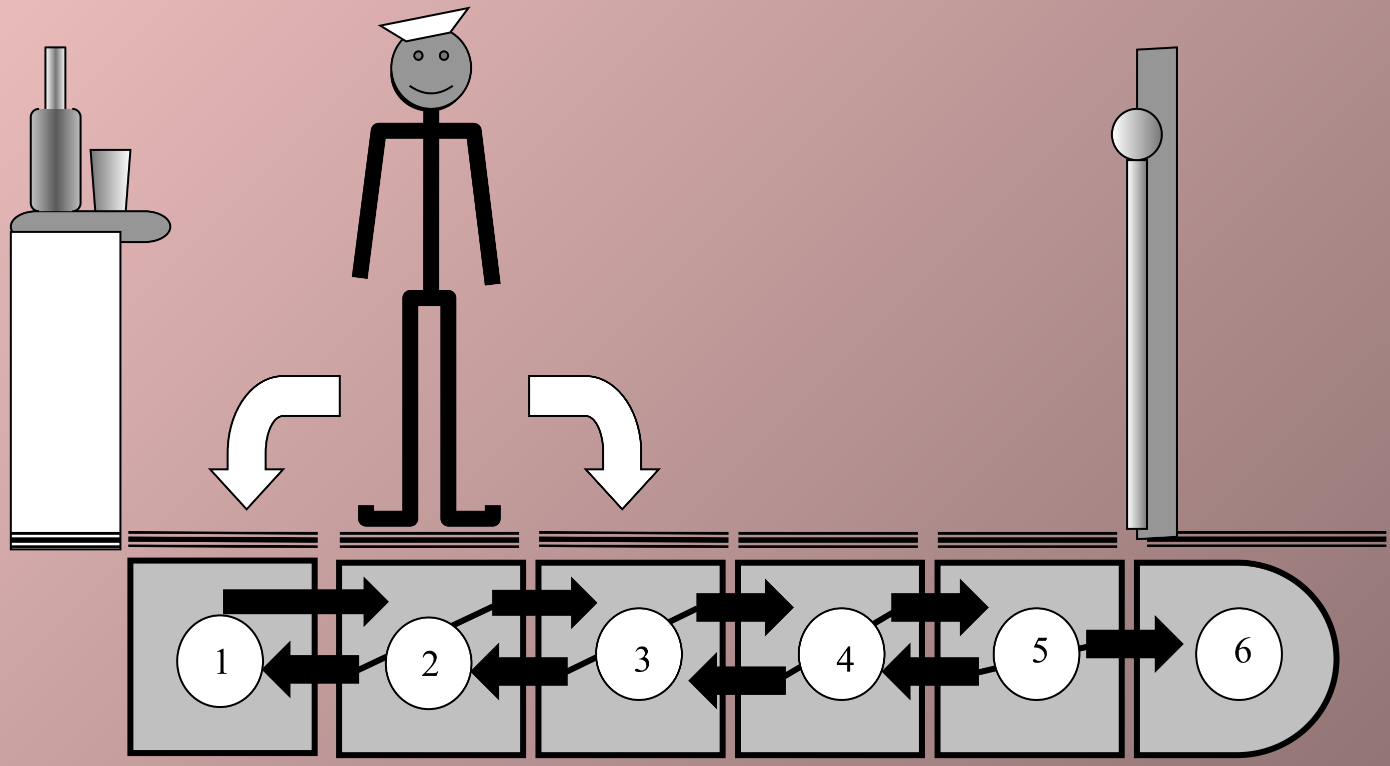
КАФЕДРА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
ИГЭУ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕРИЮ ЦЕПЕЙ МАРКОВА И ЕЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Мизонов Вадим Евгеньевич

