

*Основні закони розподілу  
ймовірностей випадкових  
величин*

Навчальна дисципліна:  
“Теорія ймовірностей і  
математична статистика”

# “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

- Розподіл Бернуллі
- Розподіл Радемахера
- Вироджений розподіл
- Рівномірний розподіл (дискретний)
- Гіпергеометричний розподіл
- Розподіл Зіпфа
- Розподіл Зіпфа-Мандельброта
- Розподіл Больцмана
- Розподіл Гіббса
- Розподіл Максвелла-Больцмана
- Розподіл Бозе-Ейнштейна
- Розподіл Фермі-Дірака
- Геометричний розподіл
- Від'ємний біноміальний розподіл
- Параболічний фрактальний розподіл
- Пуассонівський розподіл
- Логарифмічний (ряд) розподіл
- Розподіл Скелама
- Зета-розподіл
- Рівномірний розподіл (неперервний)
- Бета розподіл
- Неперервний рівномірний розподіл
- Прямокутний розподіл
- Дельта функція Дірака
- Розподіл Кумарасвами
- Логарифмічний розподіл (неперервний)
- Трикутний розподіл
- Розподіл фон Майсеса на колі.
- Розподіл фон Майсеса-Фішера на N-вимірній сфері.
- Розподіл Кента на тривимірній сфері.
- Розподіл Вігнера на напівколі
- Розподіл  $\chi^2$ -квадрат
- Експоненціальний розподіл
- Гамма-розподіл
- Розподіл Парето
- $\chi^2$ -розподіл
- Нецентрований  $\chi^2$ -розподіл
- Обернений розподіл  $\chi^2$ -квадрат
- Нецентрований розподіл  $\chi^2$ -квадрат
- Масштабований обернений розподіл  $\chi^2$ -квадрат
- Експоненціальний розподіл
- F-розподіл (Бета розподіл другого роду.)
- Нецентрований F-розподіл
- Гама-розподіл
- Розподіл Ерланга
- Обернений гамма-розподіл
- Напів-нормальний розподіл
- Розподіл Леві
- Лог-логістичний розподіл
- Логнормальний розподіл
- Розподіл Пірсона тип III
- Розподіл Рейлі
- Розподіл Райса
- Розподіл Гамбела типу 2
- Розподіл Вальда
- Розподіл Вейбулла
- Розподіл Коші
- Розподіл Лапласа
- Розподіл Леві
- Нормальний розподіл
- Функція Лоренца
- z-розподіл Фішера
- гіперболічний розподіл
- Розподіл Ландау
- Розподіл Лапласа
- Нормальний розподіл
- Розподіл Пірсона IV типу
- t-розподіл Стьюдента
- нецентрований t-розподіл
- Розподіл Діріхле
- поліноміальний розподіл
- Багатовимірний нормальний розподіл
- нормальний матричний розподіл
- матричний t-розподіл
- Розподіл Кантора
- Truncated distribution

## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

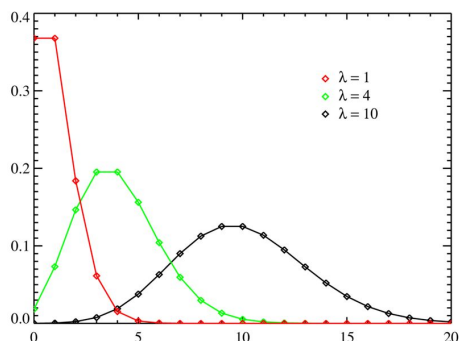
- Біномний розподіл (Бернуллі):

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$



**Якоб Бернуллі I** (1654–1705) – швейцарський математик. Народився у Базелі (Швейцарія), в сім’ї фармацевта. Самостійно вивчав теологію і математику. З 1687 року – професор фізики і математики в Базельському університеті. Найважливішими є заслуги Я.Бернуллі в розвитку аналізу нескінченно малих, теорії рядів, варіаційного числення і теорії ймовірностей. Його книга „Арифметичні додатки про нескінченні ряди та їх скінченні суми” (1689–1704) стала першим керівництвом з теорії рядів. У праці „Мистецтво пропозицій”, виданій Миколою I Бернуллі у 1713р., розв’язав деякі задачі комбінаторики; відкрив числа, пізніше названі числами Бернуллі; довів так звану теорему Бернуллі – частковий випадок закону великих чисел, побудував математичну модель для опису серії незалежних експериментів (схема Бернуллі). Йому належать також роботи з фізики, арифметики, алгебри і геометрії.

## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”



### • Розподіл Пуассона:

$$P_{n, m} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$



**Пуассон, Сімеон Дені** (1781–1840) – французький механік, фізик і математик. Народився у Пітів’є (департамент Луара, Франція). У 1798р. вступив до Політехнічної школи. На його здібності звернули увагу П.Лаплас, Ж.Лагранж та інші професори. Після закінчення курсу він був залишений в цьому навчальному закладі. В 1816р. Пуассона призначили професором раціональної механіки в Сорбонну. Написав більше 300 праць. В галузі небесної механіки найважливіші роботи Пуассона стосуються деяких спеціальних задач місячної та планетної теорій, а також стійкості Сонячної системи. Суттєве значення мають роботи Пуассона, присвячені певним інтегралам, рівнянням у скінчених різницях, диференціальним рівнянням з частинними похідними, теорій ймовірності, варіаційному численню, рядам і т.д. Вчений ґрунтовно покращив способи застосування теорії ймовірностей взагалі, і зокрема до питань статистики, а також довів теорему, що стосувалася закону великих чисел (закон Пуассона), вперше скориставшись терміном „закон великих чисел”.

## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

---

- Геометричний розподіл:

$$P(X = m) = pq^{m-1}$$

Така форма застосовується для випадкової величини  $X$  – кількості випробувань у схемі Бернуллі, проведених до першого успіху (появи події).

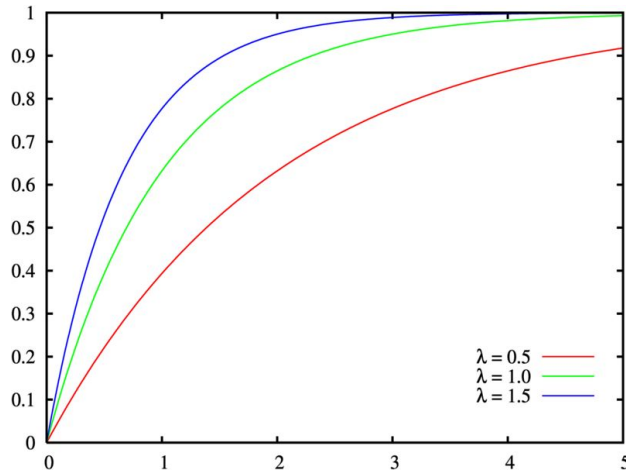
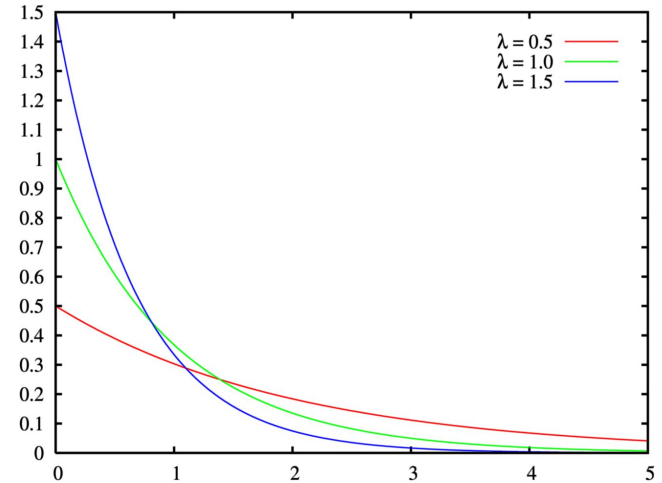
$$P(Y = m) = p^{m-1}q$$

Така форма застосовується для випадкової величини  $Y$  – кількості випробувань у схемі Бернуллі, проведених до першого неуспіху (непояви події).

## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

- Експоненціальний (показниковий) розподіл:

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



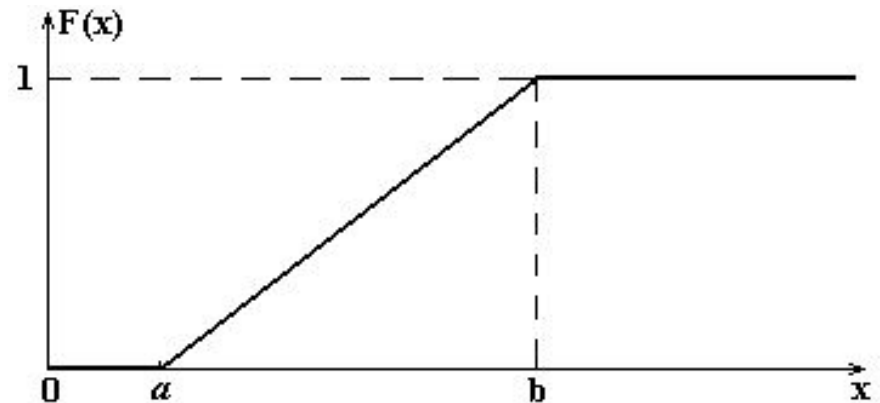
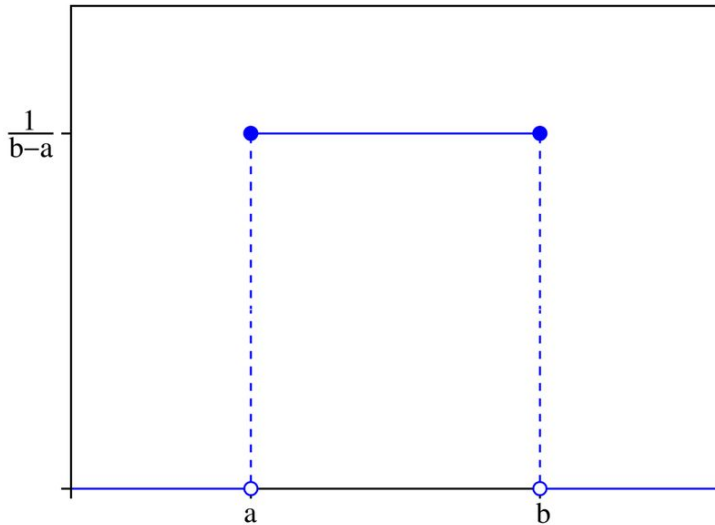
$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

- Рівномірний розподіл:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

- Розподіл Гаусса (нормальний):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

