользуемся тем, что для радиуса r окружности, вписанной в треугольник, имеет место формула: $r = S/p$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника.

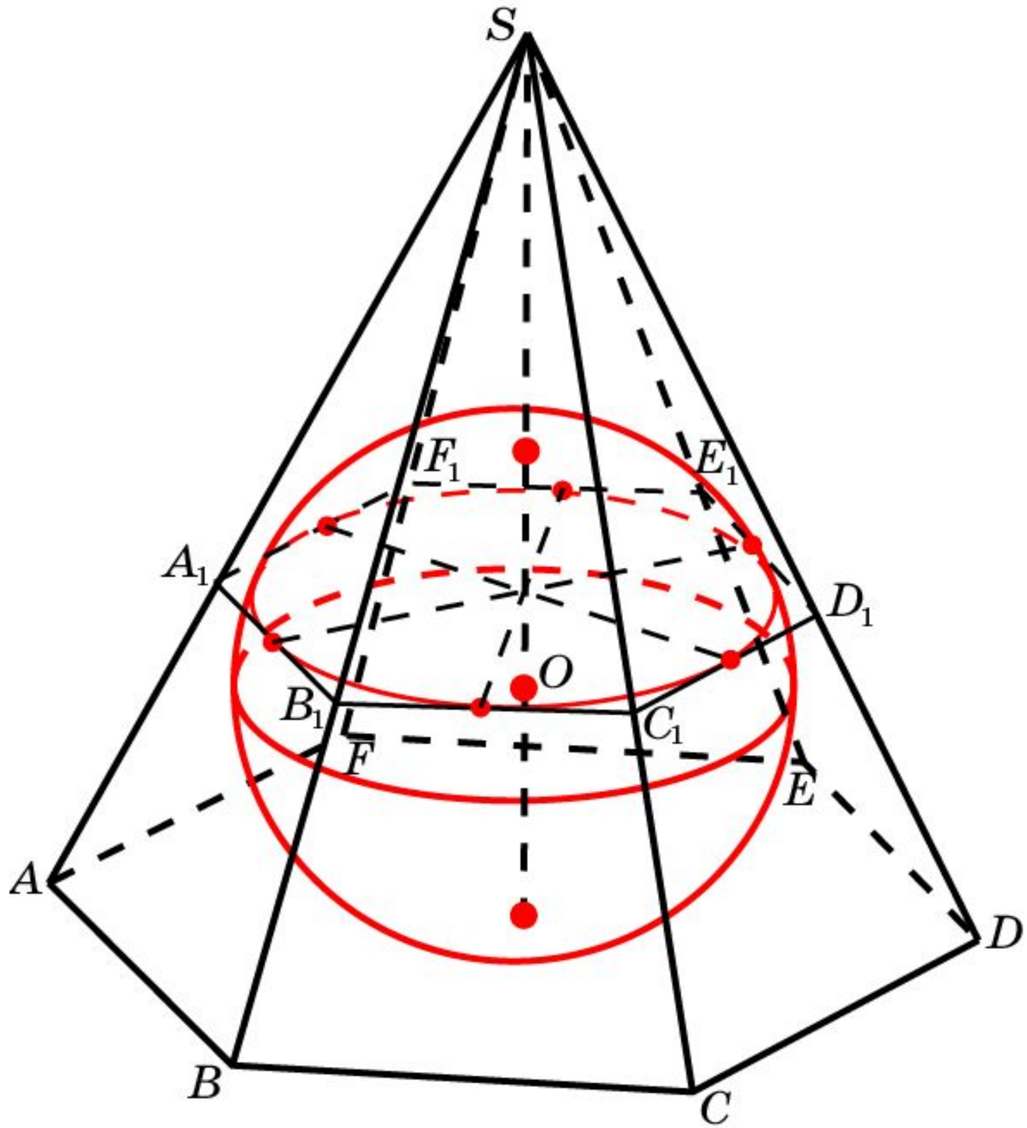
В нашем случае $S = 2h$, $p = \sqrt{h^2+4} + 2$.