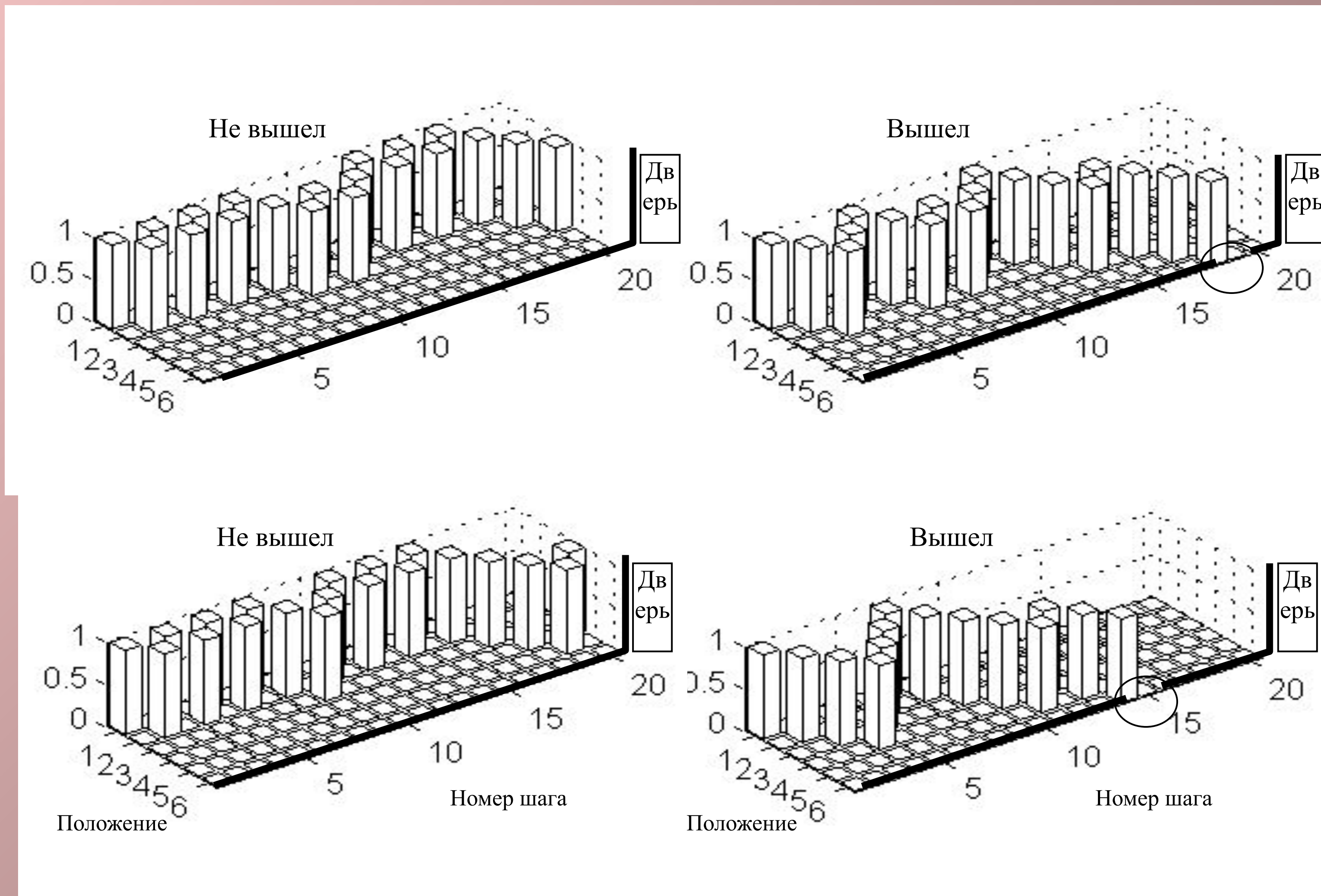
ЗАДАЧА О ПЬЯНОМ МАТРОСЕ



Расчетная схема блужданий пьяного матроса

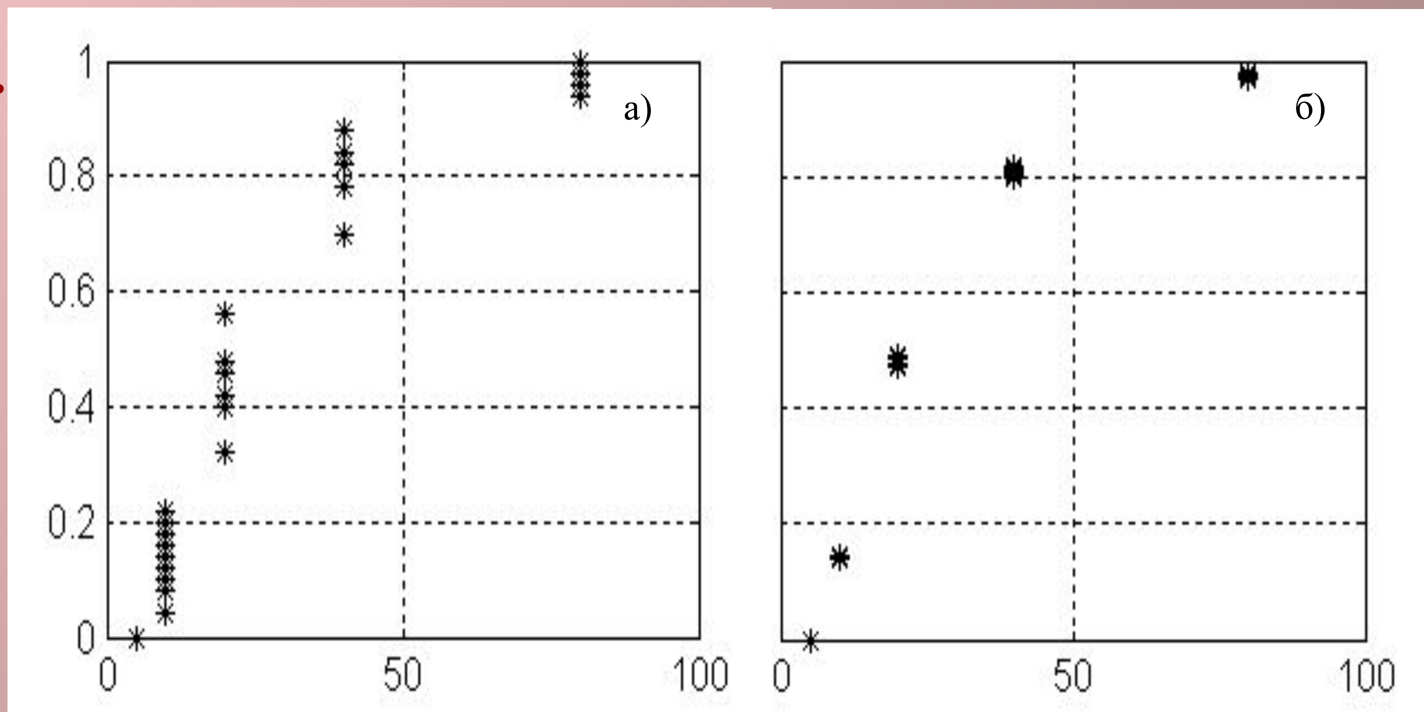
MCh1

Примеры реализации случайных блужданий матроса



MCh2

Вероятность выхода

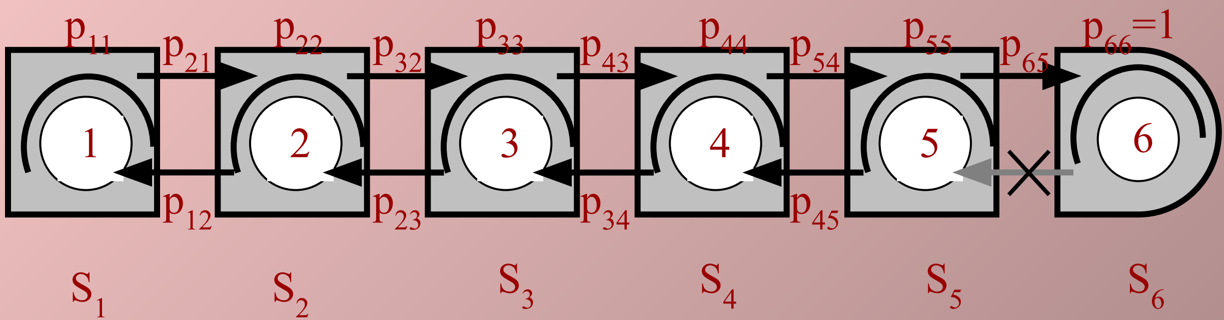


Число шагов матроса

Число шагов матроса

Влияние полного числа испытаний на разброс вероятности выхода матроса: а – 10 тестов по 50 испытаний; б – 10 тестов по 5000 испытаний

Цепная модель процесса случайных блужданий матроса – цепь Маркова



$$\sum_{1}^{m} p_{ij} = 1$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_6 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{1}^{6} S_i = 1$$

$$S_1^{k+1} = \overbrace{p_{11}S_1^k}^{\text{Осталось в 1}} + \overbrace{p_{12}S_2^k}^{\text{Пришло из 2}} + \overbrace{0S_3^k + 0S_4^k + 0S_5^k + 0S_6^k}^{\text{Ничего из 3 и т.д.}}$$

$$S_2^{k+1} = p_{21}S_1^k + p_{22}S_2^k + p_{23}S_3^k + 0S_4^k + 0S_5^k + 0S_6^k$$

$$S_3^{k+1} = \overbrace{0S_1^k}^{\text{Ничего 1}} + \overbrace{p_{32}S_2^k}^{\text{Пришло из 2}} + \overbrace{p_{33}S_3^k}^{\text{Осталось в 3}} + \overbrace{p_{34}S_4^k}^{\text{Пришло из 4}} + \overbrace{0S_5^k + 0S_6^k}^{\text{Ничего из 5 и т.д.}}$$

$$S_4^{k+1} = 0S_1^k + 0S_2^k + p_{43}S_3^k + p_{44}S_4^k + p_{45}S_5^k + 0S_6^k$$

$$S_5^{k+1} = 0S_1^k + 0S_2^k + 0S_3^k + p_{54}S_4^k + p_{55}S_5^k + 0S_6^k$$

$$S_6^{k+1} = 0S_1^k + 0S_2^k + 0S_3^k + 0S_4^k + p_{65}S_5^k + 1S_6^k$$

Матричная запись

$$\begin{bmatrix} S_1^{k+1} \\ S_2^{k+1} \\ S_3^{k+1} \\ S_4^{k+1} \\ S_5^{k+1} \\ S_6^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{65} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1^{k} \\ S_2^{k} \\ S_3^{k} \\ S_4^{k} \\ S_5^{k} \\ S_6^{k} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{S^{k+1}=PS^k}}$$

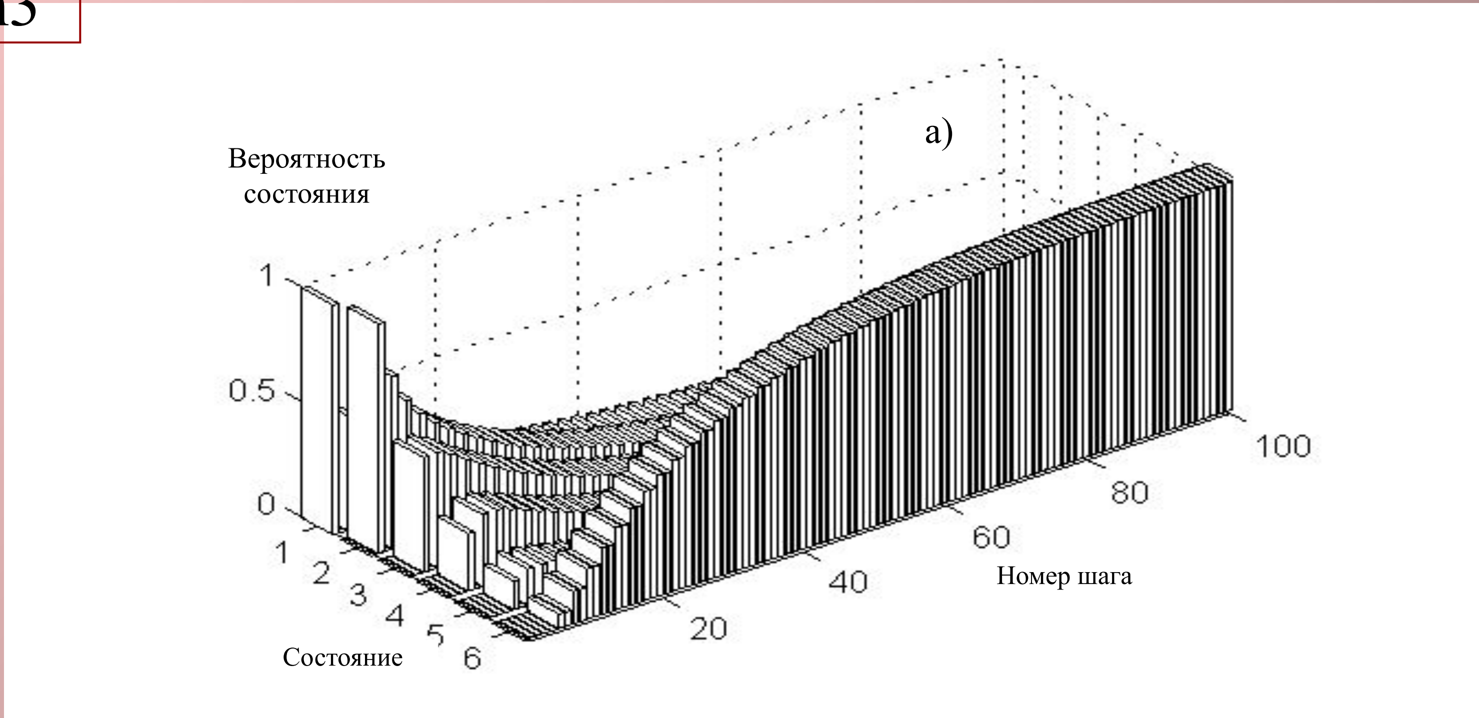
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