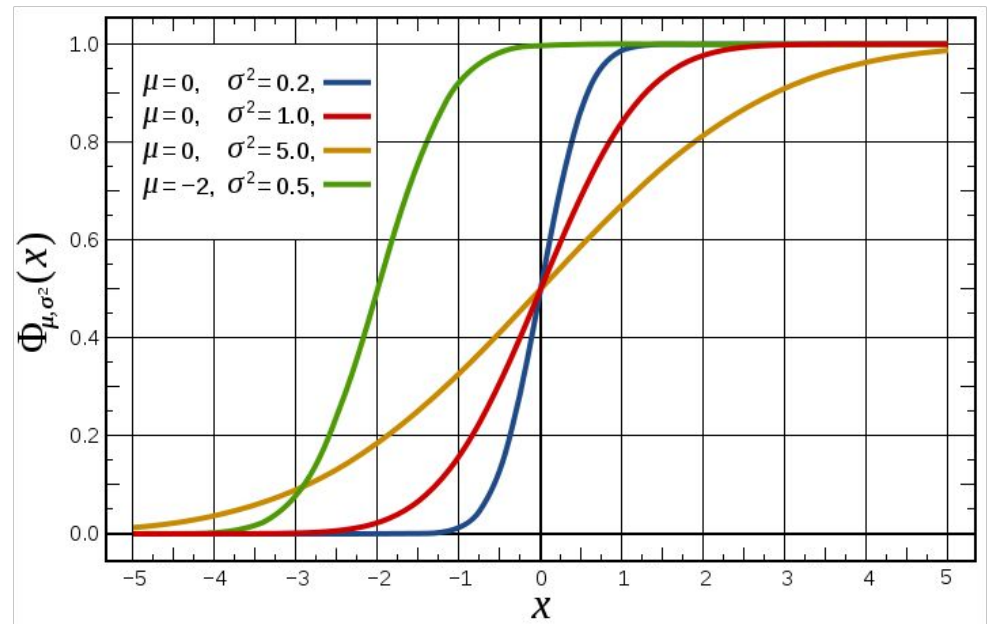
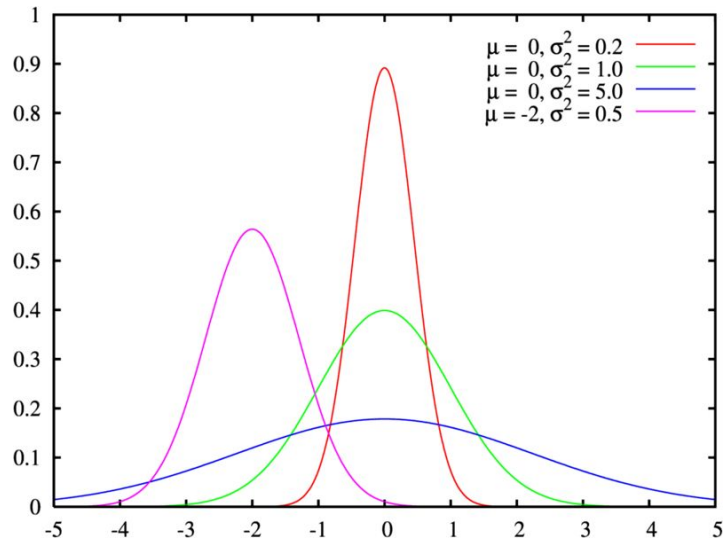


*Карл Фрідріх Гаусс* (1777–1855) – німецький математик, астроном, фізик і геодезист. Народився в Брауншвейгу. З раннього дитинства проявив видатні математичні здібності. У 1795–98р.р. навчався в Геттінгенському університеті. Після захисту докторської дисертації (1799), що містила перше доведення так званої основної теореми алгебри, отримав право на приват-доцентуру. До закінчення перебування в університеті підготував фундаментальну працю „Арифметичні дослідження” (1801), що містила цілий ряд фундаментальних відкриттів та різноманітних доведень. У 1807р. отримує кафедру математики і астрономії в Геттінгенському університеті та посаду директора Геттінгенської астрономічної обсерваторії. Роботи Гаусса виявили великий вплив на подальший розвиток вищої алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії тяжіння, класичної теорії електрики і магнетизму, геодезії, багатьох галузей теоретичної астрономії.



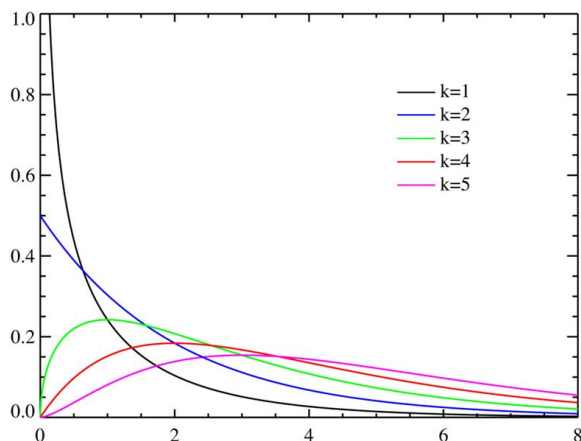
# “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

- Розподіл Гаусса (нормальний):



## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

### • Розподіл Пірсона $\chi^2$ (“хі-квадрат”):



$$P(\chi^2 < x) = P(|\chi| < \sqrt{x}) = \\ = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \text{ де } u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