Следовательно, имеем равенство

$\sqrt{h^2+4} + 2 = 2h$, из которого находим

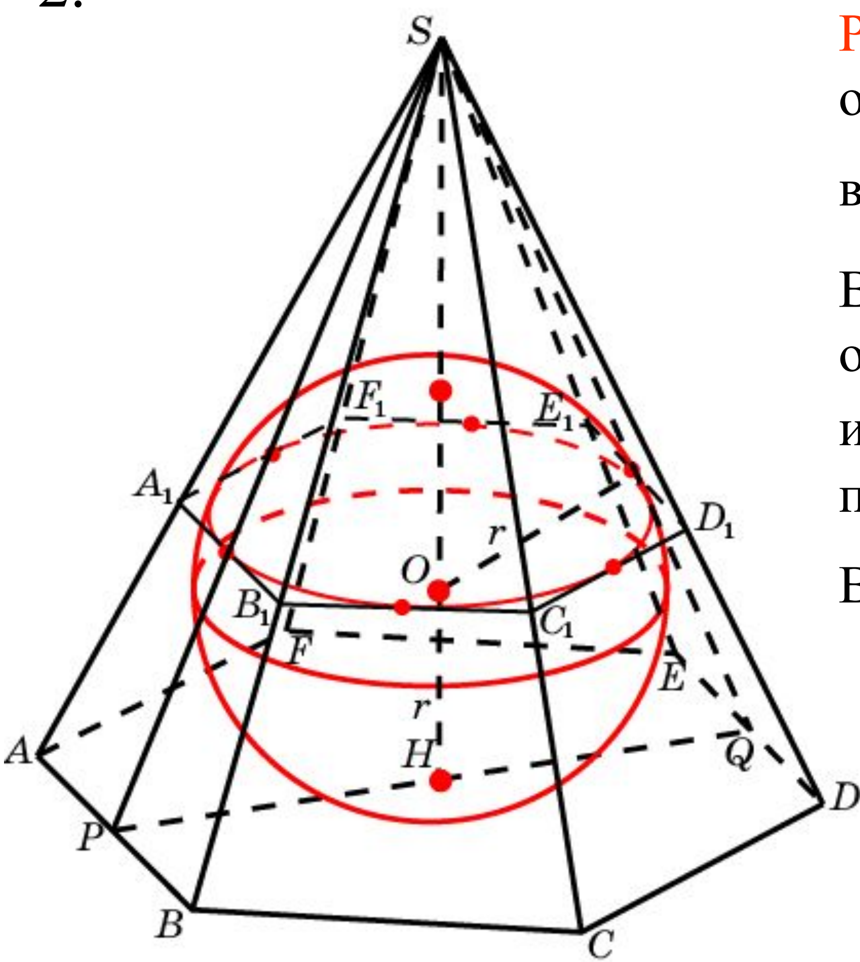
$$h = \frac{8}{3}.$$

Сфера, вписанная в правильную шестиугольную пирамиду



Упражнение 1

Найдите радиус сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, у которой ребра основания равны 1, а боковые ребра - 2.



Решение. Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник SPQ, в котором $SP = SQ = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$, $PQ = SH = \sqrt{3}$.

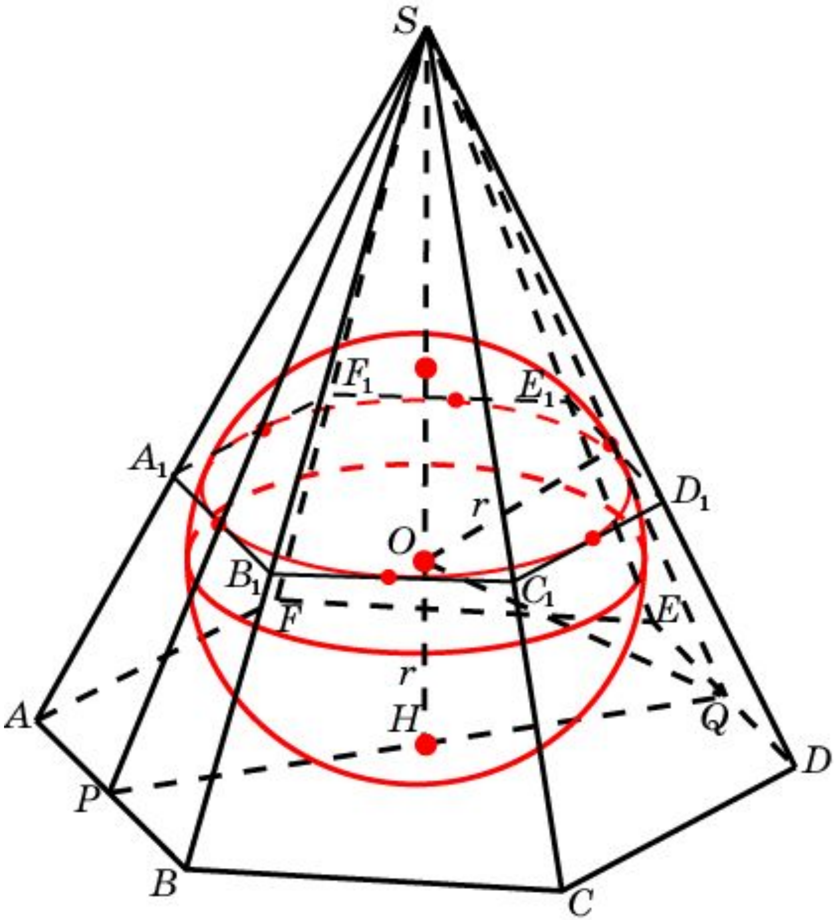
Воспользуемся тем, что для радиуса r окружности, вписанной в треугольник, имеет место формула: $r = S/p$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника.

