Оптимізаційні задачі в менеджменті

Ярослав Притула

Моделювання для прийняття рішень

Вивчені нами статистичні методи прийняття рішень, в основному, дозволяють відповісти на питання “Що є чи що буде?”. Якщо б ми змогли змоделювати весь чи частину процесів у нашому бізнесі, то крім цього питання ми б могли дати відповідь на питання “Що буде, якщо ... ?”, тобто ми б могли прораховувати різні варіанти прийняття рішень та дивитись на можливі наслідки.

Моделювання для прийняття рішень: приклад

*Компанія розглядає можливість продажу нового продукту і потребує оцінити оптимальну кількість замовлення цього товару у виробника. Компанія планує продавати товар за $30. Виробник пропонує різну ціну товару в залежності від замовлення. Якщо замовлення менше 1000 шт., то ціна рівна $24, між 1000 та 2000 шт. ціна рівна $23, між 2000 та 3000 шт. ціна $22.25, між 3000 та 4000 шт. ціна $21.75 і при замовленні більше 4000 шт. ціна рівна $21.30. Тобто, замовивши, наприклад, 2500 шт. товару ціна замовлення для компанії складе $22.25*2500=$55 625. Також, весь непроданий товар компанія може повернути за ціною $10 за шт. Компанія не впевнена в попиті на товар, тому не знає скільки замовити товару. Допоможіть!*

Також, припустимо, що базуючись на попередньому досвіді компанія очікує такий розподіл ймовірного попиту на новий товар:

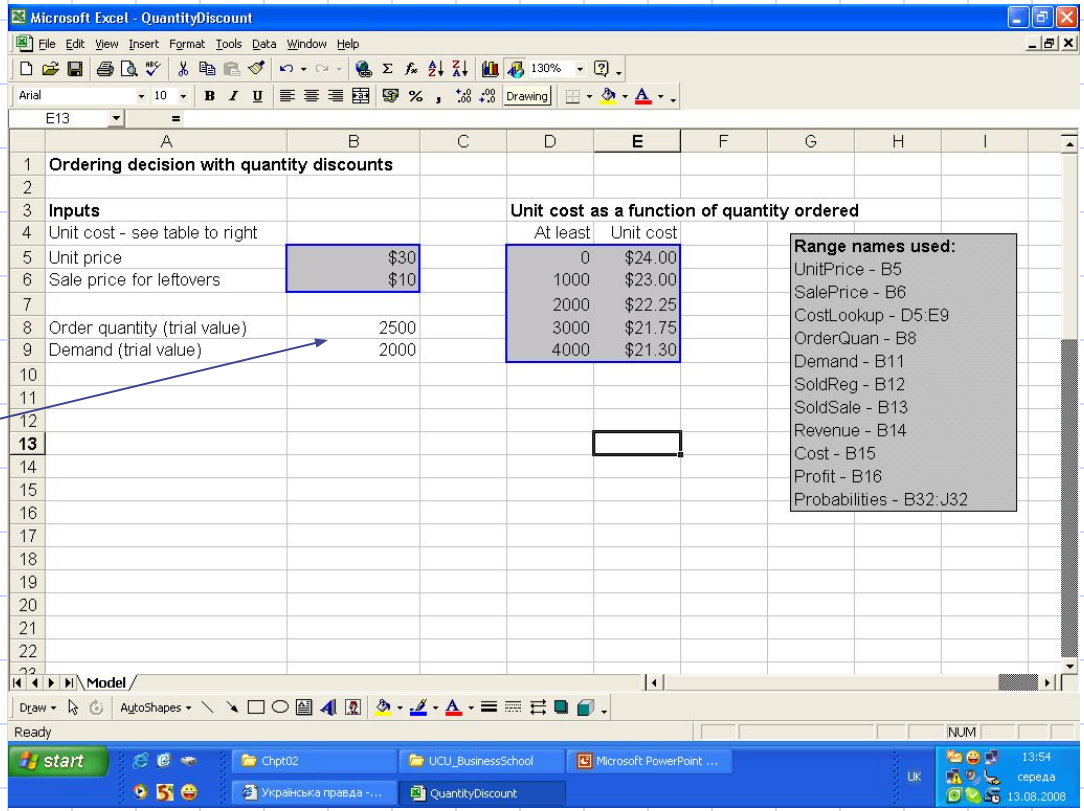
Попит	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500
Ймовірність	0.025	0.05	0.15	0.25	0.25	0.15	0.07	0.04	0.015

Моделювання для прийняття рішень: приклад

- *Маємо вхідну інформацію: ціна продажі товару ($30), ціна повернення ($10), знижки при замовленні. Маємо дві невідомі величини: величину замовлення та величину попиту на товар. Ціль компанії – максимізація прибутку.*

Запишемо це в Excel:

Для невідомих величин поставимо будь-які величини, що потім зможемо міняти.