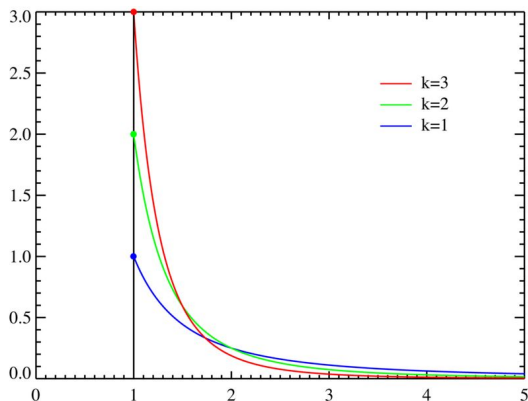


$$p(\chi^2 = x) = x^{(n-2)/2} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}, \quad 0 < x < +\infty,$$

**Карл Пірсон** (1857–1936) – англійський математик-статистик та біолог. Народився у Лондоні. Закінчив коледж Кембриджського університету (1879) зі ступенем магістра. З 1884 року й до кінця життя працював професором прикладної математики і механіки в Лондонському університеті. Основні роботи Пірсона присвячені важливим питанням статистики, розробці теорії кореляції та її застосуванню до проблем спадковості в еволюції, розробці тестів математичної статистики та критеріїв узгодженості для перевірки ступеня відповідності результатів, отриманих з досліду, та результатів, передбачених статистичними гіпотезами. Великою заслугою Пірсона було заснування у 1900 році журналу „Біометрика”, виданням якого він керував до кінця життя.

## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”

### ● Розподіл Парето:



$$P(X > x) = \left( \frac{x}{x_m} \right)^{-k},$$

$$\forall x \geq x_m$$



**Вільфредо Парето** (1848 – 1923) – італійський інженер, економіст і соціолог. Народився в Парижі. У 1858 році, після повернення до Італії Вільфредо починає навчання, отримуючи одночасно класичну гуманітарну та технічну освіту й надаючи значної уваги математиці. Після закінчення Політехнічної школи в Туріні у 1869 році захищає дисертацію “Фундаментальні принципи рівноваги у твердих тілах”. У першій половині 90-х років публікує ряд досліджень з політекономії та математичної економіки. З 1893 і до кінця життя був професором політекономії Лозаннського університету. У 1897 році Парето дослідив, що розподіл багатства в суспільстві зазвичай підлягає певному закону – з подвоєнням розміру контрольованої власності кількість людей, які досягли відповідного рівня, скорочується у геометричній прогресії з приблизно постійним множником. У 1923 році був удостоєний звання сенатора Італії.

## “Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин”



- **Центральна гранична теорема  
Ляпунова:**

*Щільність ймовірностей суми незалежних або слабо залежних, рівномірно малих складових при необмеженому зростанні їх кількості як завжди близько наближується до нормального закону розподілу незалежно від того, які закони розподілу мають складові.*

**Олександр Михайлович Ляпунов** (1857–1918) – російський математик і механік, представник Петербурзької математичної школи, створеної П.Л.Чебишовим. Народився в Ярославлі (Росія). У 1870 році вступив відразу до третього класу гімназії, яку закінчив із золотою медаллю. Крім латини і давньогрецької мови, вільно володів французькою, знав німецьку та англійську мови, добре орієнтувався в історії, географії, філософії. Восени 1876 року Ляпунов вступив на відділення природничих наук фізико-математичного факультету Петербурзького університету, але через місяць перевівся на математичне відділення. На четвертому курсі виконав роботу «Рівновага плаваючих тіл» і отримав за неї золоту медаль. Після закінчення університету був залишений на кафедрі механіки для підготовки до звання професора, дисертацію захистив у 1885 р. Після захисту перейшов на роботу в Харківський університет (1885–1902). Починаючи з 1888 року, почали з’являтися його роботи, присвячені проблемам стійкості руху. У 1892 році захистив по цій темі докторську дисертацію. В 1900р. Ляпунов був обраний членом-кореспондентом Петербурзької Академії наук, а через рік – дійсним членом Академії. Незабаром переїхав до Петербурга і присвятив себе науковим дослідженням. Загинув трагічно у 1918 році.