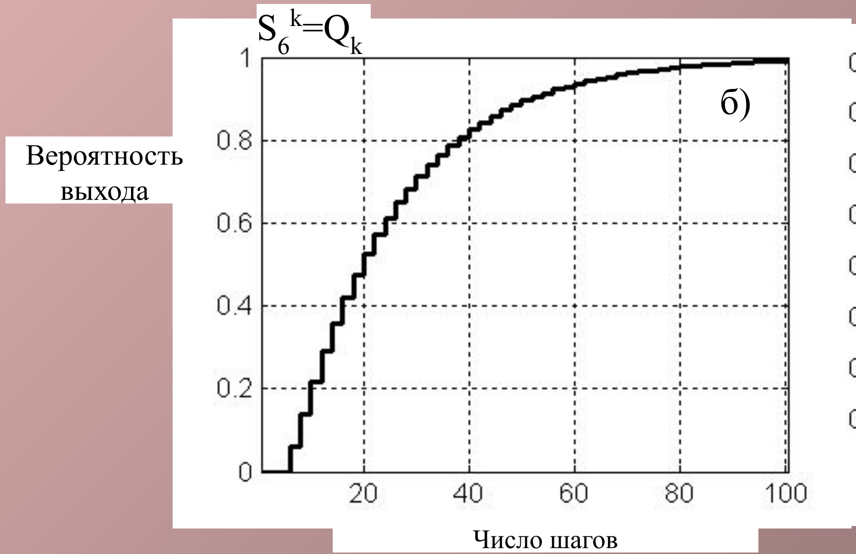
$$\boxed{q^k = S^{5k} p_{65} = S_6^{k+1} - S_6^{k}}$$

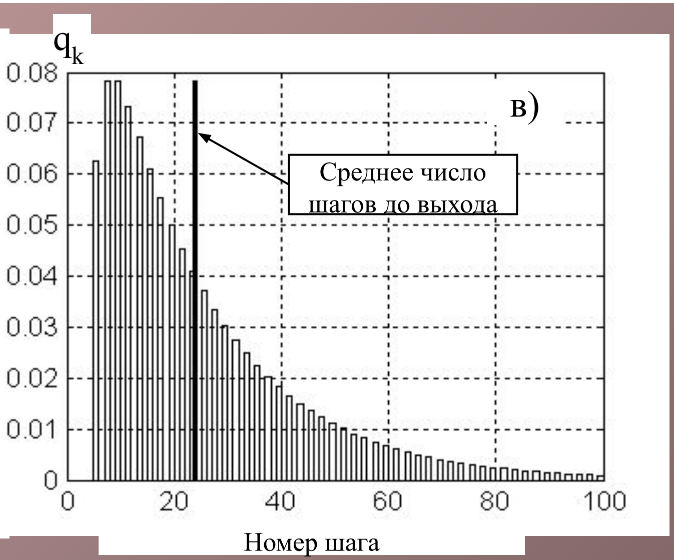
$$\boxed{\langle k \rangle = \sum_1^{\infty} k q_k}$$

Эволюция состояния процесса случайных блужданий

MCh3



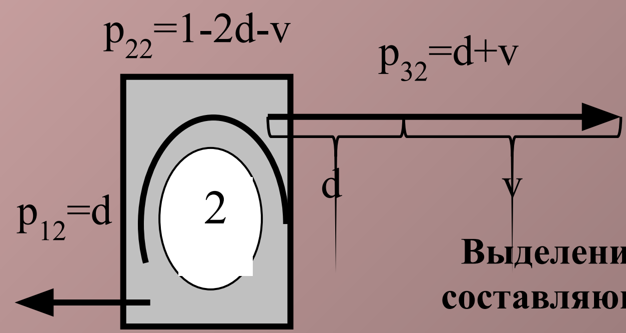




Одномерная диффузия. Виды и влияние краевых условий

Иллюстрация процесса диффузии

$$\boxed{q_d = -D\frac{\Delta c}{\Delta x}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}}$$



Выделение симметричной составляющей вероятностей перехода

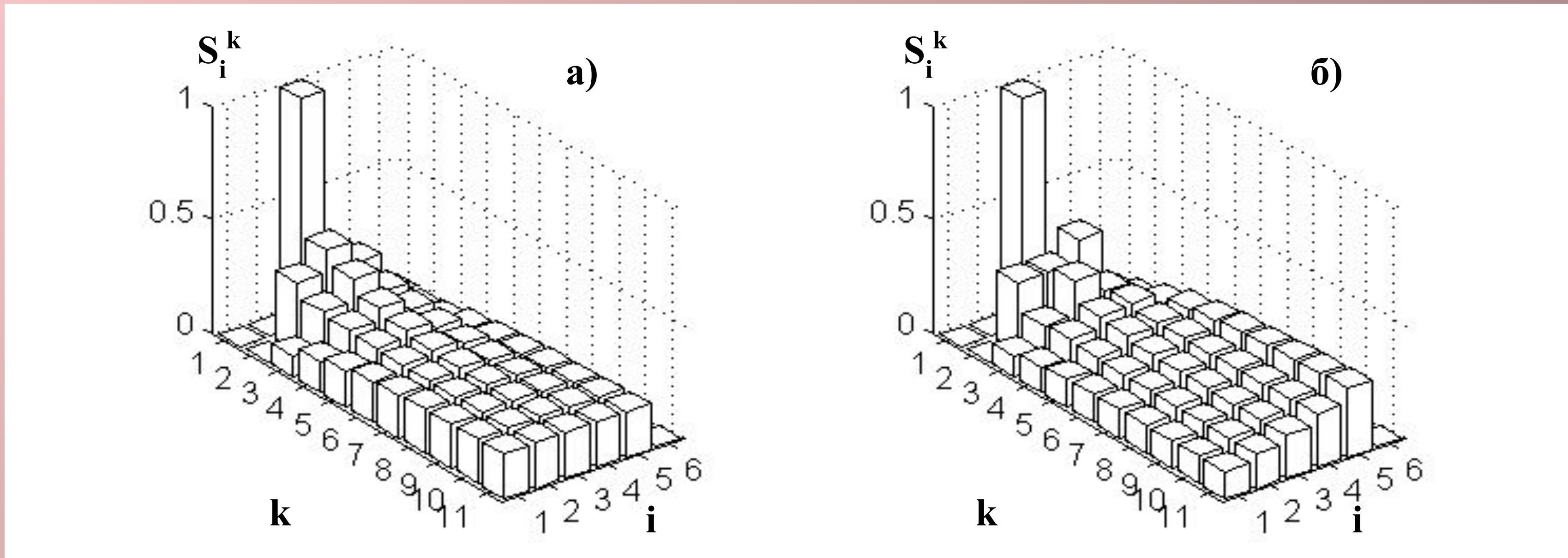
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1\text{-}d\text{-}v & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d+v & 1\text{-}2d\text{-}v & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d+v & 1\text{-}2d\text{-}v & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d+v & 1\text{-}2d\text{-}v & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d+v & 1\text{-}d\text{-}v_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_f & 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица диффузии:

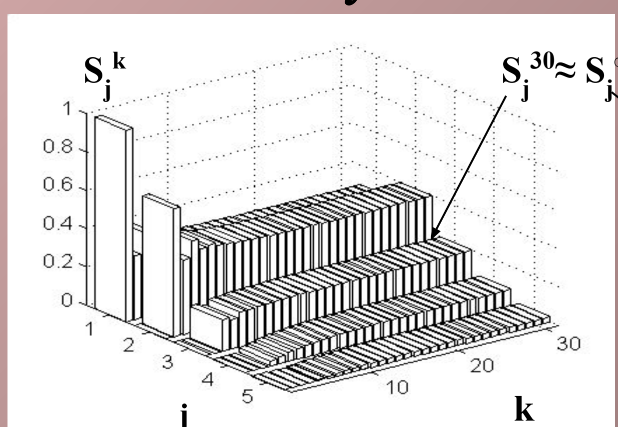
$$\boxed{d = D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}} \qquad \boxed{v = V\frac{\Delta t}{\Delta x}}$$

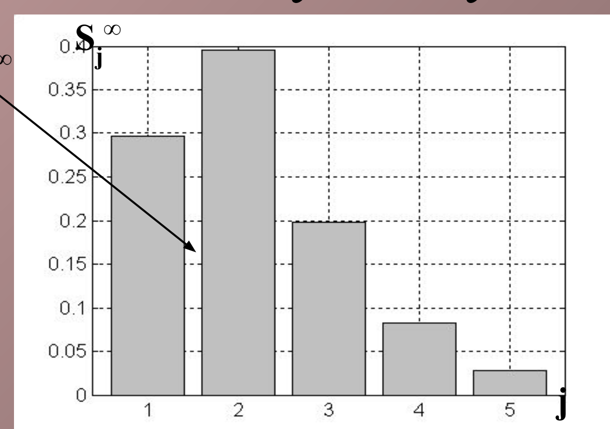
MCh4

Эволюция содержания диффундирующего вещества на отрезке с закрытыми границами



$\mathbf{S^\infty = PS^\infty} \rightarrow$ **S**∞ - один из собственных векторов **P**, соответствующим собственному числу λ=1