Моделювання для прийняття рішень: приклад

*Далі запишемо модель для визначення прибутку. Для цього визначимо кількість товару проданого за звичайною ціною як менше з величини замовлення та попиту (**=MIN(OrderQuan;Demand)**).*

*Якщо замовлено більше ніж продано, то ця величина визначається наступним чином (**=IF(OrderQuan>Demand;OrderQuan-Demand;0)**).*

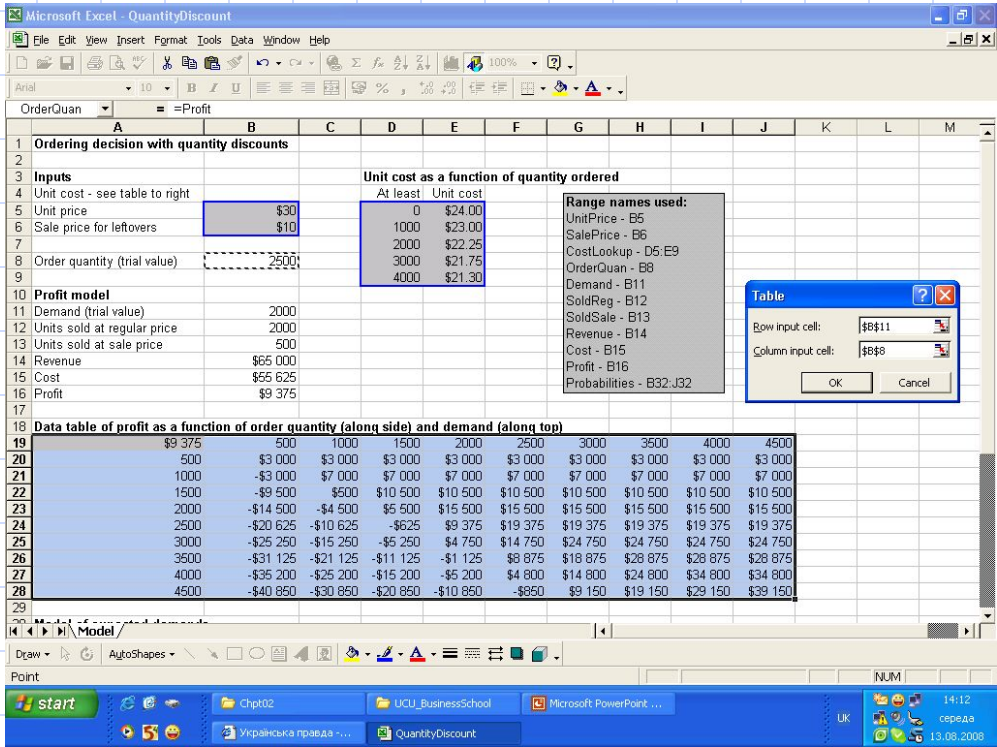
*Далі, визначаємо дохід як к-кість проданого товару на його звичайну ціну плюс к-кість непроданого товару на ціну повернення (**=SoldReg*UnitPrice+SoldSale*SalePrice**).*

*Витрати – це ціна замовлення, що залежить від величини замовлення, оскільки діє система знижок. Щоб це записати в Excel використаємо функцію VLOOKUP, а саме (**=VLOOKUP(OrderQuan;CostLookup;2)*OrderQuan**).*

