

Методы оптимальных решений

Нелинейная и линейная оптимизация

Доцент Матвеева А.С.
anmatveeva@yandex.ru

2. Экономическая задача на экстремум

- Фирма производит товар двух видов в количестве x и y .
- Цены этих товаров равны $P_1=110, P_2=70$. Функция издержек $C(x,y)=7x^2+8xy+3y^2+90$. Определить, при каких объемах выпуска достигается максимальная прибыль и найти эту прибыль.
- Решение. 1) Математическая модель.
- Функция прибыли
- $f(x,y)=110x+70y-(7x^2+8xy+3y^2+90)$. Следует исследовать ее на экстремум.

3. Решение экономической задачи на экстремум

- 2) $z(x,y)=110x+70y-(7x^2+8xy+3y^2+90)$
- 1) Частные производные:
- $z'_x=110-14x-8y$, $z'_y=70-8x-6y$, $z''_{xx}=-14$, $z''_{yy}=-6$, $z''_{xy}=-8$
- 2) Найдем стационарные точки функции из условия
- $\begin{cases} 14x+8y=110 \\ 8x+6y=70 \end{cases}$ откуда, $x=5, y=5$, т.е. $M(5,5)$ -стационарная точка.
- 3) Проверим ее на экстремум.
- $D(x,y)=-14 \times (-6) - (-8)^2 = 20$, т.е. экстремум есть. Это максимум.
 $z_{\max} = z(5,5) = 360$

4. Экономическая задача на условный экстремум

- Функция потребления имеет вид $u = x \cdot y$.
- Цены товаров x и y соответственно равны
- $P_1 = 2, P_2 = 1$.
- Найти при каких значениях x и y функция u достигает
- максимального значения при бюджете равном 200 (а).
- Решение. Бюджетное ограничение задается равенством: $2x + y = 200$. Следовательно, функцию
- $u = x \cdot y$ требуется исследовать на условный экстремум при условии $2x + y = 200$ (уравнение связи).

5. Решение экономической задачи на условный экстремум

- Выразим из уравнения связи $y=200-2x$ и подставим
- в функцию потребления: $u=x(200-2x)=200x-2x^2$. Это
- функция одной переменной x . Найдем ее производную
- $u'=200-4x$. Стационарная точка функции $x=50$.
Очевидно, что это точка максимума (ветви параболы направлены вниз). Таким образом, функция потребления достигает максимального значения при
- $x=50$ и $y=100$ и ее значение . $u_{\max}=50 \times 100=5000$

6. Постановка задачи линейного программирования

- Если в экономических задачах оптимизации критерий (целевая функция) и ограничения линейно зависят от параметров, то полученная задача называется **задачей линейного программирования (ЗЛП)**.
- К такой задаче, например, относится задача выбора некоторым предприятием номенклатуры и объема продукции, обеспечивающей максимальную прибыль при условии ограниченных ресурсов.

7. Пример задачи линейного программирования

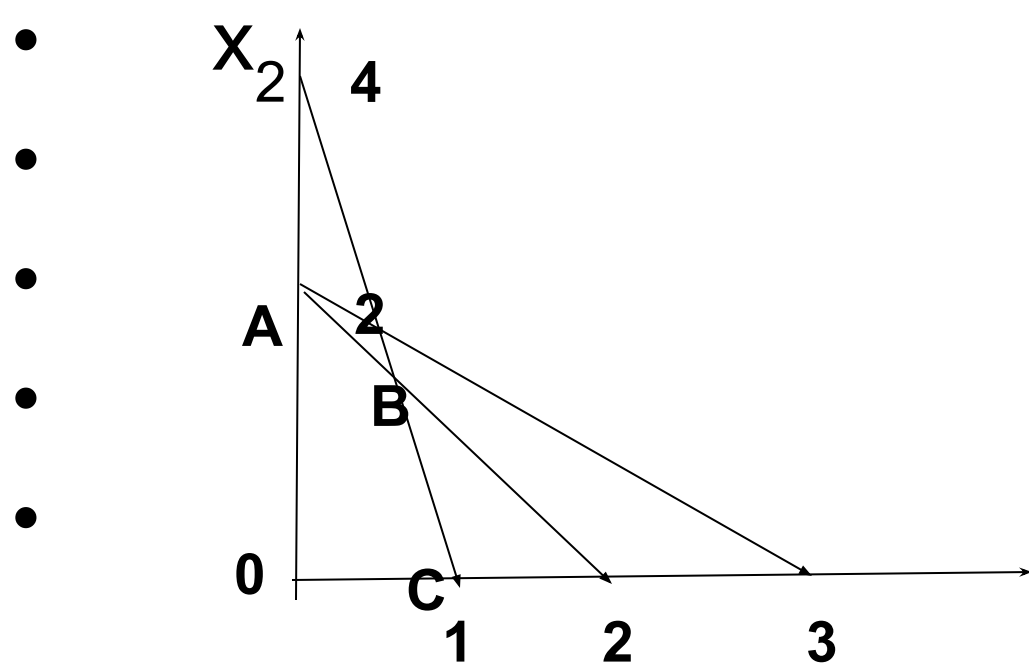
- Пусть на предприятии изготавливают два вида продукции P_1 и P_2 используют три вида ресурсов S_1 , S_2 и S_3 (труд, сырье, оборудование). Известны затраты каждого ресурса на единицу каждой продукции $P_1: 2,4,2$ и $P_2: 3,1,2$. Запасы ресурсов $S_1 = 6; S_2 = 4; S_3 = 4$. Прибыль от реализации единицы готовой продукции $C_1 = 3$ и $C_2 = 6$. Требуется найти такие объемы выпуска продукции, при которых прибыль будет максимальна.

8. Математическая модель задачи линейного программирования

- Обозначим объемы выпуска продукции x_1 и x_2 , тогда прибыль $L(x_1, x_2) = 3x_1 + 6x_2$ (1) должна быть максимальна и выполнялись бы ограничения, соответствующие ограничениям на запасы ресурсов:
 - $2x_1 + 3x_2 \leq 6$
 - $4x_1 + x_2 \leq 4$ (2)
 - $2x_1 + 2x_2 \leq 4$
 - объемы выпуска $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$

9. Графическое решение задачи линейного программирования

- Задача линейного программирования с двумя переменными может быть решена графически.
- Для этого строят область допустимых решений (ОДР), соответствующую ограничениям (2).



$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$4x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 4$$

Это область $OABC$, где $A(0,2)$, $C(1,0)$

10. Продолжение решение задачи

- Доказано, что оптимальное значение целевой функции в задачах линейного программирования может достигаться только в вершинах области допустимых решений. Это точки $O(0,0)$, $A(0,2)$, $C(1,0)$ и B . Найдем координаты точки B , как точку пересечения прямых $4x_1 + x_2 = 4$ и $2x_1 + 2x_2 = 4$. Получим
- $x_1 = 2/3$ и $x_2 = 4/3$, т.е $B(2/3, 4/3)$. Вычислим $L(x_1, x_2) = 3x_1 + 6x_2$ в вершинах A , B , C и выберем максимальное:
- $L(A) = 0 + 12 = 12$. $L(B) = 2 + 8 = 10$. $L(C) = 3$
- Вывод : $L_{\max} = 12$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$