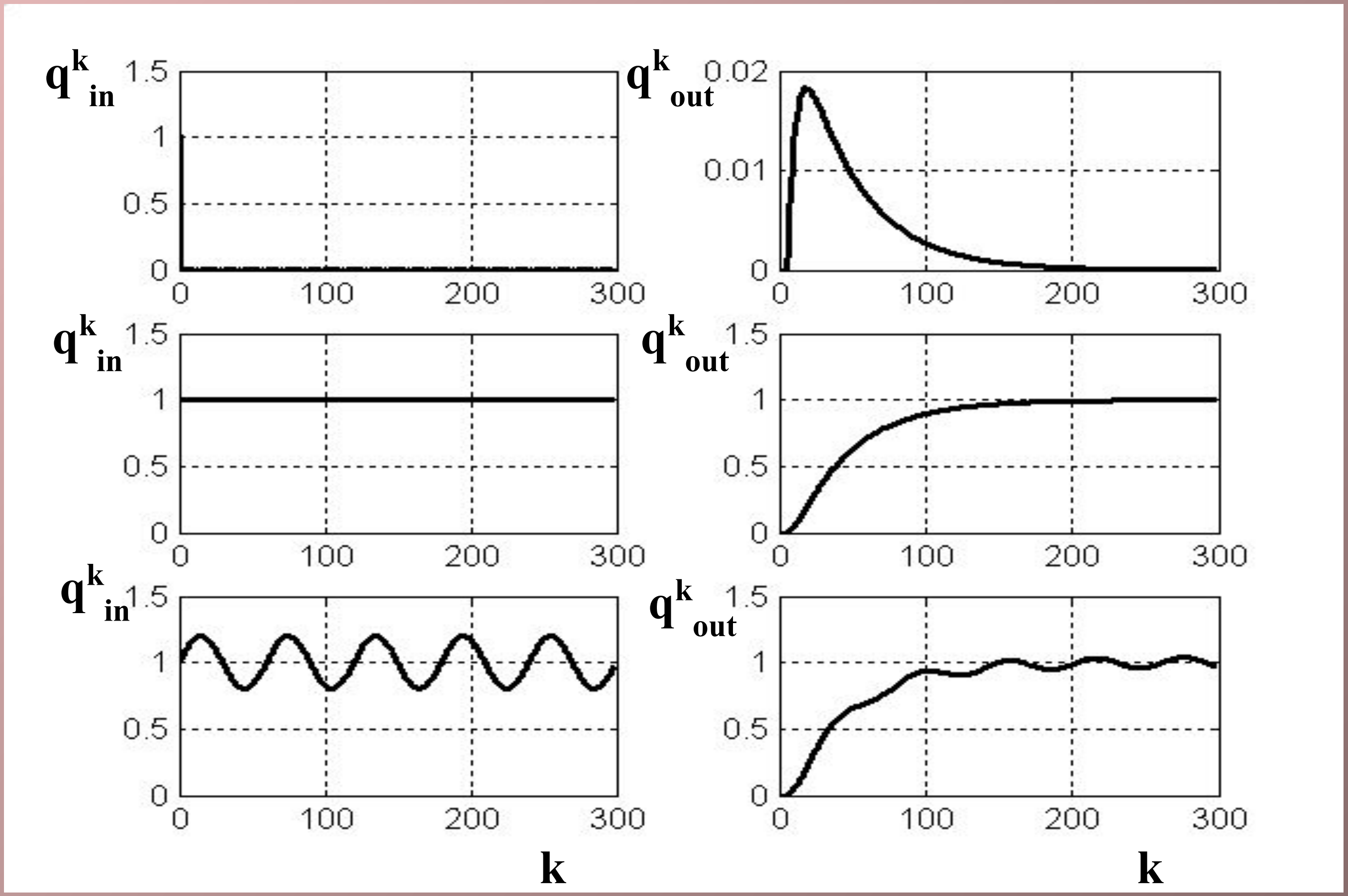


Диффузия с источниками или процесс с порождением частиц

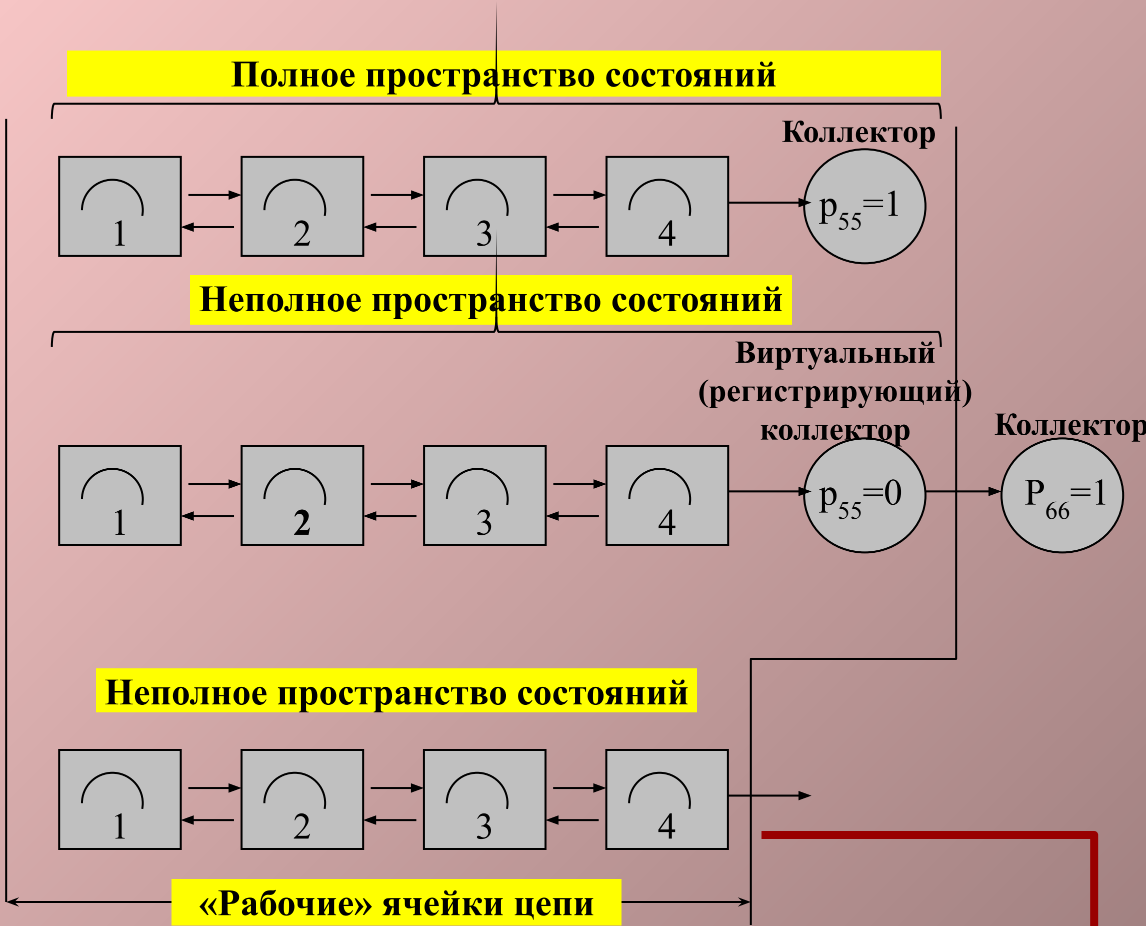
$$S^{k+1} = PS^k + S_f^{\,k}$$

$S_f^{\,k}$ – вектор подачи

MCh5



Разное представление пространства состояний



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & 0 & 0 \\ 0 & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 1 \end{bmatrix}$$

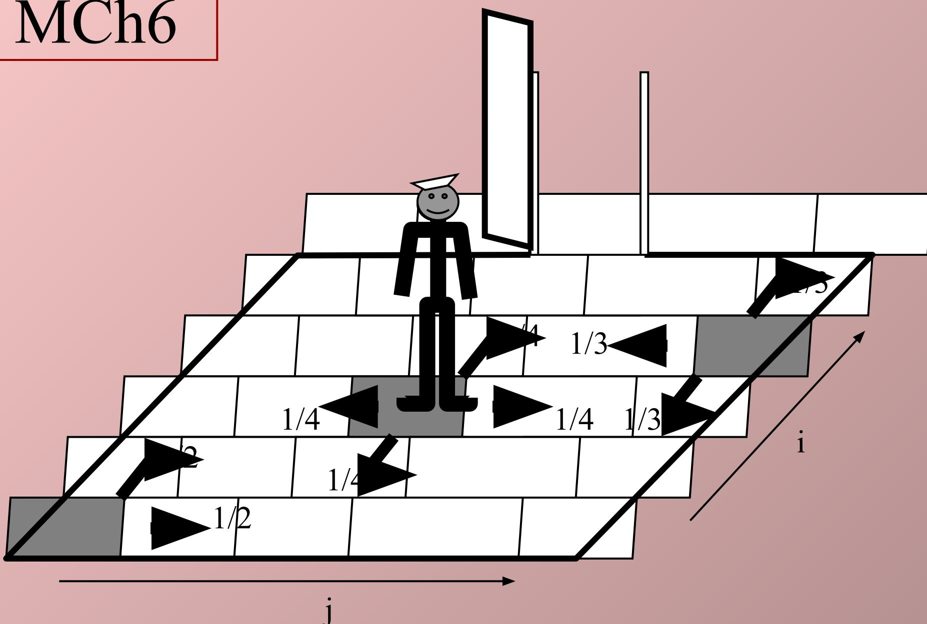
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & 0 & 0 \\ 0 & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & 0 & 0 \\ 0 & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