В нашем случае $S = \dfrac{3}{2}$, $p = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $r = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 2

Найдите радиус сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, у которой ребра основания равны 1, и двугранные углы при основании равны 60°.



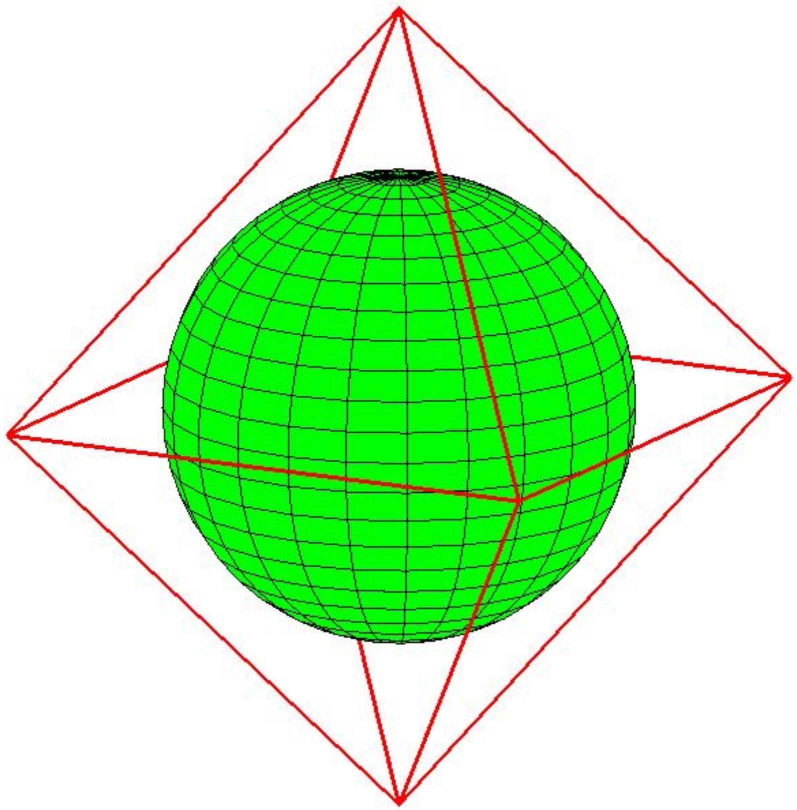
Решение. Воспользуемся тем, что центр вписанной сферы является точкой пересечения биссектральных плоскостей двугранных углов при основании пирамиды. Для радиуса сферы OH имеет место равенство

