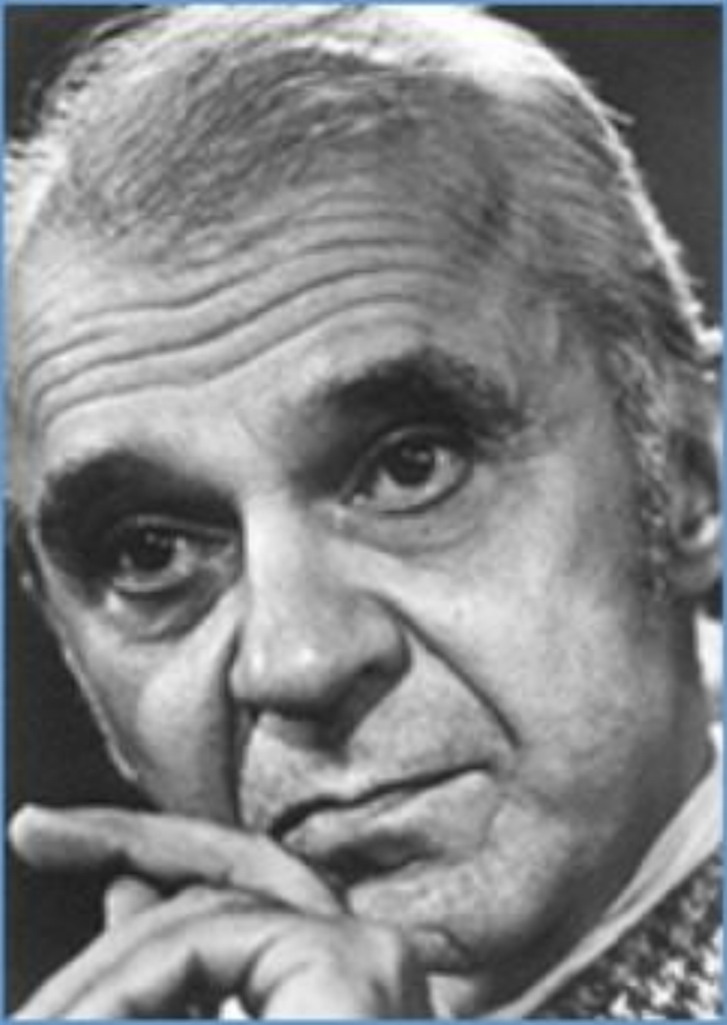
Модель Леонтьева



Василий Лентьев,
Лауреат Нобелевской премии
по экономике 1973 г.

Пусть сфера производства экономики разбита на n «чистых» отраслей, то есть каждая отрасль производит только один вид продукции, совместное производство исключается. Различные отрасли выпускают разные виды продукции.

Пусть для определенности число «чистых» отраслей равно 3.

Допустим, что по итоговым данным прошлого года составлен балансовый отчет по форме, приведенной в следующей таблице. Данная таблица называется таблицей межотраслевого баланса.

Таблица межотраслевого баланса

Отрасли	Промежуточный продукт			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1 отрасль	2 отрасль	3 отрасль		
1 отрасль	c_{11}	c_{12}	c_{13}	y_1	x_1
2 отрасль	c_{21}	c_{22}	c_{23}	y_2	x_2
3 отрасль	c_{31}	c_{32}	c_{33}	y_3	x_3

В экономике конечный продукт называется конечной продукцией или конечным спросом, промежуточный продукт – промежуточным спросом.

Балансовый характер таблицы заключается в том, что для строк таблицы должны выполняться следующая система равенств:

$$\begin{cases} c_{11} + c_{12} + c_{13} + y_1 = x_1; \\ c_{21} + c_{22} + c_{23} + y_2 = x_2;. \\ c_{31} + c_{32} + c_{33} + y_3 = x_3. \end{cases}$$

Сумма объемов или количеств промежуточного продукта и конечного продукта должна быть равна количеству валового выпуска для каждой отрасли.

Коэффициентом прямых затрат a_{ij} *называется объем продукции i отрасли, который используется для производства единицы продукции отрасли j.*

Высказем следующие предположения о коэффициентах прямых затрат:

1. будем считать, что коэффициенты прямых затрат сохраняют свои значения в течение некоторого периода времени (года или нескольких лет);
2. будем считать, что для производства продукции отрасли j в объеме x единиц, необходимо первой, второй и третьей отраслям произвести продукции в объемах $a_{1j}x$, $a_{2j}x$, $a_{3j}x$ единиц.

Используя эти предположения, преобразуем систему равенств для строк таблицы межотраслевого баланса. В итоге приходим к системе линейных уравнений, которая и представляет модель Леонтьева.

Итак, модель Леонтьева имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + y_1 = x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + y_2 = x_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + y_3 = x_3. \end{cases}$$

Модель Леонтьева можно записать и в матричном виде:

$$AX + Y = X$$

A – матрица коэффициентов прямых затрат;
Y – столбец объемов конечного продукта;
X - столбец валового выпуска продукции отраслей.

Продуктивность (работоспособность) модели Леонтьева

Модель Леонтьева называется продуктивной (работоспособной), если существует положительный столбец объемов валового выпуска продукции отраслей X, для которого справедливо неравенство:

$$X > AX$$

Если модель Леонтьева является продуктивной, то матрица коэффициентов прямых затрат A также называется продуктивной.

Экономический смысл продуктивности заключается в следующем: отрасли производственной сферы экономики могут выпустить некоторое количество продукции, которая используется для удовлетворения конечного спроса. Другими словами, при таких объемах выпуска продукции создается положительный столбец конечного продукта.

Если модель Леонтьева продуктивна, то для любых объемов конечной продукции, отрасли могут выпустить необходимое количество валовой продукции, то есть система линейных уравнений имеет неотрицательное решение при любых неотрицательных значениях свободных членов.

На практике бывает, что неизвестно заранее существование положительного столбца объемов валового выпуска продукции отраслей X, удовлетворяющему неравенству. В этом случае используют различные условия продуктивности.

Перечислим некоторые из них:

1. Модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда число Фробениуса (корень Фробениуса) матрицы A меньше единицы:

$$\lambda_A < 1$$

Числом Фробениуса называется наибольшее собственное число неотрицательной матрицы.

2. Модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда существует неотрицательная обратная матрица $(E-A)^{-1}$:

$$(E-A)^{-1} \geq 0$$

Достаточные условия продуктивности.

Если суммы элементов строк (столбцов) матрицы A меньше единицы, то модель Леонтьева продуктивна.

Нахождение объемов валовой продукции отраслей.

Коэффициенты полных затрат

Пусть модель Леонтьева продуктивна.

Столбец объемов валового выпуска продукции отраслей X можно найти, используя следующую формулу:

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Почему?

Коэффициентом полных затрат b_{ij} называется объем продукции отрасли i, который используется для производства единицы конечной продукции отрасли j.

Коэффициенты полных затрат являются элементами матрицы $(E - A)^{-1}$, поэтому эта матрица называется матрицей коэффициентов полных затрат.