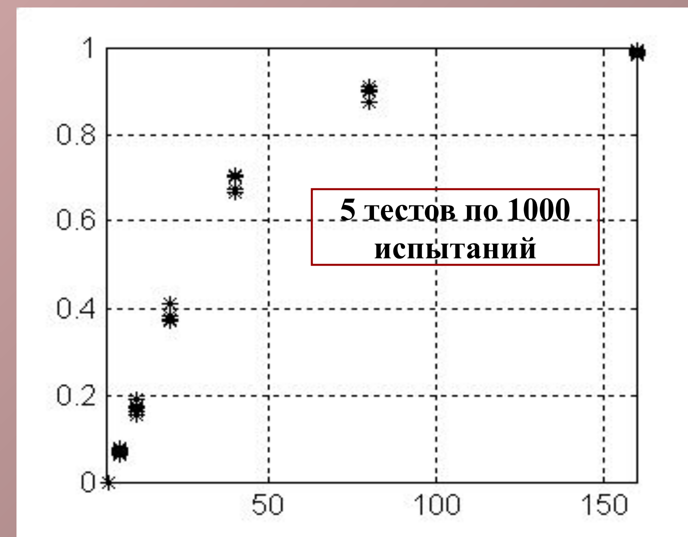
$$\mathbf{S^{\infty} = (I - P_R)^{-1} S^f}$$

Случайные блуждания и диффузия на плоскости

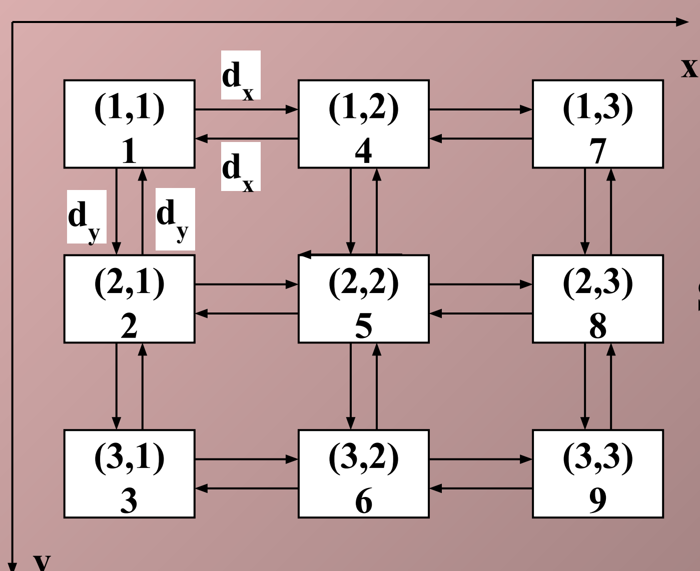
MCh6



Вероятность выхода



Число шагов матроса

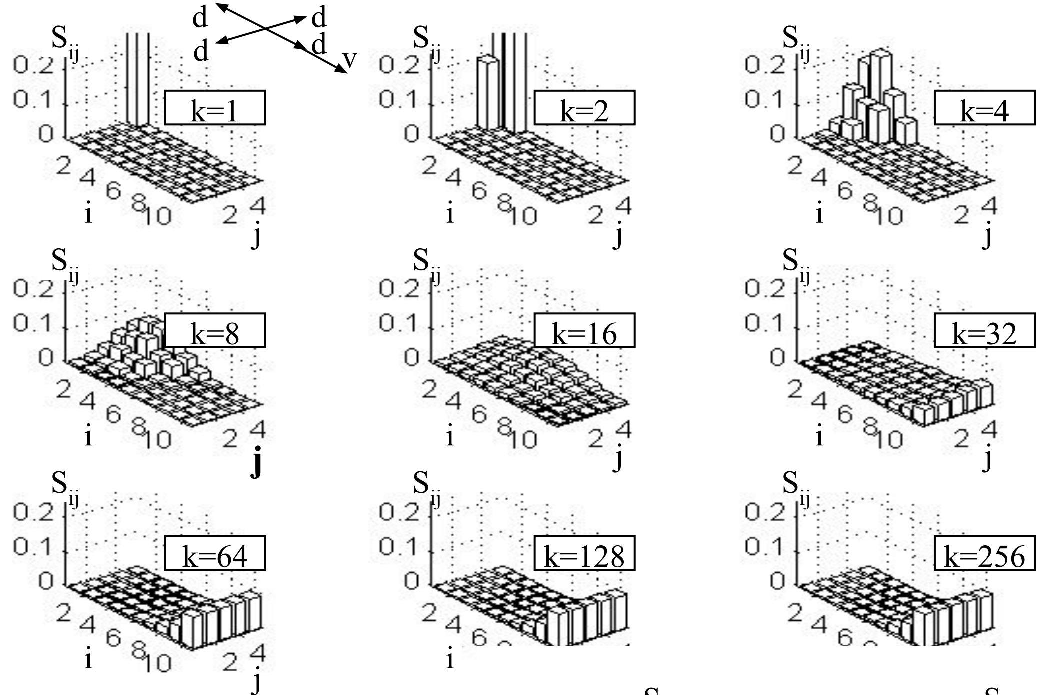


$$\mathbf{Sm} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Sm} = \begin{bmatrix} S_1 & S_4 & S_7 \\ S_2 & S_5 & S_8 \\ S_3 & S_6 & S_9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_8 \\ S_9 \end{bmatrix}$$

Структура переходной матрицы

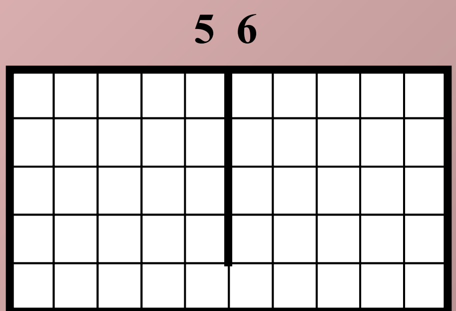
$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1\to 1 & 2\to 1 & 0 & 4\to 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1\to 2 & 2\to 2 & 3\to 2 & 0 & 5\to 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\to 3 & 3\to 3 & 0 & 0 & 6\to 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1\to 4 & 0 & 0 & 4\to 4 & 5\to 4 & 0 & 7\to 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2\to 5 & 0 & 4\to 5 & 5\to 5 & 6\to 5 & 0 & 8\to 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3\to 6 & 0 & 5\to 6 & 6\to 6 & 0 & 0 & 9\to 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4\to 7 & 0 & 0 & 7\to 7 & 8\to 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\to 8 & 0 & 7\to 8 & 8\to 8 & 9\to 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\to 9 & 0 & 8\to 9 & 9\to 9 \end{bmatrix}$$

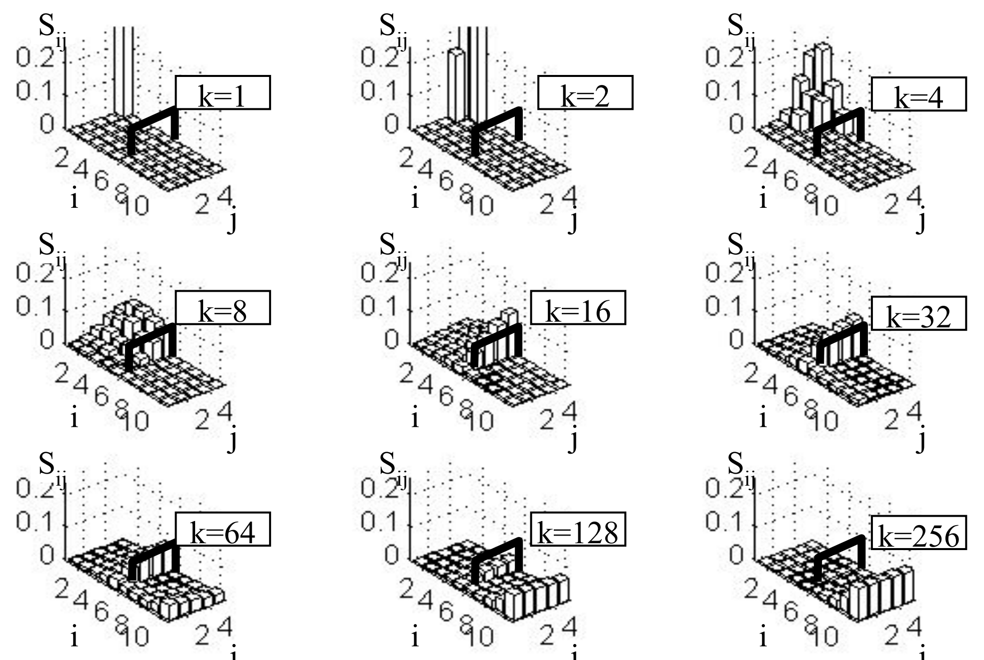
$$\mathbf{P}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1-2d & d & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1-3d & d & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1-2d & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ \hline d & 0 & 0 & 1-3d & d & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & d & 1-4d & d & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & d & 1-3d & 0 & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 1-2d & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & d & 1-3d & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & d & 1-d \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{P}=\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{P}_{65} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{56} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$



