

Распространение волн в нелинейной среде

Общий вид волнового уравнения в нелинейной среде:

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

Предположим, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ можно разложить по плоским волнам:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{k}_i, \omega_i) = \sum_i \vec{\mathcal{E}}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)},$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{P}_i(\mathbf{k}_i, \omega_i) = \sum_i \chi^{(1)}(\omega_i) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{k}_i, \omega_i),$$

$$\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n \geq 2} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{k}_m, \omega_m) = \sum_m \vec{\mathcal{P}}^{(NL)} e^{i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)},$$

Амплитуды поля и компонент нелинейной поляризации – не зависят от времени (проблема описания нестационарных нелинейных процессов вынесена за скобки)

Распространение волн в нелинейной среде

Вспомнив, что

$$\varepsilon(\omega_i) \equiv 1 + 4\pi\chi^{(1)}(\omega_i)$$

исходное волновое уравнение

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

запишется в виде системы уравнений

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right] \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{k}_m, \omega_m = \omega)$$

Замечания:

1. В общем виде, нелинейная поляризация $\mathbf{P}^{(NL)}$ определяется всеми полями $\mathbf{E}_n(\mathbf{k}_n, \omega_n)$
2. Это означает, что перед нами система связанных уравнений
3. Связанность уравнений означает перераспределение энергии между различными компонентами поля
4. Частоты справа и слева одинаковые, а волновые вектора могут быть разными (закон сохранения энергии в стационарном случае и возможность нарушения закона сохранения импульса)

Связанные волны в нелинейной среде

Рассмотрим пример трехволнового процесса сложения частоты

Участвуют три волны,

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}_1, \omega_1), \mathbf{E}(\mathbf{k}_2, \omega_2), \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega = \omega_1 + \omega_2)$$

Ограничиваясь дипольным приближением, рассматриваем только компоненты квадратичной поляризации вида

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_l) = \chi^{(2)}(\omega_l = \omega_m \pm \omega_n) : \mathbf{E}(\mathbf{k}_m, \omega_m) \mathbf{E}(\mathbf{k}_n, \omega_n)$$

а компоненты квадратичной восприимчивости подчиняются следующим перестановочным соотношениям:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega - \omega_1),$$

Связанные волны в нелинейной среде

Система связанных уравнений для трехволнового процесса примет вид:

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_1 \right] \mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1, \omega_1) = \frac{4\pi\omega_1^2}{c^2} \mathbf{P}^{(2)}(\omega_1) = \frac{4\pi\omega_1^2}{c^2} \chi^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega) : \mathbf{E}_2^*(\mathbf{k}_2, \omega_2) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 \right] \mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2, \omega_2) = \frac{4\pi\omega_2^2}{c^2} \mathbf{P}^{(2)}(\omega_2) = \frac{4\pi\omega_2^2}{c^2} \chi^{(2)}(\omega_2 = \omega - \omega_1) : \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}_1^*(\mathbf{k}_1, \omega_1),$$

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right] \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}^{(2)}(\omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \chi^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2) : \mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1, \omega_1) \mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2, \omega_2),$$

Энергия поля в нелинейной среде

Из уравнений Максвелла можно получить, что

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

скорость истечения энергии из единицы объема равна скорости убыли плотности запасенной в нем электромагнитной энергии

Записав полную поляризацию среды в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$$

можно ввести мгновенную плотность энергии электромагнитной волны в нелинейной среде:

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \frac{2}{3} \mathbf{E} \cdot \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$$

Энергия поля в нелинейной среде

Тогда соотношение

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

можно записать в виде

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t)$$

Усредненное по времени выражение будет выражать закон сохранения энергии в нелинейной среде:

$$\left\langle \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial t} \langle U \rangle$$

Приближение медленно меняющихся амплитуд

Приближения, упрощающие жизнь:

1. приближение бесконечных плоских волн
2. приближение заданной интенсивности накачки
3. приближение заданного поля
4. приближение медленно меняющихся амплитуд

Рассмотрим электромагнитную волну в нелинейной среде в виде

$$\mathbf{E}(\omega, z) = \vec{\mathcal{E}}(z)e^{i(kz - \omega t)}$$

для простоты – распространяющуюся вдоль оси z

Амплитуда волны – функция, зависящая от координаты из-за нелинейного взаимодействия

Предположим, что зависимость амплитуды от координаты слабая:

$$|\partial^2 \vec{\mathcal{E}}(z) / \partial z^2| \ll |k \partial \vec{\mathcal{E}} / \partial z|$$