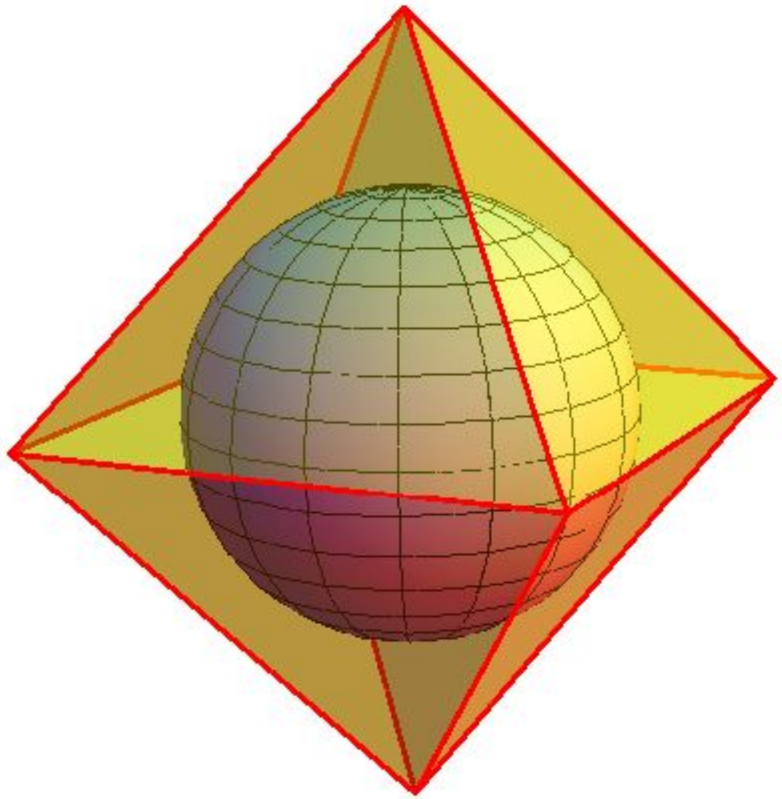
$$OH = HQ \cdot tg\angle OQH.$$

Следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} tg 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

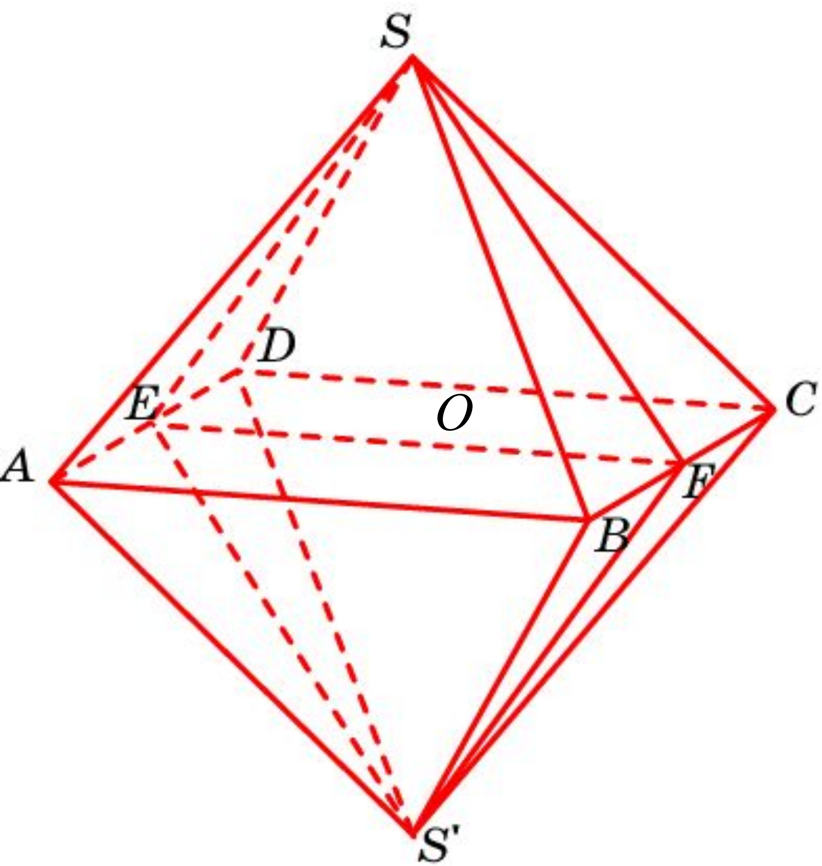
Сфера, вписанная в октаэдр





Упражнение

Найдите радиус сферы, вписанной в единичный октаэдр.