*Нарешті, прибуток = дохід – витрати (**=Revenue-Cost**).*

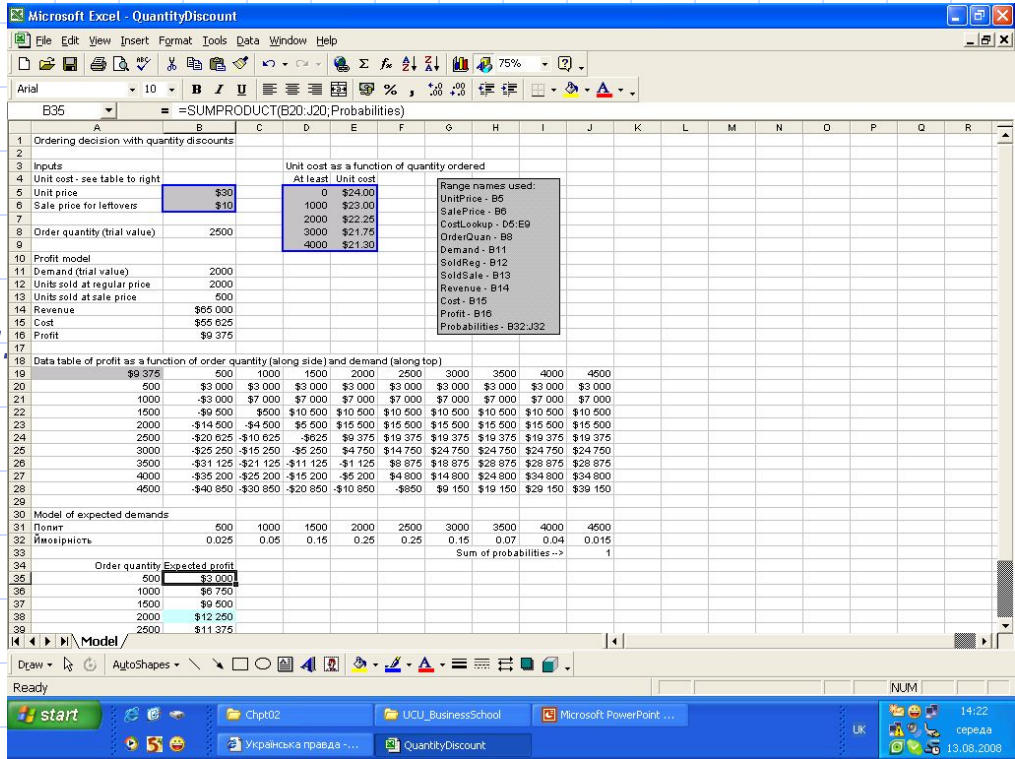
Моделювання для прийняття рішень: приклад

- *Отриману модель ми можемо використати для відповіді на питання “Що буде, якщо ми замовимо X товару, а попит складе Y?”*
- *Для цього використаємо функцію **Data -> Table**.*
- *Зазначивши можливі значення замовлення та попиту в таблиці та поставивши у верхні лівій клітинці формулу для визначення прибутку ми виділяємо таблицю, викликаємо функцію **Data -> Table** та визначаємо вхідні значення для рядка та стовця та тиснем ОК.*
- *В результаті отримуємо можливі значення прибутку при різних значеннях величини замовлення та попиту.*



Моделювання для прийняття рішень: приклад

*Щоб використати наше припущення про ймовірнісний розподіл попиту знайдемо очікуваний прибуток як суму добутків відповідних значень прибутку на відповідні ймовірності. Це можна зробити, наприклад, за допомогою функції SUMPRODUCT, а саме (**=SUMPRODUCT(B20:J20;Probabilities)**), де в проміжку **B20:J20** лежать значення прибутків при різних значеннях попиту при величині замовлення 500 шт. Аналогічно робимо для інших величин замовлення. Як бачимо максимальний очікуваний прибуток отримуємо при замовленні у 2000 шт. товару.*



Моделювання для прийняття рішень: лінійне програмування

Зазвичай цілі будь-якого бізнесу зазвичай формулюються в термінах максимізації чи мінімізації певних величин, як от максимізація прибутку.

Лінійне програмування (ЛП) – це розв'язування задач опитмізації.

Класична задача лінійного програмування – це оптимізувати певний (лінійний) процес при заданих обмеженнях.

ЛП складає невід'ємну частину фактично будь-якої системи прийняття рішень і вирішує задачі фактично з будь-якому аспекті ведення бізнесу.

Наша задача – зрозуміти суть ЛП, розглянути ряд застосувань ЛП для різних аспектів ведення бізнесу та навчитись його застосовувати використовуючи Excel та його надбудови.

ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Для цього типу задач проблема полягає в пошуку оптимального набору товарів виробництва для максимізації прибутку.

Компанія Monet випускає чотири типи фоторамок (1, 2, 3 та 4) що відрізняються у розмірі, формі та матеріалах. Кожен тип рамки вимагає певних кваліфікованих людських ресурсів, металу та шкла.

	Робоча сила	Метал	Шкло	Ціна продажі
Рамка 1	2	4	6	$28.50
Рамка 2	1	2	2	$12.50
Рамка 3	3	1	1	$29.25
Рамка 4	2	2	2	$21.50

Наразі на ринку максимально можна отримати до 4000 годин людських ресурсів, 6000 одиниць металу та 10000 одиниць шкла за ціною, відповідно, $8/год., $0.5 та $0.75. Також, ринкові умови є такі, що неможлтво продати більше 1000 рамок 1, 2000 рамок 2, 500 рамок 3 та 1000 рамок 4. Який оптимальний набір рамок для максимізації прибутку?

ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

*Спочатку знайдемо прибуток від однієї рамки кожного типу. Для рамки 1 маємо: $28.50-(2*$8+4*$0.5+6*$0.75)=$6. Для рамок 2, 3 та 4 маємо, відповідно, $2, $4 та $3. Отже, якщо через X_1, X_2, X_3 та X_4 позначимо кількість рамок кожного типу, то наша задача така:*

max $\mathbf{6X_1+2X_2+4X_3+3X_4}$ (наша ціль)

$\mathbf{2X_1+X_2+3X_3+2X_4 \le 4000}$ (обмеження робочої сили)

$\mathbf{4X_1+2X_2+X_3+2X_4 \le 6000}$ (обмеження пропозиції металу)

$\mathbf{6X_1+2X_2+X_3+2X_4 \le 10000}$ (обмеження пропозиції шкла)

$\mathbf{X_1 \le 1000}$ (обмеження попиту)

$\mathbf{X_2 \le 2000}$ (обмеження попиту)

$\mathbf{X_3 \le 500}$ (обмеження попиту)

$\mathbf{X_4 \le 1000}$ (обмеження попиту)

$\mathbf{X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0}$ (кількості є позитивними числами)

ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Для запису та розв'язання задачі в Excel нам потрібно розділити всі змінні в залежності від їх типу:

1. Вхідні дані (Inputs): всі числові дані з умови задачі;

2. Змінні (Changing cells): кількості рамок кожного типу;

3. Цілова змінна (Target, objective cell): прибуток, як функція від вхідних даних та змінних;

Також важливим елементом запису задачі в Excel є формулювання обмежень.

ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Microsoft Excel - ProductMix