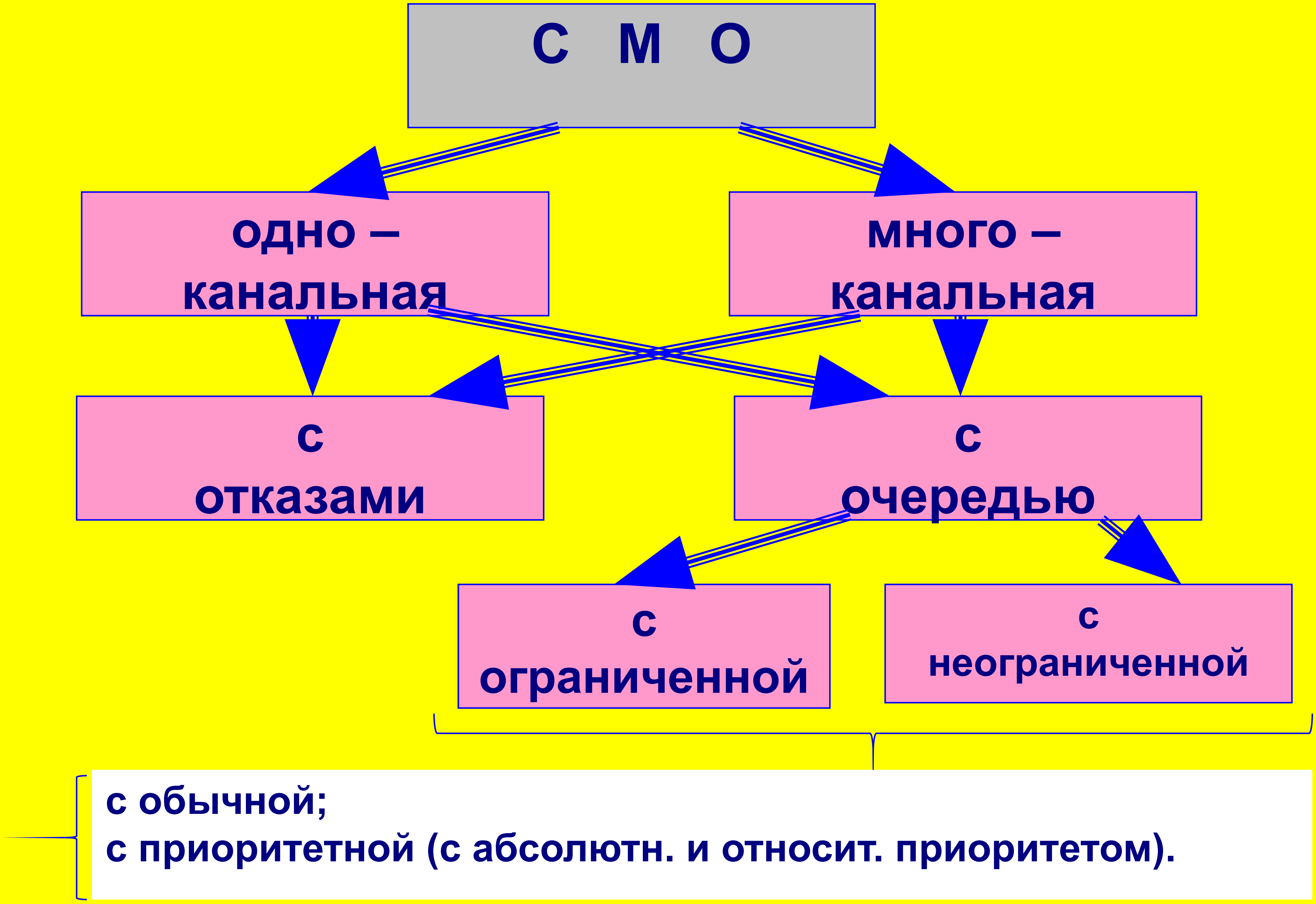


MCh7

Конец лекции 1

Спасибо за внимание

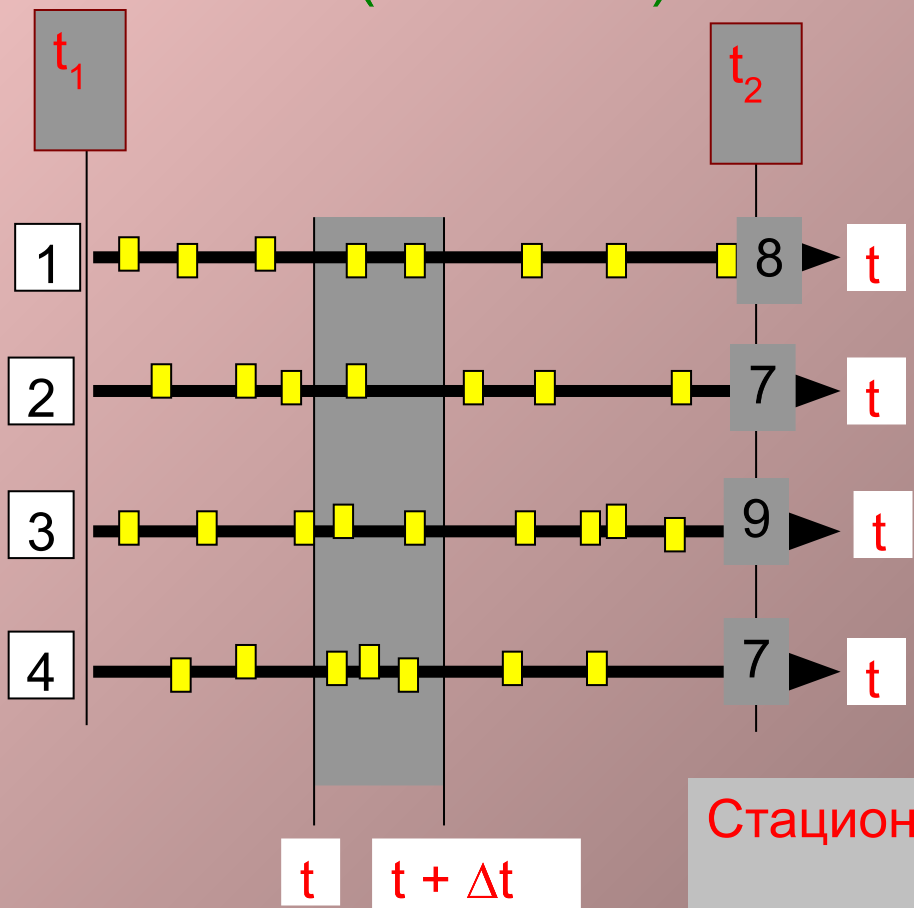
ABC ТЕОРИИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО)



ПОТОКИ СОБЫТИЙ

работа → отказ → ремонт → окончание ремонта → работа

состояние — переход (событие) — состояние — переход (событие) — состояние



-событие: сис-ма переходит из состояния i в состояние j;

$P_{IJ}(t)$ – поток событий;

$\lambda_{IJ} = P_{IJ}(t, \Delta t)/ \Delta t$ – интенсивность потока событий (плотность вероятности перехода.

Стационарный случайный процесс

λ_{IJ} **= const**

ПОТОКИ СОБЫТИЙ И ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЯ

событие=отказ (ν)

Состояние **1**
(работает)
Вероятность S_1

Состояние **2**
(ремонтируется)
Вероятность S_2

событие=окончание ремонта (μ)

N систем: NS_1 - работает, NS_2 - не работает (в ремонте)

уходит из 1 : $NS_1\nu$

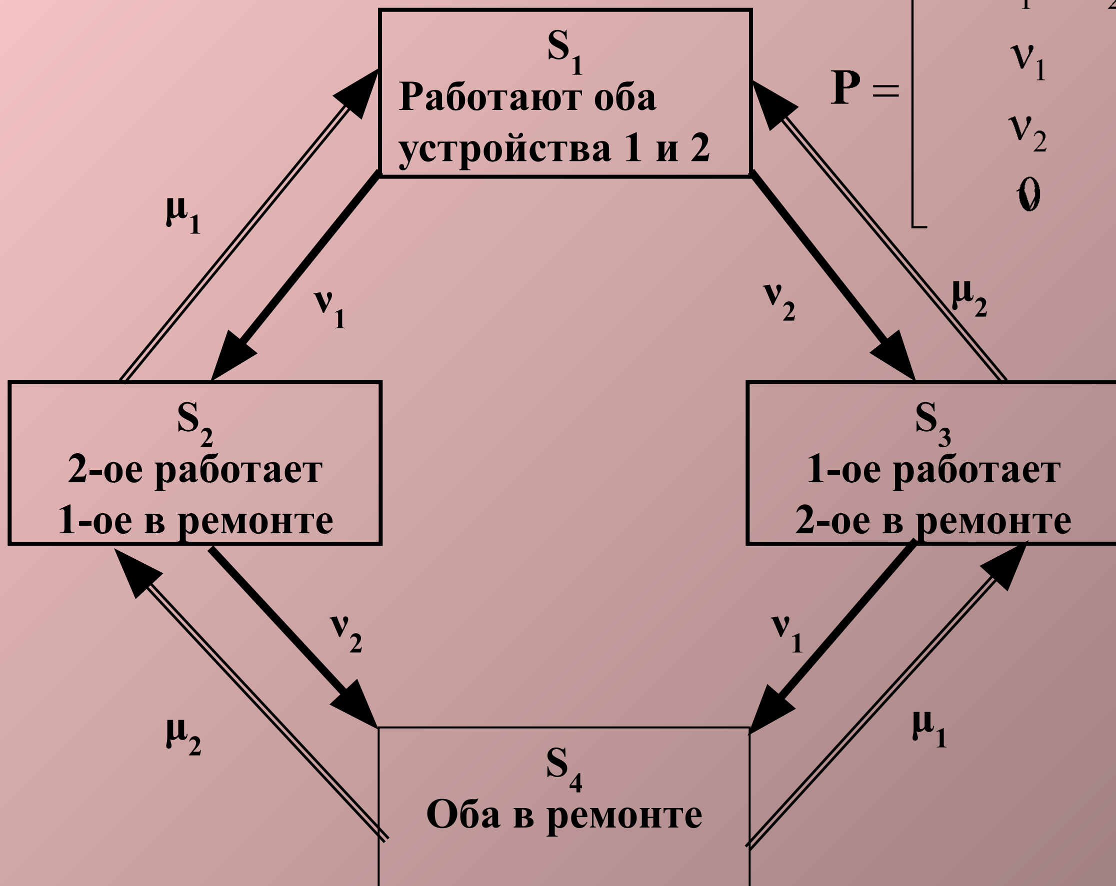
В ед. времени $\quad NS_1\nu = NS_2\mu$

приходит в 1 : $NS_2\mu$ $\quad S_1 + S_2 = 1$

Доход $Д = Д_0\, S_1$

$S_1 = \mu /(\mu + \nu)$	1 / 2	1 / 3	2 / 3
	$\nu = \mu$	$\nu = 2\mu$	$\nu = 0{,}5\mu$
$S_2 = \nu /(\mu + \nu)$	1 / 2	2 / 3	1 / 3