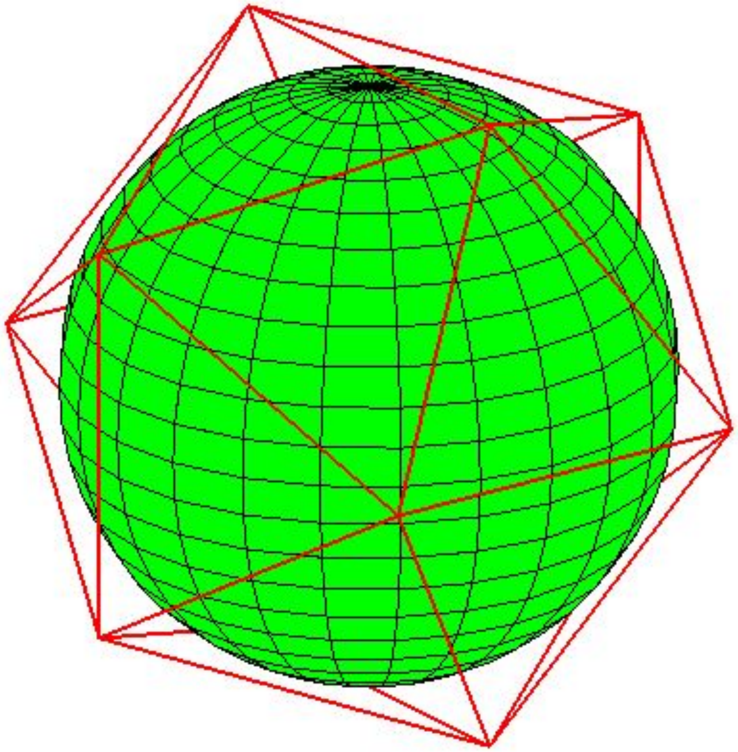


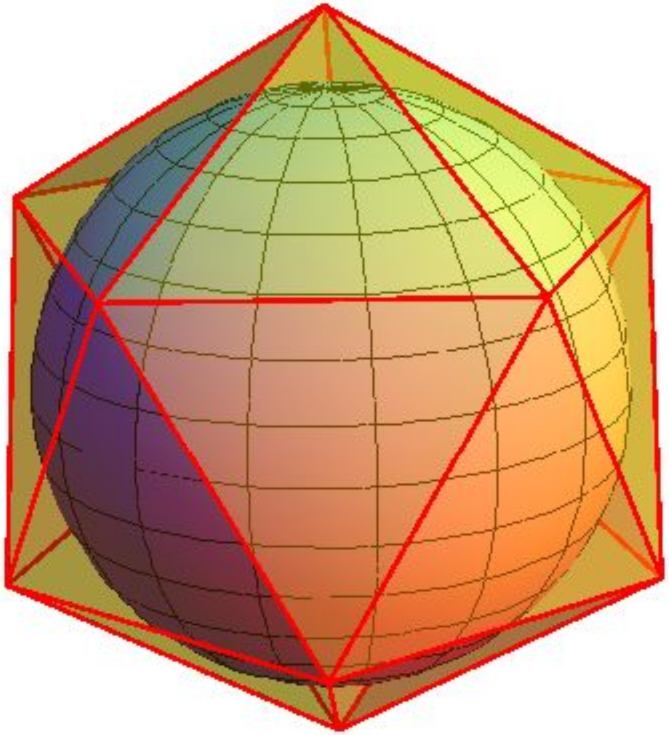
Решение. Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в ромб $SES'F$, в котором $SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $EF=1$, $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда высота ромба, опущенная из вершины E, будет равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Искомый радиус равен половине высоты, и равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