Приближение медленно меняющихся амплитуд

Разделив поле на продольную и поперечную компоненты, волновое уравнение запишется в виде двух уравнений:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_\perp + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon \cdot \mathbf{E})_\perp = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}_\perp^{(NL)}(\omega, z)$$

$$\nabla \cdot \left[(\varepsilon \cdot \mathbf{E})_\parallel + 4\pi \mathbf{P}_\parallel^{(NL)} \right] = 0$$

тогда, используя:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_\perp = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}_\perp = e^{i(kz - \omega t)} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i2k \frac{\partial}{\partial z} - k^2 \right] \vec{\mathcal{E}}_\perp(z),$$

$$-k^2 \mathbf{E}_\perp + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\perp) = 0.$$

получим:

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_\perp}{\partial z} = \frac{i2\pi\omega^2}{kc^2} \mathbf{P}_\perp^{(NL)}(\omega, z) e^{-i(kz - \omega t)}.$$

Приближение медленно меняющихся амплитуд

Физический смысл приближения – пренебрежение обратной волной нелинейного сигнала.

Действительно, рассмотрим волновое уравнение в изотропной пластине

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{E}(\omega, z) = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}^{NL}(\omega, z)$$

Будем решать методом функций Грина. ФГ определяется как решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) G(z, z') = -\delta(z, z')$$

ФГ для однородной пластины принимает вид

$$G(z, z') = \begin{cases} -\frac{1}{i2k} e^{ik(z-z')}, & z > z' \\ -\frac{1}{i2k} e^{-ik(z-z')}, & z < z' \end{cases}$$

Приближение медленно меняющихся амплитуд

Решение волнового уравнения ищем в виде

$$\mathbf{E}(\omega, z) = \int_0^l \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}^{NL}(z') G(z, z') dz' + \left[G \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z'} - \mathbf{E} \frac{\partial G}{\partial z'} \right]_{z'=0}^{z'=l}$$

Подставляя выражение для ФГ:

$$\mathbf{E}(\omega, z) = -\frac{2\pi\omega^2}{ikc^2} \left[\int_0^z \mathbf{P}^{NL}(z') e^{ik(z-z')} dz' + \int_z^l \mathbf{P}^{NL}(z') e^{-ik(z-z')} dz' \right] + \left[G \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z'} - \mathbf{E} \frac{\partial G}{\partial z'} \right]_{z'=0}^{z'=l}$$

Записав поле внутри пластины как суперпозицию двух разбегающихся волн

$$\mathbf{E}(\omega, z) = \mathbf{E}_F(z) e^{i(kz - \omega t)} + \mathbf{E}_B(z) e^{i(-kz - \omega t)}$$

и граничные условия на гранях пластины в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}_F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_B}{\partial z} = 0$$

(постоянство амплитуд вне нелинейной пластины)

Приближение медленно меняющихся амплитуд

получаем:

$$\left[G \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z'} - \mathbf{E} \frac{\partial G}{\partial z'} \right]_{z'=0}^{z'=l} = \mathbf{E}_F(0) e^{i(kz - \omega t)} + \mathbf{E}_B(l) e^{i(-kz - \omega t)}$$

Окончательно:

$$\mathbf{E}_F(z) = \mathbf{E}_F(0) + i \frac{2\pi\omega^2}{kc^2} \int_0^z \mathbf{P}^{NL}(z') e^{-i(kz' - \omega t)} dz',$$

$$\mathbf{E}_B(z) = \mathbf{E}_B(l) + i \frac{2\pi\omega^2}{kc^2} \int_z^l \mathbf{P}^{NL}(z') e^{i(kz' + \omega t)} dz'$$

Но это есть решения двух дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{E}_F}{\partial z} = i \frac{2\pi\omega^2}{kc^2} \mathbf{P}^{NL}(\omega, z) e^{-i(kz - \omega t)},$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_B}{\partial z} = -i \frac{2\pi\omega^2}{kc^2} \mathbf{P}^{NL}(\omega, z) e^{i(kz + \omega t)}$$

что соответствует уравнениям ММА с $\mathbf{E}_B = 0$

Генерация суммарной частоты в полубесконечной среде

В задаче о генерации суммарной частоты участвуют три связанные волны,

$$\mathbf{E}(\omega_1), \mathbf{E}(\omega_2), \mathbf{E}(\omega_3)$$

каждая из которых раскладывается на две компоненты,

$$\mathbf{E}(\omega_i) = \mathbf{E}_{\parallel}(\omega_i) + \mathbf{E}_{\perp}(\omega_i)$$