Пространство состояний и возможные переходы в системе с двумя устройствами



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\nu_1-\nu_2 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \nu_1 & 1-\mu_1-\nu_2 & 0 & \mu_2 \\ \nu_2 & 0 & 1-\mu_2-\nu_1 & \mu_1 \\ 0 & \nu_2 & 1-\mu_1-\mu_2 & \end{bmatrix}$$

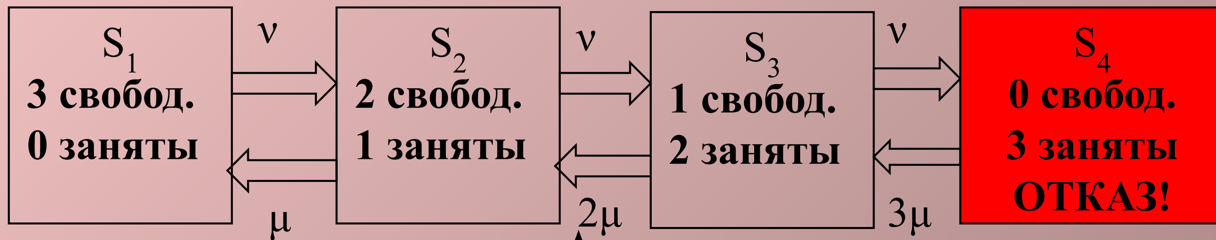
ν_1=0,05; ν_2=0,1; μ_1=0,1; μ_2=0,15.

S_1^{∞}=0,4; S_2^{∞}=0,2;

S_3^{∞}=0,2667; S_4^{∞}=0,1333.

Оба устройства работают одновременно с вероятностью 0,4, а оба не работают с вероятностью 0,1333

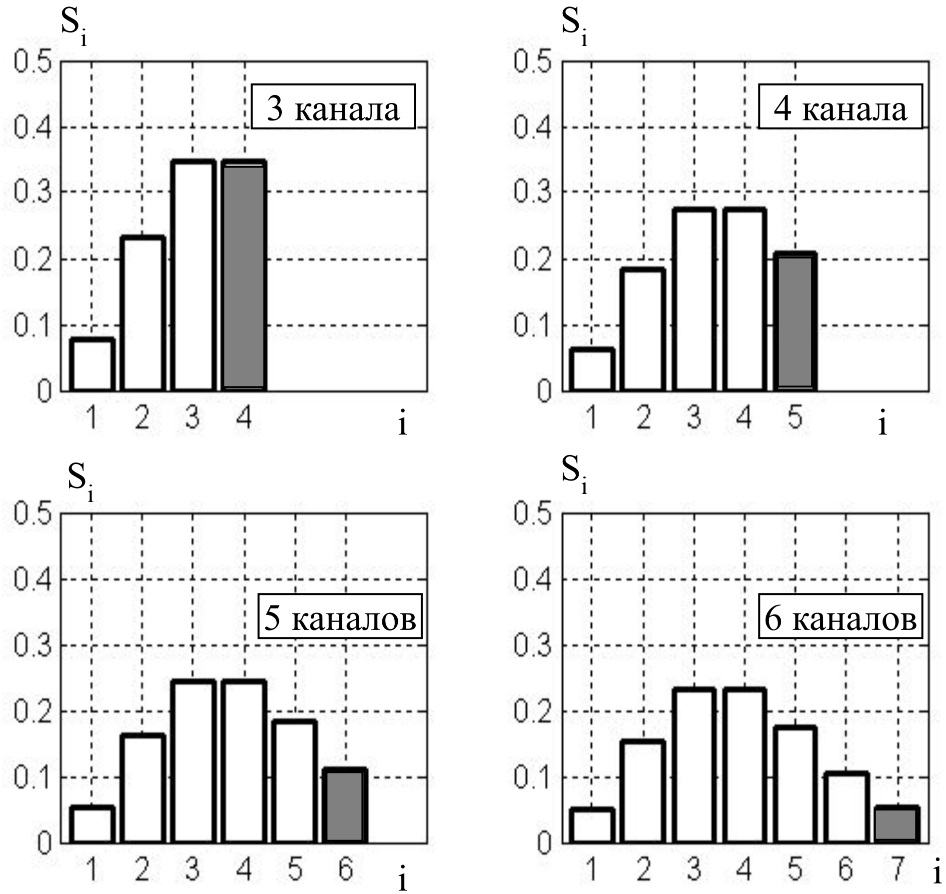
Многоканальная СМО с отказами



Потому что все равно, какой канал освободится, а их 2

ν - интенсивность потока заявок (1/ν – время чередования заявок), μ – интенсивность потока обслуживания (1/μ – время обслуживания одной заявки).

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1-\nu- & \mu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu-\mu & 2\mu & 0 \\ 0 & 1-\nu-2\mu & 3\mu & \\ 0 & 1-\nu-3\mu & & \end{bmatrix}$$



(ν=0,15; μ=0,05)

$S_S = 1 - S_R$

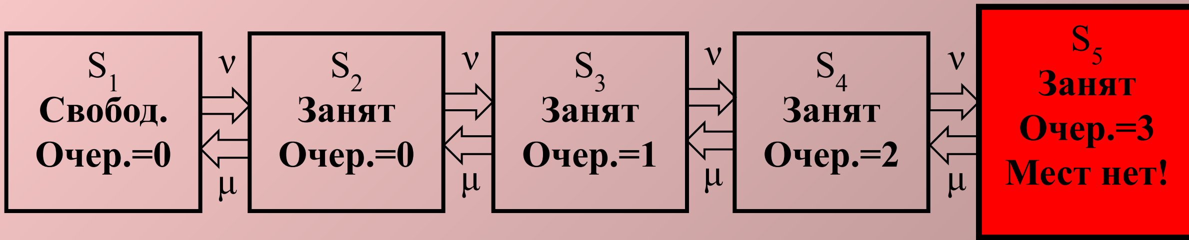
$S_S \nu$ - интенсивность потока обслуженных заявок.
Каждый занятый канал обслуживает в единицу времени μ заявок.

$S_S \nu/\mu$ или $(1 - S_{N+1})\nu/\mu$ – число занятых каналов

Доля занятых каналов – поделить на их общее число N.

Число каналов	3	4	6
Вероятность отказа	0,35	0,21	0,06
Вероятность обслуживания	0,65	0,79	0,94
Доля занятых каналов	0,65	0,60	0,47

Одноканальная СМО с очередью



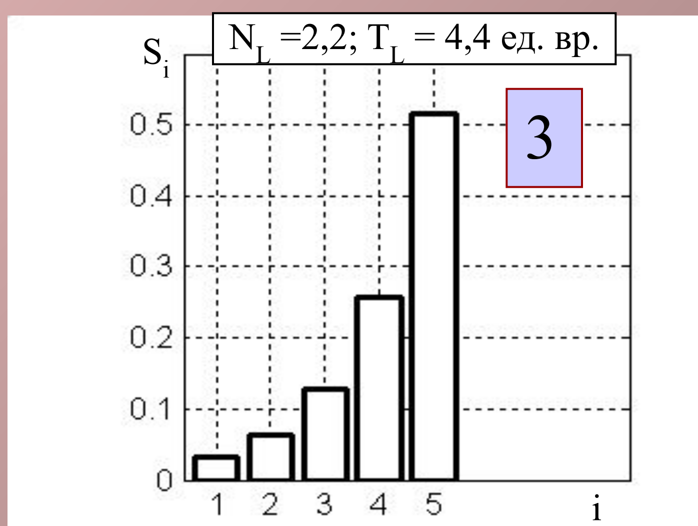
$$P=\begin{bmatrix} 1-\nu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu-\mu & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu-\mu & \mu & 0 & \\ 0 & 1-\nu-\mu & \mu & & \\ 0 & 1-\mu & 0 & & \end{bmatrix}$$