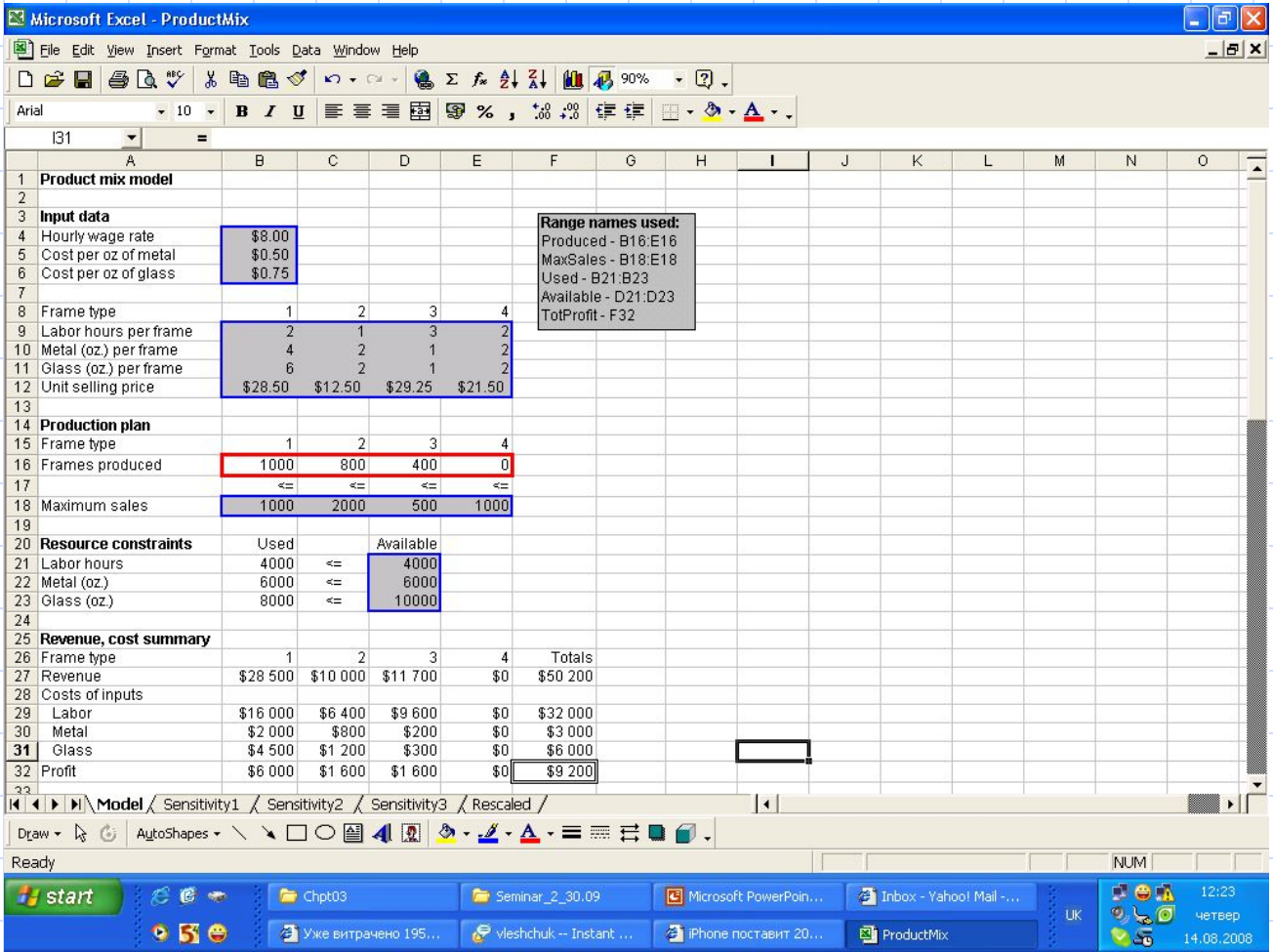
	A	B	C	D	E
1	**Product mix model**				
2					
3	**Input data**				
4	Hourly wage rate	$8.00			
5	Cost per oz of metal	$0.50			
6	Cost per oz of glass	$0.75			
7					
8	Frame type	1	2	3	4
9	Labor hours per frame	2	1	3	2
10	Metal (oz.) per frame	4	2	1	2
11	Glass (oz.) per frame	6	2	1	2
12	Unit selling price	$28.50	$12.50	$29.25	$21.50
13					
14	**Production plan**				
15	Frame type	1	2	3	4
16	Frames produced	1000	800	400	0
17		<=	<=	<=	<=
18	Maximum sales	1000	2000	500	1000
19					
20	**Resource constraints**	Used		Available	
21	Labor hours	4000	<=	4000	
22	Metal (oz.)	6000	<=	6000	
23	Glass (oz.)	8000	<=	10000	
24					

Range names used:
Produced - B16:E16
MaxSales - B18:E18
Used - B21:B23
Available - D21:D23
TotProfit - F32

Model / Sensitivity1 / Sensitivity2 / Sensitivity3 / Rescaled

ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Далі нам потрібно записати саму модель для визначення прибутку на основі вхідних даних, змінних та існуючих обмеженнях.

