Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Прямі ("точні") методи

основні відомості

Система з m лінійних алгебраїчних рівнянь з m невідомими може бути записана у наступному вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

де: x_j - невідомі, значення яких треба знайти;

a_{ij} - задані числові коефіцієнти при невідомих;

b_i - вільні члени (праві частини).

Матричні позначення

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Метод послідовного виключення невідомих (Гаусса)

<u>Початок</u>

{прямий хід - зведення системи до трикутного вигляду}

<u>для</u> i : =1 <u>до</u> m-1

<u>початок циклу</u>

визначити номер рядку(k) такий, що $|a_{ki}| > |a_{ji}|$ $(j = i..m)$

<u>якщо</u> $a_{ki} = 0$ <u>то</u> розв'язок не може бути отриманим

<u>інакше</u>

<u>початок</u>

поміняти місцями рядки (i) та (k);

поділити рядок (i) на a_{ii}

<u>для</u> n:=i+1 <u>до</u> m

<u>початок циклу</u>

відняти від рядка (n) рядок (i), помножений на a_{ni};

$b_n := b_n - b_i a_{ni}$

<u>кінець циклу</u>

<u>кінець</u>

<u>кінець циклу</u>

{зворотній хід}

<u>для</u> i : = m <u>назад до</u> 1

<u>початок циклу</u> $x_i := b_i - \sum_{j=i+1}^{m} x_j a_{ij}$ <u>кінець циклу</u>

<u>кінець</u>

Схема Халецького

Для розв'язання системи $\mathbf{A\bar{x} = \bar{b}}$

матриця системи подається добутком двох

трикутних матриць: $\mathbf{A = BD}$

де B – ліва трикутна, а D – права трикутна матриці

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & .. & 0 \\ b_{22} & b_{22} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{m1} & b_{m2} & .. & b_{mm} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & .. & d_{1m} \\ 0 & 1 & .. & d_{2m} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок системи дістається послідовним розв'язанням

двох трикутних систем: $\mathbf{B\bar{y} = \bar{b}}$ **і** $\mathbf{D\bar{x} = \bar{y}}$

Визначення коефіцієнтів трикутних матриць B і D

$$\mathbf{A} = \mathbf{BD}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & .. & 0 \\ b_{22} & b_{22} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{m1} & b_{m2} & .. & b_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & .. & d_{1m} \\ 0 & 1 & .. & d_{2m} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i.j)} b_{ik} d_{kj} \qquad d_{jj} = 1$$

для послідовності $\left(i = 1,2,\ldots,m \quad \left(j = 1,2,..,m\right)\right)$

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} d_{kj}; \qquad (j \le i) \qquad\qquad d_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} d_{kj}}{b_{ii}}; \qquad (j > i)$$

Розв'язання трикутних систем

$$\mathbf{B\overline{y} = \overline{b}}$$

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + 0y_2 + 0y_3 + \ldots\ldots\ldots + 0y_m = b_1 \Rightarrow y_1 = b_1 / b_{11} \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + 0y_3 + \ldots\ldots\ldots + 0y_m = b_2 \Rightarrow y_2 = \left(b_2 - b_{21}y_1\right)/ b_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + a_{m3}y_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mm}y_m = b_m \Rightarrow \\ \Rightarrow y_m = \dfrac{b_m - \left(b_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + a_{m3}y_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mm}y_m\right)}{b_{mm}} \end{cases}$$

$$\mathbf{D\overline{x} = \overline{y}}$$

$$\begin{cases} 1.0 \cdot x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots + d_{1m}x_m = y_1 \\ 0x_1 + 1.0 \cdot x_2 + d_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + d_{2m}x_m = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots\ldots\ldots + 1.0_{mm}\, x_m = y_m \end{cases}$$

МЕТОД КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ
(модифікація схеми Халецького для симетричної матриці системи)

Якщо матриця є симетричною $(a_{ij} = a_{ji})$, то її можна подати добутком:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{S}$$

де: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & .. & s_{1m} \\ 0 & s_{22} & .. & s_{2m} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & s_{mm} \end{pmatrix}$ **- права трикутна матриця;**

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & .. & 0 \\ 0 & c_{22} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & c_{mm} \end{pmatrix}$ **- діагональна матриця, елементи якої c_{ii} дорівнюють +1 або –1**

Розв’язок системи дістається послідовним розв’язанням двох трикутних систем: $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{b}}$ **і** $\mathbf{S}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$

Визначення коефіцієнтів матриць S і C

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{S}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} s_{ik}^{T} s_{kj} c_{kk} = s_{1i}s_{1j}c_{11} + s_{2i}s_{2j}c_{22} + \ldots + s_{ii}s_{ij}c_{ii} \quad \textbf{при} \quad i \le j$$

$$a_{11} = s_{11}s_{11}c_{11} \Rightarrow c_{11} = sign\left(a_{11}\right); \quad s_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{12} = s_{11}s_{12}c_{11} \Rightarrow \quad s_{12} = a_{12}/\left(s_{11}c_{11}\right)$$

....

$$c_{ii} = \mathrm{sign}\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^{2} c_{kk}\right) \qquad s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^{2} c_{kk}};$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj}c_{kk}}{s_{ii}c_{ii}} \qquad \left(j = 1,2,\ldots,m \quad \left(i = 1,2,\ldots, j\right)\right)$$

ОЦІНКА ПОХИБКИ РОЗВ'ЯЗКУ

Якщо $\bar{\mathbf{x}}_p$ **– точний розв'язок,** $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_p = \bar{\mathbf{b}}$

Нехай $\bar{\mathbf{x}}_n$ **– наближений розв'язок.**
Очевидною є рівність $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_p - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_n = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_n$

або $\mathbf{A}\left(\bar{\mathbf{x}}_p - \bar{\mathbf{x}}_n\right) = \mathbf{A}\bar{\Delta}_{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_n = \bar{\mathbf{r}}$

$\bar{\Delta}_{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_p - \bar{\mathbf{x}}_n$ **- похибка розв'язку**

$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_n$ **- нев'язка**

$$\mathbf{A}\bar{\Delta}_{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}}$$