

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Прямі ("точні") методи

ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ

Система з m лінійних алгебраїчних рівнянь з m невідомими може бути записана у наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mm}x_m = b_m \end{array} \right.$$

де: x_j - невідомі, значення яких треба знайти;

a_{ij} - задані числові коефіцієнти при невідомих;

b_i - вільні члени (праві частини).

Матричні позначення

$$\mathbf{Ax} = \bar{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Метод послідовного виключення невідомих (Гаусса)

Початок

{прямий хід - зведення системи до трикутного вигляду}

для $i := 1$ до $m - 1$

початок циклу

визначити номер рядку (k) такий, щ $|a_{ki}| > |a_{ji}|$ ($j = i..m$)

якщ $a_{ki} = 0$ то розв'язок не може бути отриманим

інакше

початок

поміняти місцями рядки (i) та (k);

поділити рядок (i) на a_{ii}

для $n := i + 1$ до m

початок циклу

відняти від рядка (n) рядок (i), помножений на a_{ni} ;

$$b_n := b_n - b_i a_{ni}$$

кінець циклу

кінець

кінець циклу

{зворотній хід}

для $i := m$ назад до 1

початок циклу $x_i := b_i - \sum_{j=i+1}^m x_j a_{ij}$ кінець циклу

кінець

Схема Халецького

Для розв'язання системи $A\bar{x} = \bar{b}$

матриця системи подається добутком двох

трикутних матриць: $A = BD$

де B – ліва трикутна, а D – права трикутна матриці

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок системи дістається послідовним розв'язанням

двох трикутних систем: $B\bar{y} = \bar{b}$ і $D\bar{x} = \bar{y}$

Визначення коефіцієнтів трикутних матриць **B** і **D**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{22} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} d_{kj} \quad d_{jj} = 1$$

для послідовності $(i = 1, 2, \dots, m \quad (j = 1, 2, \dots, m))$

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} d_{kj}; \quad (j \leq i) \quad d_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} d_{kj}}{b_{ii}}; \quad (j > i)$$

Розв'язання трикутних систем

$$\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{b}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}y_1 + 0y_2 + 0y_3 + \dots + 0y_m = b_1 \Rightarrow y_1 = b_1 / b_{11} \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + 0y_3 + \dots + 0y_m = b_2 \Rightarrow y_2 = (b_2 - b_{21}y_1) / b_{22} \\ \dots\dots\dots \\ b_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + a_{m3}y_3 + \dots + a_{mm}y_m = b_m \Rightarrow \\ \Rightarrow y_m = \frac{b_m - (b_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + a_{m3}y_3 + \dots + a_{mm}y_m)}{b_{mm}} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.0 \cdot x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \dots + d_{1m}x_m = y_1 \\ 0x_1 + 1.0 \cdot x_2 + d_{23}x_3 + \dots + d_{2m}x_m = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 1.0_{mm}x_m = y_m \end{array} \right.$$

МЕТОД КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

(модифікація схеми Халецького для симетричної матриці системи)

Якщо матриця є симетричною ($a_{ij} = a_{ji}$), то її можна подати добутком:

$$A = S^T C S$$

$$\text{де: } S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & s_{mm} \end{pmatrix}$$

- права трикутна матриця;

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

- діагональна матриця, елементи

якої c_{ii} дорівнюють +1 або -1

Розв'язок системи дістається послідовним розв'язанням двох

трикутних систем: $S^T C \bar{y} = \bar{b}$ і $S \bar{x} = \bar{y}$

Визначення коефіцієнтів матриць **S** і **C**

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} s_{ik}^T s_{kj} c_{kk} = s_{1i} s_{1j} c_{11} + s_{2i} s_{2j} c_{22} + \dots + s_{ii} s_{ij} c_{ii} \quad \text{при } i \leq j$$

$$a_{11} = s_{11} s_{11} c_{11} \Rightarrow c_{11} = \text{sign}(a_{11}); \quad s_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{12} = s_{11} s_{12} c_{11} \Rightarrow s_{12} = a_{12} / (s_{11} c_{11})$$

$$c_{ii} = \text{sign} \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2 c_{kk} \right)$$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2 c_{kk}};$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} c_{kk}}{s_{ii} c_{ii}}$$

$$(j = 1, 2, \dots, m \quad (i = 1, 2, \dots, j))$$

ОЦІНКА ПОХИБКИ РОЗВ'ЯЗКУ

Якщо $\bar{\mathbf{x}}_p$ – точний розв'язок, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_p = \bar{\mathbf{b}}$

Нехай $\bar{\mathbf{x}}_n$ – наближений розв'язок.

Очевидною є рівність $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_p - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_n = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_n$

або $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}_p - \bar{\mathbf{x}}_n) = \mathbf{A}\bar{\Delta}_x = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_n = \bar{\mathbf{r}}$

$\bar{\Delta}_x = \bar{\mathbf{x}}_p - \bar{\mathbf{x}}_n$ - похибка розв'язку

$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_n$ - нев'язка

$$\mathbf{A}\bar{\Delta}_x = \bar{\mathbf{r}}$$