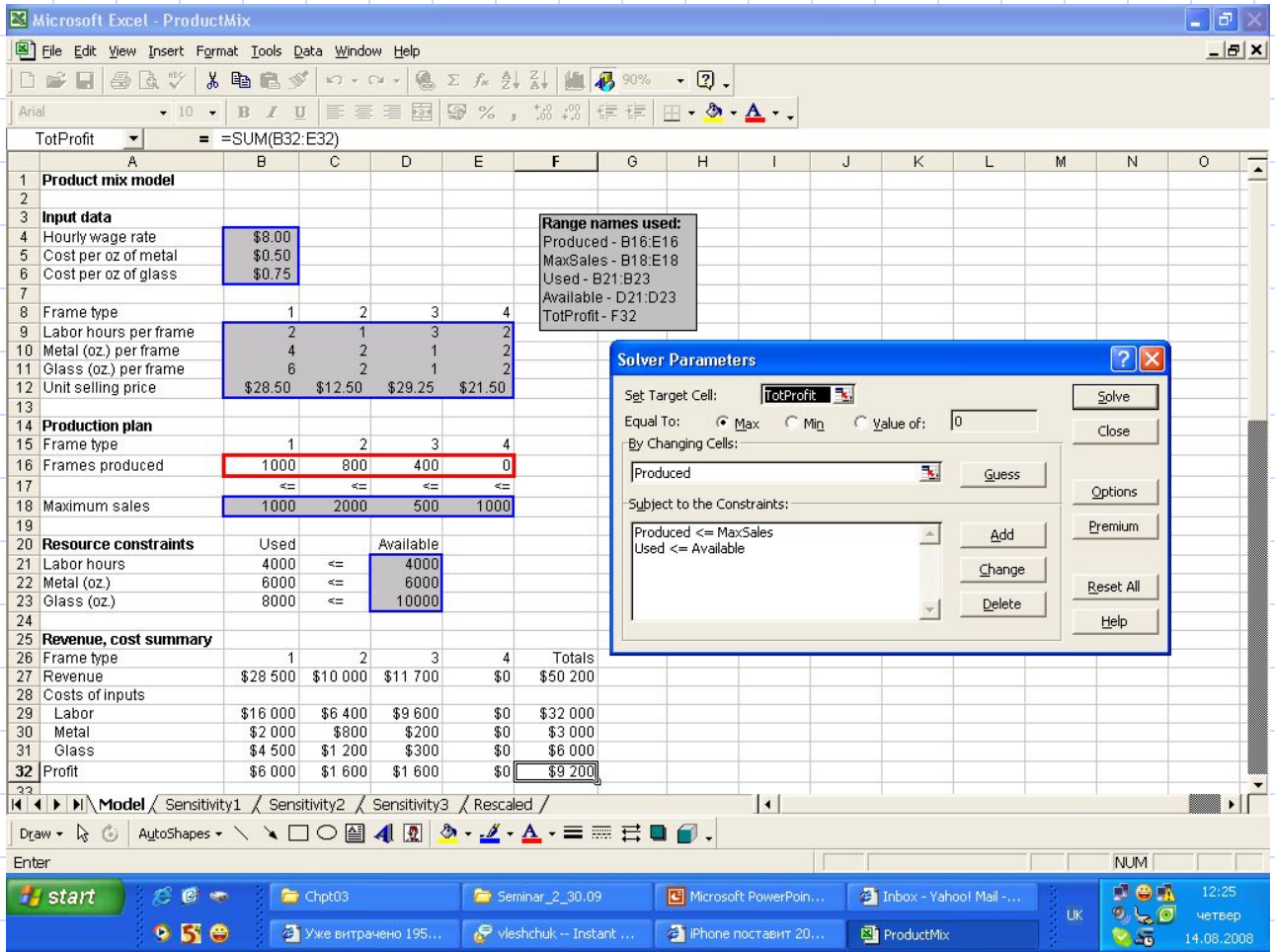


	A	B	C	D	E	F
1	**Product mix model**					
2						
3	**Input data**					
4	Hourly wage rate	$8.00				
5	Cost per oz of metal	$0.50				
6	Cost per oz of glass	$0.75				
7						
8	Frame type	1	2	3	4	
9	Labor hours per frame	2	1	3	2	
10	Metal (oz.) per frame	4	2	1	2	
11	Glass (oz.) per frame	6	2	1	2	
12	Unit selling price	$28.50	$12.50	$29.25	$21.50	
13						
14	**Production plan**					
15	Frame type	1	2	3	4	
16	Frames produced	1000	800	400	0	
17		<=	<=	<=	<=	
18	Maximum sales	1000	2000	500	1000	
19						
20	**Resource constraints**	Used		Available		
21	Labor hours	4000	<=	4000		
22	Metal (oz.)	6000	<=	6000		
23	Glass (oz.)	8000	<=	10000		
24						
25	**Revenue, cost summary**					
26	Frame type	1	2	3	4	Totals
27	Revenue	$28 500	$10 000	$11 700	$0	$50 200
28	Costs of inputs					
29	Labor	$16 000	$6 400	$9 600	$0	$32 000
30	Metal	$2 000	$800	$200	$0	$3 000
31	Glass	$4 500	$1 200	$300	$0	$6 000
32	Profit	$6 000	$1 600	$1 600	$0	$9 200

