

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Методи чисельного розв'язання
математичних задач і їх реалізація на
ЕОМ

ЦІЛІ:

- 1) отримати знання з найбільш вживаних чисельних методів розв'язання математичних задач;
- 2) отримати навички програмування типових обчислювальних алгоритмів і відповідних структур даних;
- 3) надбати досвід організації обчислювань на ЕОМ.

ОРГАНІЗАЦІЯ КУРСУ:

- лекції – викладення теоретичного матеріалу;
- лабораторні роботи – реалізація чисельних методів на ЕОМ та розв'язання обчислювальних задач;
- індивідуальні роботи – складання розрахункових схем відповідно до індивідуальних завдань лабораторних робіт;
- самостійна робота – складання програм ЕОМ, виконання обчислень і оформлення звітів з лабораторних робіт
- іспит (ПЗС)/залік(ІУСТ) з теоретичного й практичного матеріалу курсу.

Використання ЕОМ при розв'язанні задач

- 1) Дослідження у застосовній галузі => модель застосовної галузі
=> математична модель
- 2) Використання математичних методів у дослідженнях математичної моделі => математичні методи + схеми розрахунків
- 3) Застосування ЕОМ для розрахунків => алгоритми
=> програма ЕОМ
- 4) Виконання розрахунків на ЕОМ => результати
- 5) Аналіз результатів => оцінка відповідності
- 6) Використання результатів => рішення у застосовній галузі

Достовірність результатів вимірюється їх похибкою

Складові похибки:

- похибка моделей + похибка даних = неусувна похибка
 - похибка методу
 - похибка обчислень
- } похибка розв'язання математичної задачі на ЕОМ

Визначення похибки: $a^* - a = \Delta a$;

абсолютна похибка – $|\Delta a| \leq \delta_a, \quad a = a^* \pm \delta_a$

відносна похибка – $\varepsilon_a = \delta_a / |a| \approx \delta_a / |a^*|, \quad a = a^* (1 \pm \varepsilon_a)$;

Похибка округлень

Якщо число подане у системі з основою p у вигляді:

$$\underline{0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n \text{ <відкинуті знаки>} \cdot p^m}$$

то $\delta \leq p^{m-n} \approx p^{m-n}$

Похибка результатів операцій:

$$a^* + b^* = (a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b) \Rightarrow$$

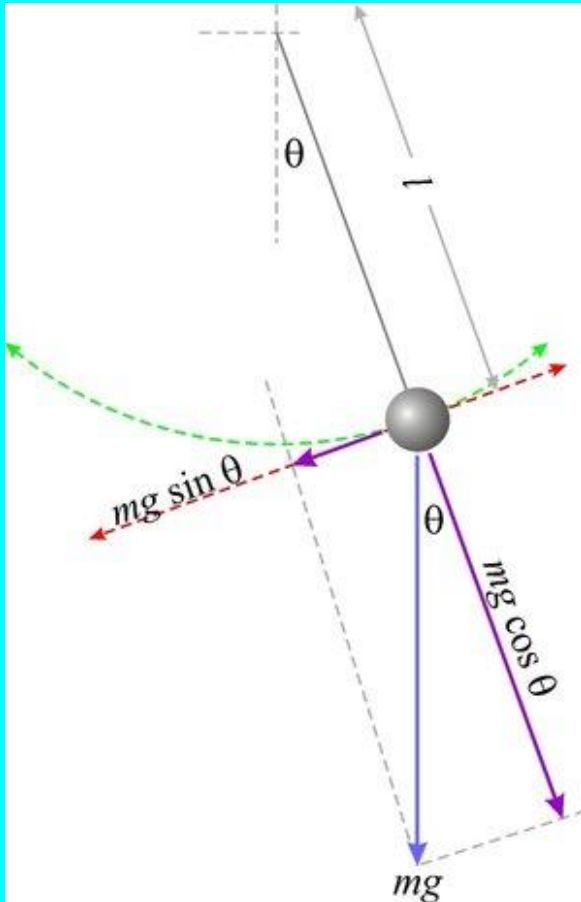
$$\delta_{a+b} \leq \delta_a + \delta_b$$

$$a^* b^* = (a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab + a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b \approx ab + a\Delta b + b\Delta a$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ab} \leq \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

Приклад - маятник

Фізична модель



Математична модель

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Математичний маятник — теоретична модель маятника, в якій матеріальна точка масою m підвішена на невагомому нерозтяжному стержні довжини l і здійснює рух в вертикальній площині під впливом сил тяжіння з прискоренням вільного падіння g .