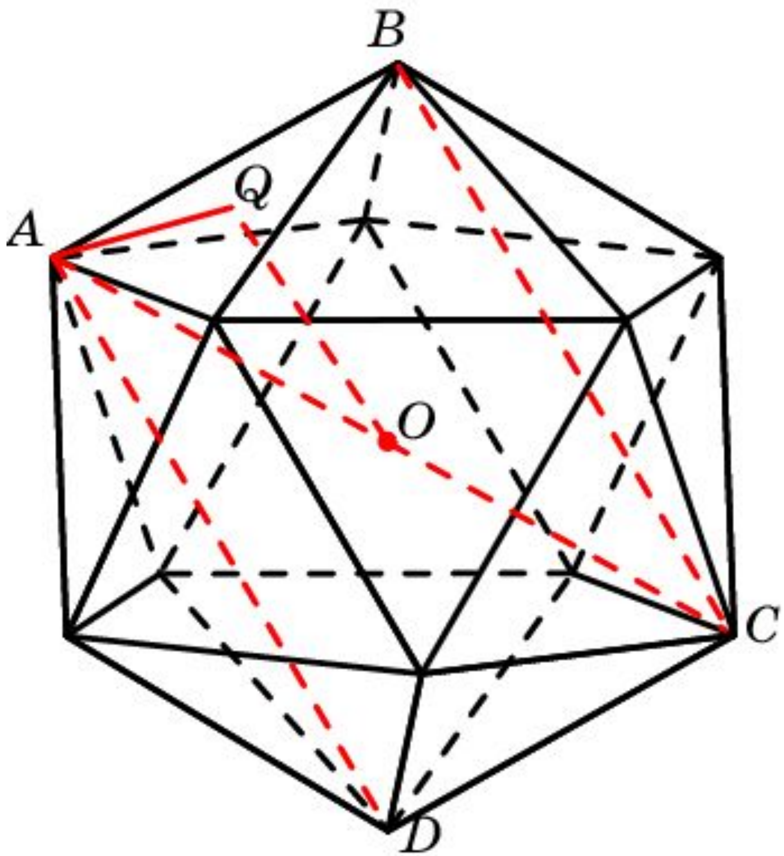
Сфера, вписанная в икосаэдр





Упражнение

Найдите радиус сферы, вписанной в единичный икосаэдр.

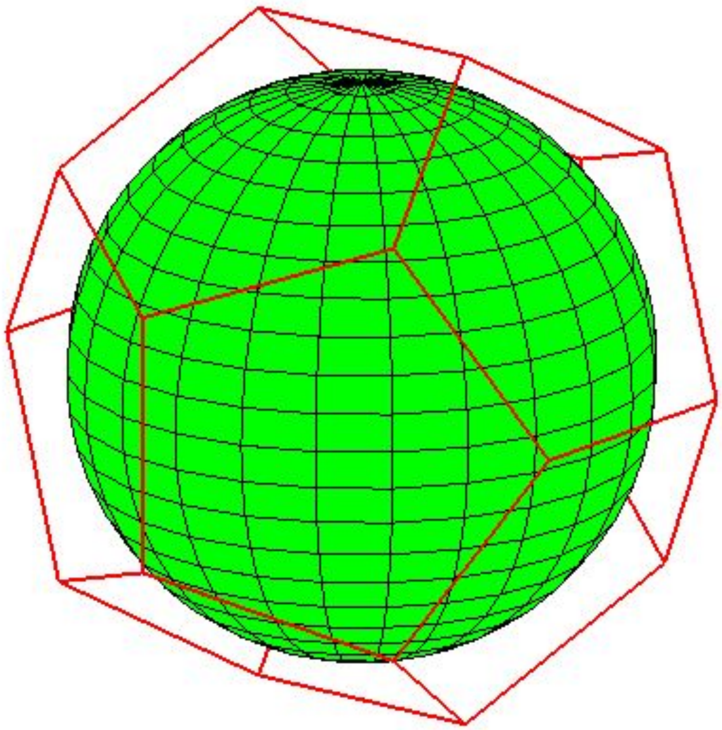


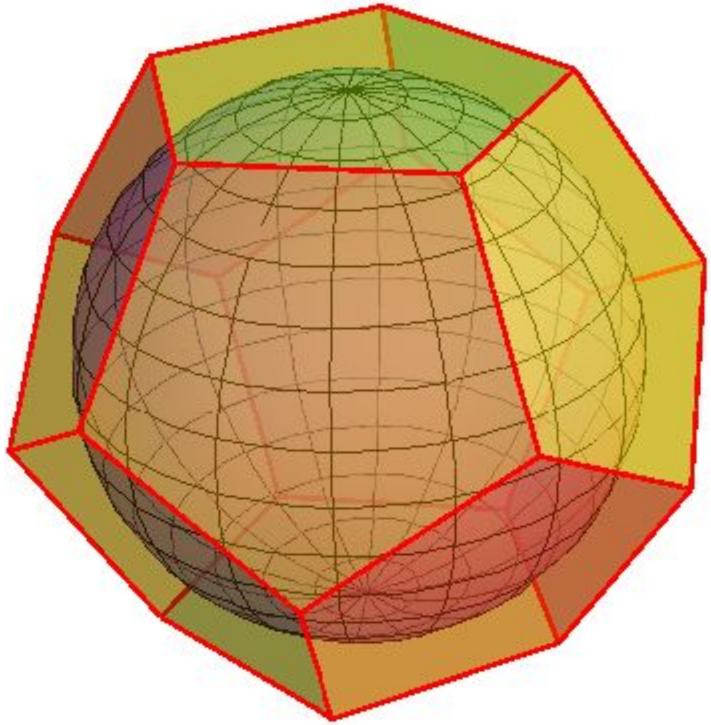
Решение. Воспользуемся тем, что радиус OA описанной сферы равен $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, а радиус AQ окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1, равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику OAQ, получим

