Методы оптимальных решений
Нелинейная и линейная оптимизация

Доцент Матвеева А.С.
anmatveeva@yandex.ru

2. Экономическая задача на экстремум

- Фирма производит товар двух видов в количестве x и y.
- Цены этих товаров равны P1=110,P2=70.Функция издержек $C(x,y)= 7x^2 +8xy+3y^2+90$. Определить, при каких объемах выпуска достигается максимальная прибыль и найти эту прибыль.
- Решение.1) Математическая модель.
- Функция прибыли
- $f(x,y)=110x+70y- (7x^2 +8xy+3y^2+90)$. Следует исследовать ее на экстремум.

3. Решение экономической задачи на экстремум

- 2) $z(x,y)=110x+70y-(7x^2+8xy+3y^2+90)$
- 1)Частные производные:
- $z'_x=110-14x-8y$, z_Y70-8='x-6y, $z''_{xx}=-14$,$z''_{YY}=-6$,$z''_{xY}=-8$
- 2) Найдем стационарные точки функции из условия
- $\begin{cases} 14x+8y=110 \\ 8x+6y=70 \end{cases}$ откуда, x=5,y=5,т.е.M(5,5,)-стационарная точка.
- 3) Проверим ее на экстремум.
- D (x, y)=-14×(-6)-(-8)^2=20,т.е. экстремум есть. Это максимум. $z_{\max}=z(5,5)=360$

4. Экономическая задача на условный экстремум

- Функция потребления имеет вид **u=x y.**
- Цены товаров **x** и **y** соответственно равны
- P1=2 ,P2=1.
- Найти при каких значениях **x** и **y** функция u достигает
- максимального значения при бюджете равном 200 (a).
- Решение. Бюджетное ограничение задается равенством: **2x+y=200.** Следовательно, функцию
- **u=x y** требуется исследовать на условный экстремум при условии **2x+y=200** (уравнение связи).

5. Решение экономической задачи на условный экстремум

- Выразим из уравнения связи **y=200-2x** и подставим
- в функцию потребления: **$u=x(200-2x)=200x-2x^2$** .Это
- функция одной переменной **x**. Найдем ее производную
- u′= 200-4x. Стационарная точка функции **x=50**. Очевидно, что это точка максимума (ветви параболы направлены вниз). Таким образом, функция потребления достигает максимального значения при
- **x=50 и y=100** и ее значение . **$u_{max}=50\times100=5000$**

6. Постановка задачи линейного программирования

- Если в экономических задачах оптимизации критерий (целевая функция) и ограничения линейно зависят от параметров, то полученная задача называется **задачей линейного программирования** (ЗЛП).
- К такой задаче, например, относится задача выбора некоторым предприятием номенклатуры и объема продукции, обеспечивающей максимальную прибыль при условии ограниченных ресурсов.

7. Пример задачи линейного программирования

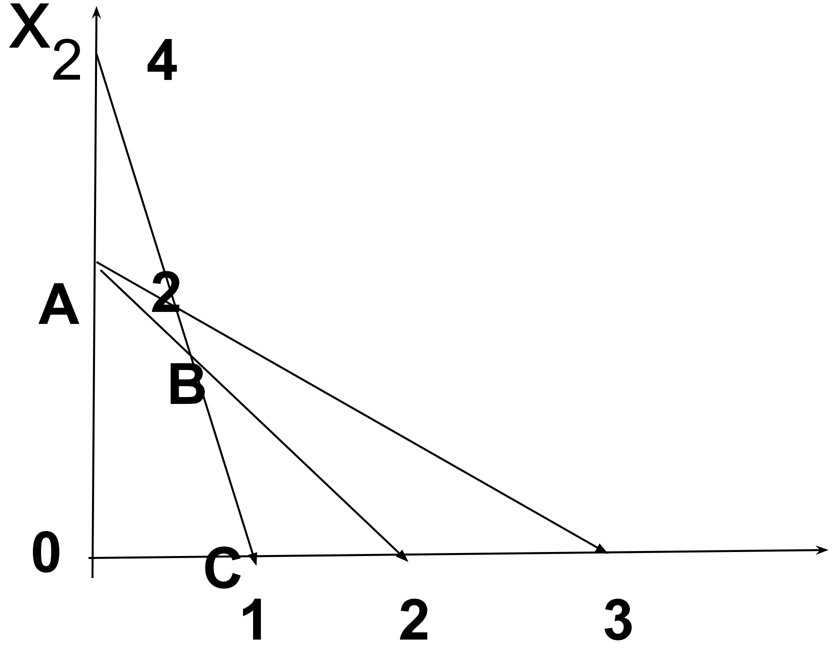
- Пусть на предприятии изготавливают два вида продукции P_1 и P_2 используют три вида ресурсов S_1 , S_2 и S_3 (труд, сырье, оборудование). Известны затраты каждого ресурса на единицу каждой продукции P_1: 2,4,2 и P_2 : 3,1,2. Запасы ресурсов
- $S_1 =6$; $S_2 =4$; $S_3 =4$. Прибыль от реализации единицы готовой продукции $C_1 =3$ и $C_2= 6$.Требуется найти такие объемы выпуска продукции, при которых прибыль будет максимальна.

8. Математическая модель задачи линейного программирования

- Обозначим объемы выпуска продукции $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$, тогда прибыль $\mathbf{L(x_1, x_2) = 3x_1+6x_2}$ **(1)** должна быть максимальна и выполнялись бы ограничения, соответствующие ограничениям на запасы ресурсов:
- $\mathbf{2x_1+3x_2 \leq 6}$
- $\mathbf{4x_1+x_2 \leq 4}$ **(2)**
- $\mathbf{2x_1+2x_2 \leq 4}$
- объемы выпуска $\mathbf{x_1 \geq 0}$ и $\mathbf{x_2 \geq 0}$

9. Графическое решение задачи линейного программирования

- Задача линейного программирования с двумя переменными может быть решена графически.
- Для этого строят область допустимых решений (ОДР), соответствующую ограничениям (2).



$$
\begin{aligned}
&2x_1+3x_2 \le 6 \\
&4x_1+x_2 \le 4 \qquad\qquad (2) \\
&2x_1+2x_2 \le 4
\end{aligned}
$$

Это область 0ABC ,где A(0,2), C(1,0)

10. Продолжение решение задачи

- *Доказано, что оптимальное значение целевой функции в задачах линейного программирования может достигаться только в вершинах области допустимых решений*. Это точки **0(0,0), A(0,2), C(1,0)** и **B**. Найдем координаты точки B, как точку пересечения прямых $\mathbf{4x_1+x_2=4}$ и $\mathbf{2x_1+2x_2=4}$.Получим
- $\mathbf{x_1=2/3}$ и $\mathbf{x_2=4/3}$, т.е **B(2/3,4/3).** Вычислим $\mathbf{L(x_1, x_2)= 3x_1+6x_2}$ в вершинах A, B, C и выберем максимальное:
- **L(A)=0+12=12**.L(B)=2+8=10.L(C)=3
- Вывод : $\mathbf{L_{max}=12}$ при $\mathbf{x_1=0}$ **и** $\mathbf{x_2=2}$