Range names used:
Produced - B16:E16
MaxSales - B18:E18
Used - B21:B23
Available - D21:D23
TotProfit - F32

ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

- *Для знаходження максимального прибутку та відповідних змінних кількостей рамок використаємо функцію **Принятие решений (Solver)***



ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Знаходження оптимального набору товарів та відповідного прибутку не завершує, а лише починає аналіз. Далі можна робити всеможливі аналізи чутливості ставлячи різні варіанти змін у вхідні дані. Наприклад, як зміниться оптимальний набір товарів, якщо збільшити ціну рамки 4 з $21.50 до $26.50. Зрозуміло, що прибуток збільшиться, але на скільки? Зробивши відповідну заміну в вхідних даних та викликавши функцію Solver знов отримуємо, що максимальний прибуток зросте з $9200 до $14000.

Дякуючи додатку Solver Table ми можемо автоматизувати зміну вхідних даних. Виклакавши функцію ***Data -> Solver Table*** *ми можемо автоматизувати зміну одного або двох вхідних параметрів одночасно.*

Припустимо, ми хочемо подивитись як змінюється максимальний прибуток та відповідний набір товарів при зміні наявної робочої сили з 2500 до 5000 годин (з кроком 250 год.). Як це зробити?

ЛП: мережні моделі

Багато оптимізаційних задач можуть бути зображеня у вигляді мереж (графів). У бізнесі такі задачі зазвичай трапляються у логістиці, як от транспортна задача чи оптимізація виконання проектів.

*Простим прикладом **транспортної** задачі є задача компанії, що має декілька центрів виробництва та декілька центрів споживання товару. Кожен центр характеризується певним максимальним обсягом виробництва чи споживання товару. Задача компанії полягає в мінімізації коштів на транспортування товару з центрів виробництва в центри споживання товару.*

ЛП: мережні моделі – оптимізація виконання проектів

Мережеві моделі можна використати для оптимізації таймінгу комплексних проектів, що складаються з багатьох етапів. Якщо відомий точний час для виконання кожного етапу, то ЛП дозволяє визначити час необхідний для виконання проекту. Якщо ж невідомий час виконання певних етапів, то можна оцінити ймовірність виконання проекту за певний час.

Прикладами можуть слугувати:

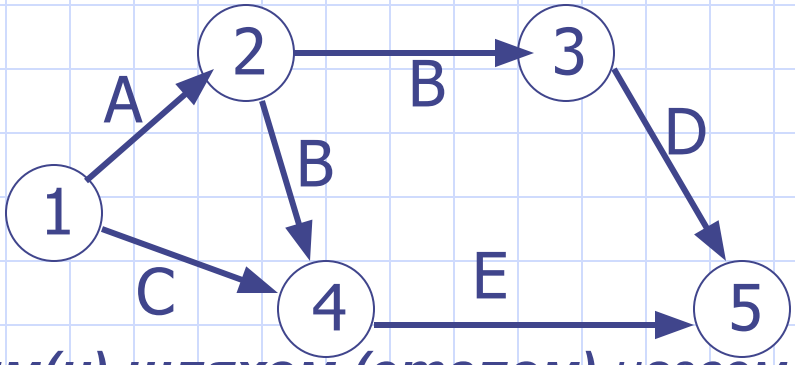
- *будівельні проекти;*
- *організація масових заходів;*
- *дизайн та маркетинг нового продукту;*
- *організація злиття компаній;*
- *. . .*

ЛП: мережні моделі – оптимізація виконання проектів

У випадку оптимізації проекту використовується так звана модель критичного шляху (critical path model – CPM). Для її застосування потрібно знати етапи проекту та їх послідовність. Проект вважається виконаним, якщо пройдені всі етапи (у відповідній послідовності).

Ми можемо зобразити проект за допомогою графу, тобто за допомогою комбінації вузлів та дуг. Наприклад, проект можна зобразити так

Етап	Необхідний попередній етап
A	Нема
B	A
C	Нема
D	B
E	B, C



Критичним(и) шляхом (етапом) *назвемо ті етапи, що впливають на тривалість проекту.*