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}.$$

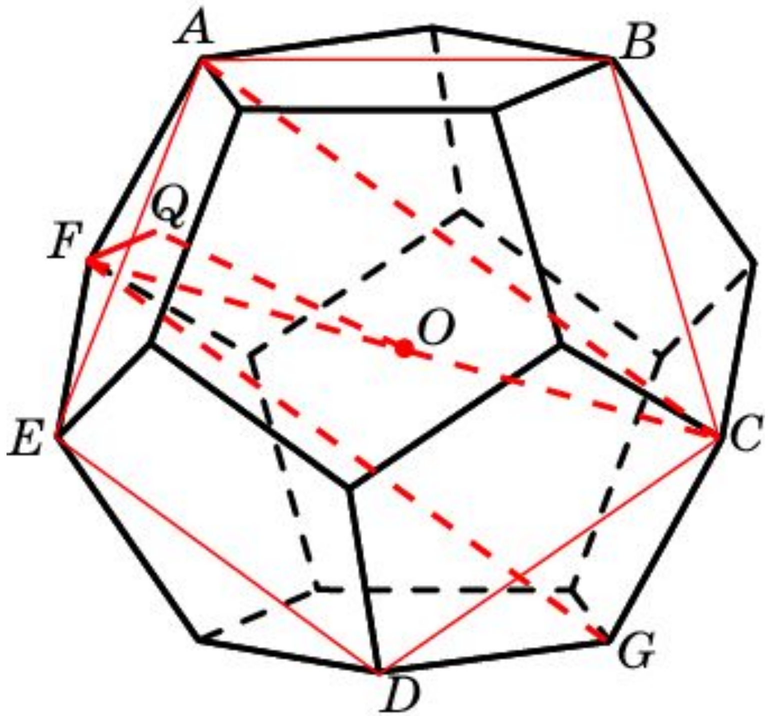
Сфера, вписанная в додекаэдр





Упражнение

Найдите радиус сферы, вписанной в единичный додекаэдр.



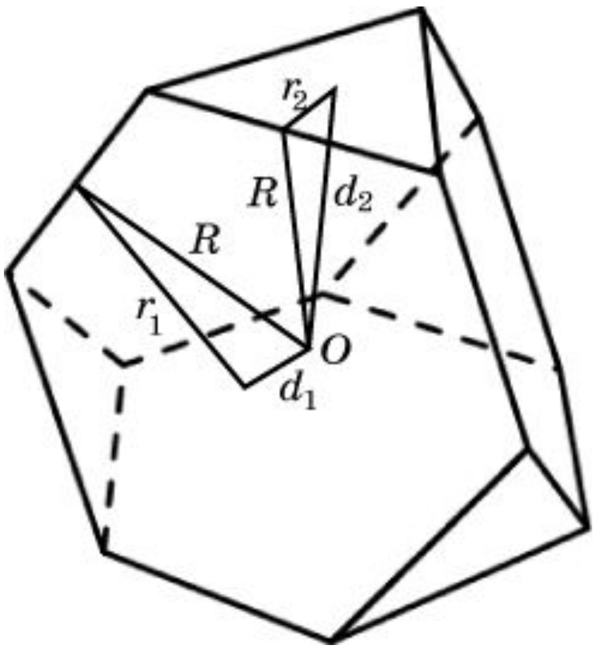
Решение. Воспользуемся тем, что радиус OF описанной сферы равен $\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4}$, а радиус FQ окружности, описанной около равностороннего пятиугольника со стороной 1, равен $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику OFQ, получим

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}.$$

Упражнение 1

Можно вписать сферу в усеченный тетраэдр?