удовлетворяющим волновому уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_{\perp}(\omega_i) + \frac{\omega_i^2}{c^2} [\varepsilon(\omega_i) \mathbf{E}(\omega_i)]_{\perp} &= -\frac{4\pi\omega_i^2}{c^2} \mathbf{P}_{\perp}^{(2)}(\omega_i) \\ \nabla \cdot \left[\mathbf{E}_{\parallel}(\omega_i) + 4\pi \mathbf{P}_{\parallel}^{(1)}(\omega_i) + 4\pi \mathbf{P}_{\parallel}^{(2)}(\omega_i) \right] &= 0 \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{P}(\omega_i) = \mathbf{P}_{\parallel}(\omega_i) + \mathbf{P}_{\perp}(\omega_i)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_1) = \chi^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) : \mathbf{E}^*(\omega_2) \mathbf{E}(\omega_3)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_2) = \chi^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) : \mathbf{E}(\omega_3) \mathbf{E}^*(\omega_1)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_3) = \chi^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) : \mathbf{E}(\omega_1) \mathbf{E}(\omega_2)$$

Генерация суммарной частоты в полубесконечной среде

В приближении:

- бесконечных плоских волн
- заданной интенсивности накачки
- полубесконечности среды с плоской границей
- кубичности (изотропности) среды

уравнения для $\mathbf{E}(\omega_1)$, $\mathbf{E}(\omega_2)$ линейны.

Записав волны накачки в виде

$$\mathbf{E}_T(\omega_1) = \vec{\mathcal{E}}_{1T} \exp[i(\mathbf{k}_{1T} \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)]$$

$$\mathbf{E}_T(\omega_2) = \vec{\mathcal{E}}_{2T} \exp[i(\mathbf{k}_{2T} \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)]$$

а квадратичную поляризацию в виде

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_3) = P_3^{(2)} \exp[i(\mathbf{k}_{3s} \cdot \mathbf{r} - \omega_3 t)]$$

третье связанное уравнение будет иметь решение в виде

$$\mathbf{E}_T(\omega_3) = \left\{ A e^{i\mathbf{k}_{3T} \cdot \mathbf{r}} + \left[\frac{4\pi\omega_3^2}{c^2(k_{3S}^2 - k_{3T}^2)} \vec{\mathcal{P}}_{3\perp}^{(2)} - \frac{4\pi\mathcal{P}_3^{(2)} \parallel}{\varepsilon_{\parallel}(\omega_3)} \right] e^{i\mathbf{k}_{3S} \cdot \mathbf{r}} \right\} e^{-i\omega_3 t}$$

и состоит из двух волн, связанной и свободной, с волновыми векторами

$$\mathbf{k}_{3s} = \mathbf{k}_{1T} + \mathbf{k}_{2T}, \quad \mathbf{k}_{3T}$$

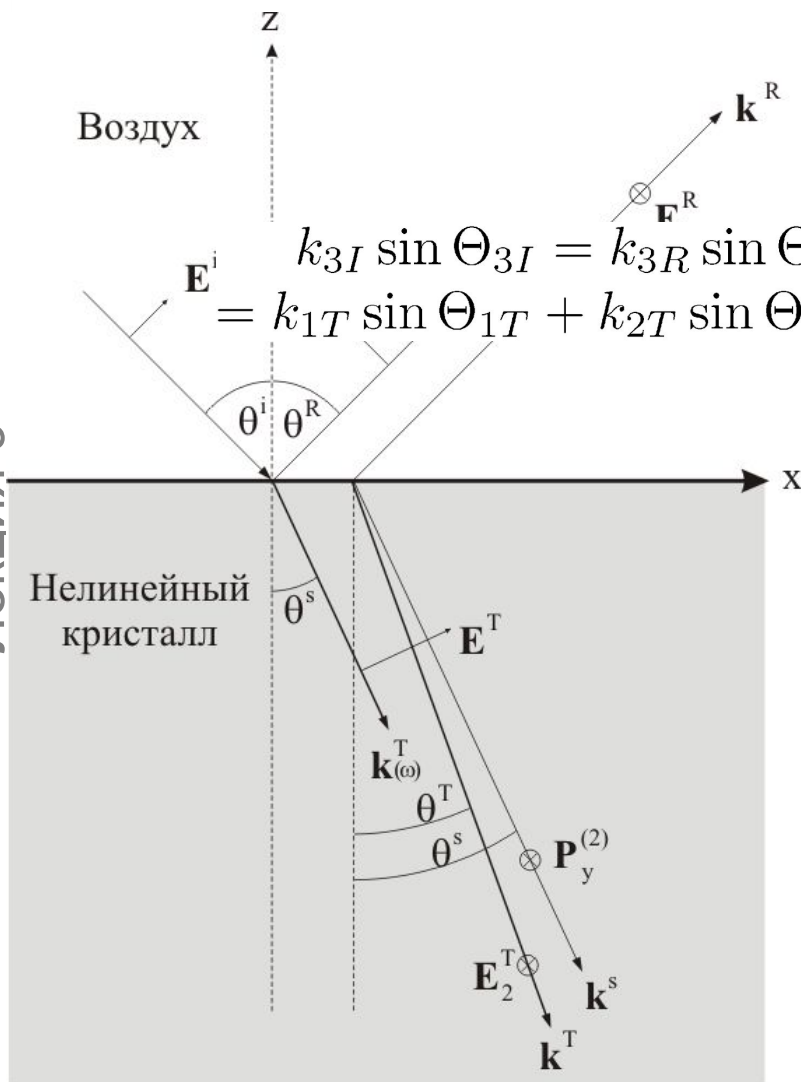
Генерация суммарной частоты: граничные условия