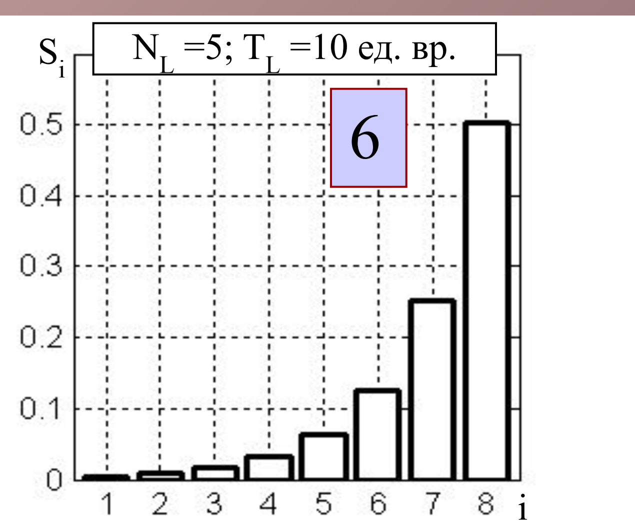
$$N_L=\sum_{k=1}^{m} kS_{k+2}^{\infty}$$

среднее число заявок в очереди

$$T_L=\frac{N_L}{\nu}=\frac{\sum_{k=1}^{m} kS_{k+2}^{\infty}}{\nu}$$

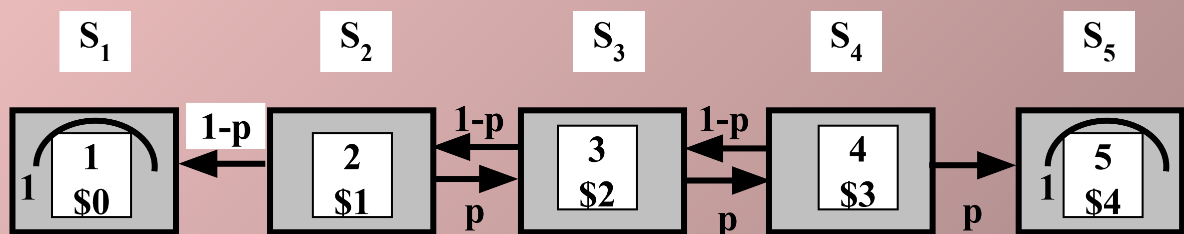
среднее время стояния заявки в очереди





Разные задачи Игрок

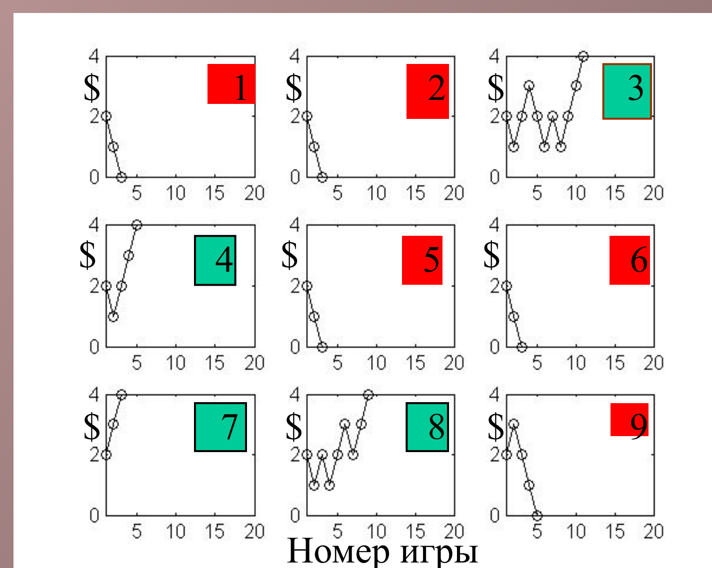
Итак, игрок начинает игру, имея в кармане \$2. Каждый раз он ставит на кон \$1. С вероятностью p он выигрывает эту игру, а с вероятностью 1 – p проигрывает. Его цель – увеличить свою сумму до \$4; если цель достигается, то он игру заканчивает. Естественно, он заканчивает игру, если у него не остается денег, то есть после очередной партии он имеет \$0.



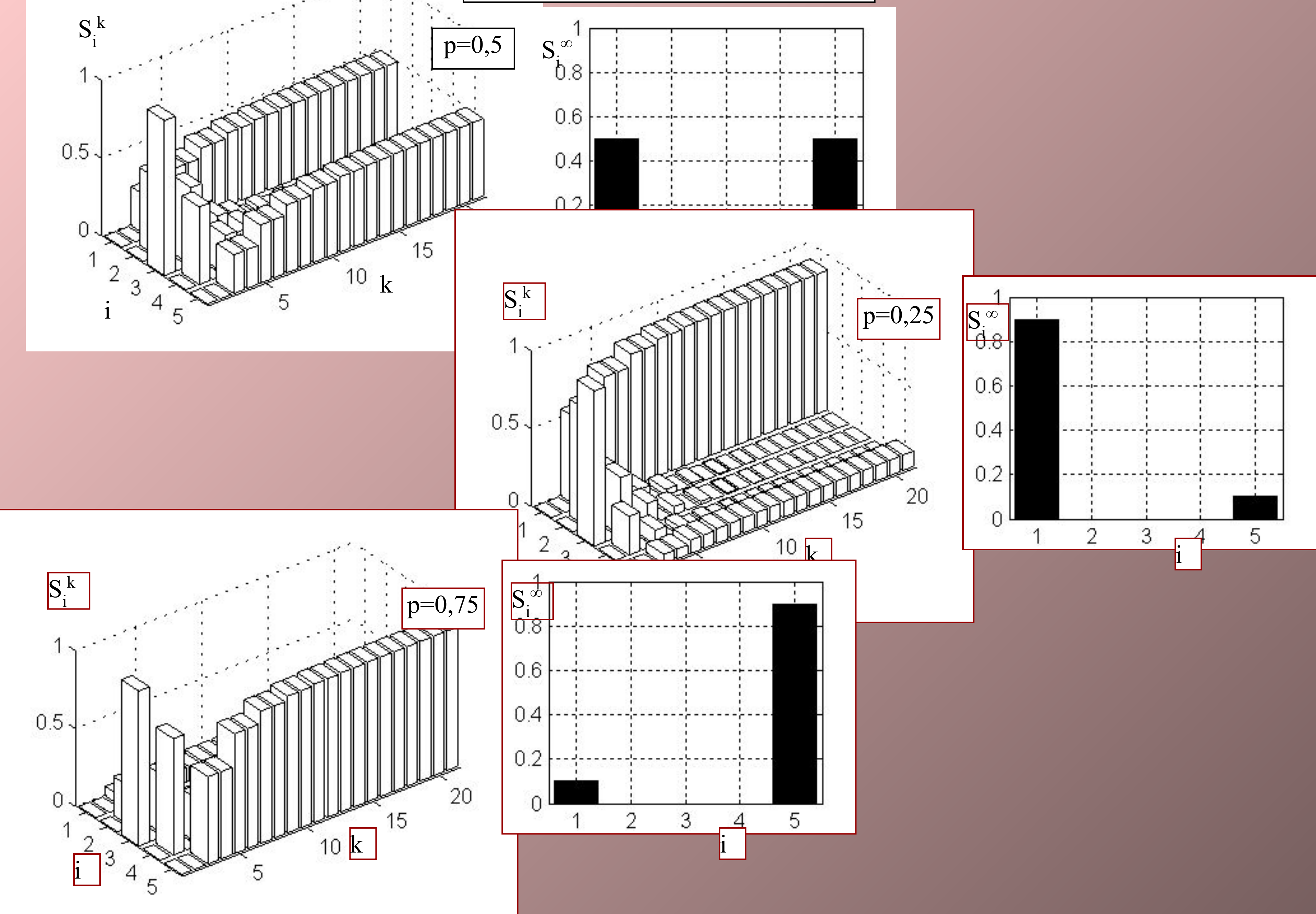
Проигрыш **Игра продолжается** **Выигрыш**

$$
\begin{array}{c}
\text{Состояние} \\
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 1\text{-}p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1\text{-}p & 0 & 0 \\
0 & p & 0 & 1\text{-}p & 0 \\
0 & 0 & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
$$



Номер состояния:	1	2	3	4	5
Сумма у игрока	$0	$1	$2	$3	$4



Разные задачи   Пенсионные отчисления

Неработающие дети (1), работающие взрослые (2), пенсионеры (3) и умершие (4). Пусть каждый год 0,04 детей становятся работающими взрослыми, а 0,001 умирают; 0,03 работающих взрослых уходят на пенсию, а 0,01 умирают; умирает также 0,05 пенсионеров. Найти установившееся число жителей в группах, если в год рождается 1000 детей.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,959 & 0 & 0 & 0 \\ 0,04 & 0,96 & 0 & 0 \\ 0 & 0,03 & 0,95 & 0 \\ 0,001 & 0,01 & 0,05 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{1000}_{\text{Пришло}} = \underbrace{(0,04+0,001)N_1}_{\text{Ушло}} \qquad \text{(дети)}$$

$0,04N_1=(0,03+0,01)N_2$ (работающие взрослые)

$0,03N_2=0,05N_3$ (пенсионеры)

N_1=24390; N_2=24390,24; N_3=14634,14

Пусть пенсия у пенсионеров составляет $5000 в год и формируется из отчислений дохода работающий взрослых.

Годовые пенсионные отчисления с работающих 5000*14634,14/24390,24=$3000 в год с каждого

Конец лекции 2

Спасибо за внимание