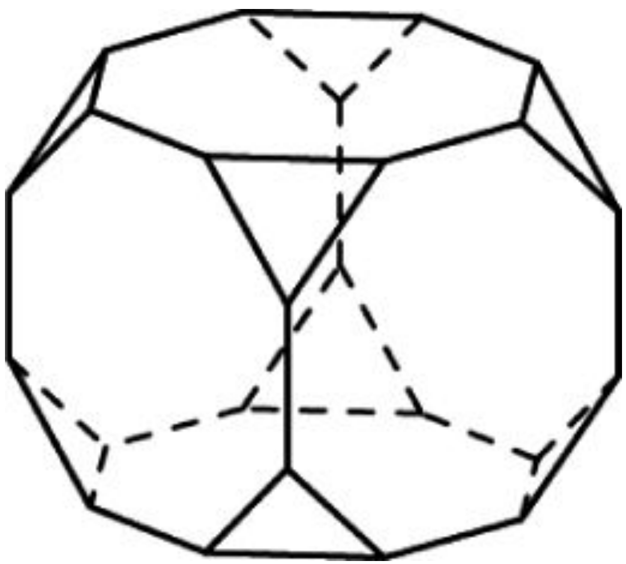
Решение. Заметим, что центр O сферы, вписанной в усеченный тетраэдр должен совпадать с центром сферы, вписанной в тетраэдр, который совпадает с центром сферы, полувписанной в усеченный тетраэдр. Расстояния d_1, d_2 от точки O до шестиугольной и треугольной граней вычисляются по теореме Пифагора:

$d_1 = \sqrt{R^2 - r_1^2}, d_2 = \sqrt{R^2 - r_2^2},$ где R – радиус полувписанной сферы, r_1, r_2 – радиусы окружностей, вписанных в шестиугольник и треугольник, соответственно.

Поскольку $r_1 > r_2$, то $d_1 < d_2$ и, следовательно, сферы, вписанной в усеченный тетраэдр, не существует.

Упражнение 2

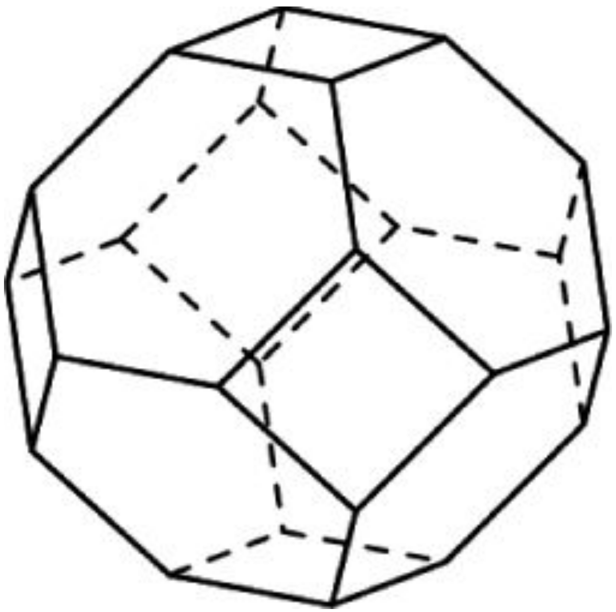
Можно вписать сферу в усеченный куб?



Ответ: Нет. Доказательство аналогично предыдущему.

Упражнение 3

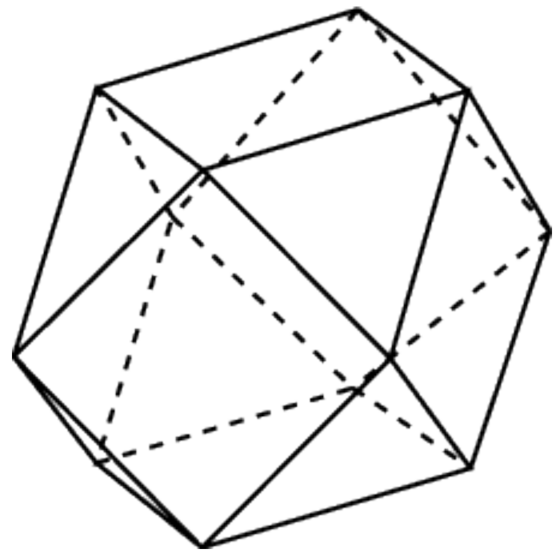
Можно вписать сферу в усеченный октаэдр?



Ответ: Нет. Доказательство аналогично предыдущему.

Упражнение 4

Можно вписать сферу в кубооктаэдр?



Ответ: Нет. Доказательство аналогично предыдущему.