для тангенциальных компонент:

$$k_{3I,x} = k_{3R,x} = k_{3T,x} = k_{3s,x}$$

то же самое с углами:

$$k_{3I} \sin \Theta_{3I} = k_{3R} \sin \Theta_{3R} = k_{3T} \sin \Theta_{3T} = k_{3s} \sin \Theta_{3s} = k_{1T} \sin \Theta_{1T} + k_{2T} \sin \Theta_{2T} = k_{1I} \sin \Theta_{1I} + k_{2I} \sin \Theta_{2I}$$



Генерация суммарной частоты: фазовый синхронизм

Запишем поле на суммарной частоте в виде

$$\mathbf{E}_T(\omega_3) = \vec{\mathcal{E}}_{3T}(z) \exp [i(\mathbf{k}_{3T} \cdot \mathbf{r} - \omega_3 t)]$$

тогда в рамках приближения ММА

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{\mathcal{E}}_{3T}(z) = \frac{i2\pi\omega_3^2}{k_{3T,z}c^2} \vec{\mathcal{P}}_{3\perp}^{(2)} e^{i\Delta kz}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_{\parallel}(\omega_3) \vec{\mathcal{E}}_{3T\parallel} + 4\pi \vec{\mathcal{P}}_{3\parallel}^{(2)} e^{i\Delta kz} \right] = 0$$

где расстройка волновых векторов

$$\Delta \mathbf{k} = \hat{z} \Delta k = \mathbf{k}_{1T} + \mathbf{k}_{2T} - \mathbf{k}_{3T}$$

Решение укороченных уравнений запишется в виде

$$\vec{\mathcal{E}}_{3T\perp}(z) = \vec{\mathcal{E}}_{3T\perp}(0) + \frac{2\pi\omega_3^2}{c^2 k_{3T,z} \Delta k} \vec{\mathcal{P}}_{3T\perp} (e^{i\Delta kz} - 1)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{3T\parallel}(z) = \vec{\mathcal{E}}_{3T\parallel}(0) - \frac{4\pi \vec{\mathcal{P}}_{3\parallel}^{(2)}}{\varepsilon_{\parallel}(\omega_3)} (e^{i\Delta kz} - 1)$$

Генерация суммарной частоты: фазовый синхронизм

Интенсивность волны на суммарной частоте

$$I_3(z) = \frac{c\sqrt{\varepsilon(\omega_3)}}{2\pi} |\vec{\mathcal{E}}_{3Y}(z)|^2$$

полная мощность волны определяется интегрированием по пучку:

$$P(\omega_3, z) = \int I_3(z, \rho) d\rho = \frac{c\sqrt{\varepsilon(\omega_3)}}{2\pi} \int |\vec{\mathcal{E}}_{3T}(z, \rho)|^2 d\rho$$

при малой расстройке, $|k_3/\Delta k| \gg 1$, можно считать, что $|\vec{E}_{3T//}| \ll |\vec{E}_{3T\perp}|$

и интенсивность волны на суммарной частоте запишется в виде

$$I_3(z) = \frac{2\pi\omega_3^2}{c\sqrt{\varepsilon(\omega_3)}\cos^2\Theta_{3T}} \left| \vec{\mathcal{P}}_{3\perp}^{(2)} \right|^2 \left[\frac{\sin \Delta k z / 2}{\Delta k z / 2} \right]^2 z^2$$

при выполнении условия фазового синхронизма, $\Delta \mathbf{k} = 0$

$$[I_3(z)]_{max} = \frac{2\pi\omega_3^2}{c\sqrt{\varepsilon(\omega_3)}\cos^2\Theta_{3T}} \times \left| \vec{\mathcal{P}}_{3\perp}^{(2)} \right|^2 z^2$$

а полуширина между первыми нулями (ширина синхронизма)

$$(\Delta k)_{HW} z = \frac{(\Delta k)_{HW}}{k_{3T}} k_{3T} z = 2\pi$$