- Модель нехтує розмірами тіла, деформацією підвісу та тертям в точці підвісу стержня. Звичайно розглядаються коливання маятника в одній площині

Спрощена модель

При малих коливаннях $\sin \theta \approx \theta$ і рівняння руху маятника зводиться до рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

де частота власних коливань математичного маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

відхилення маятника від положення рівноваги описується формулою

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

Інший приклад



Математична модель – система нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{W}_0(t) = \Phi_1(t, W_0, \dot{W}_0, \Psi, \dot{\Psi}) \\ \ddot{\Psi}(t) = \Phi_2(t, W_0, \dot{W}_0, \Psi, \dot{\Psi}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(R_1(x) \cdot \gamma(x) \right) - m(x, t) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_1(x) \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) - k(x, t) \frac{\partial z}{\partial t} + q(x, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(R_2(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_2(x) \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial t} \right) - I_m(x) \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(R_2(x) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + R_1(x) \cdot \gamma(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_2(x) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial t} \right) + \beta_1(x) \frac{\partial \gamma}{\partial t} + I_m(x) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

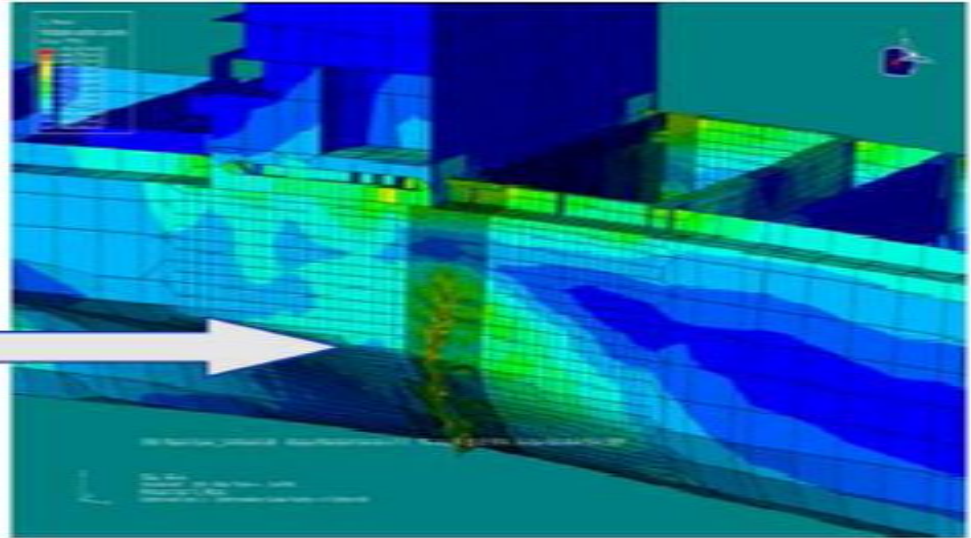
"MSC Napoli" на мілині після аварії

L = 275 м, D = 53,4 тис. т

Протока Ла-Манш, січень 2007



Тріщина у корпусі "MSC Napoli"



Результат шторму з висотою хвиль до 9 м

Теоретичні дослідження:
руйнування спричинено перевищенням напружень, яке могло сягнути 30%, через ефект випінгу.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

$$f(x) = 0 \quad f(x_p) \equiv 0$$

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

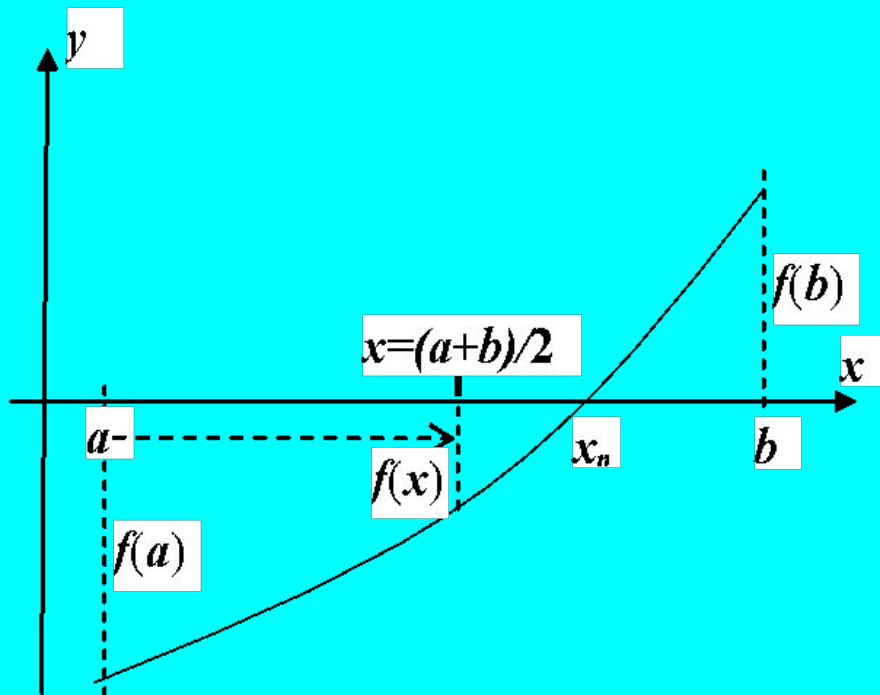
1) Локалізувати корінь $a < x_p < b$

ознака: $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow x \in [a, b]$

2) Уточнити корінь до припустимої
похибки $\delta_x < \varepsilon$

МЕТОДИ УТОЧНЕННЯ КОРЕНЯ

Метод половинного поділу (бісекції)



$$x_p = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}$$

Алгоритм:

ПОВТОРЮВАТИ

$$x_p = \frac{a+b}{2} ;$$

ЯКЩО $f(x)f(a) > 0$ ТО $a := x$

ІНАКШЕ $b := x$;

ДО $\frac{a-b}{2} < \varepsilon$.