

# Оптимізаційні задачі в менеджменті

Ярослав Притула

# Моделювання для прийняття рішень

Вивчені нами статистичні методи прийняття рішень, в основному, дозволяють відповісти на питання “Що є чи що буде?”. Якщо б ми змогли змоделювати весь чи частину процесів у нашому бізнесі, то крім цього питання ми б могли дати відповідь на питання “Що буде, якщо ...?”, тобто ми б могли прораховувати різні варіанти прийняття рішень та дивитись на можливі наслідки.

# Моделювання для прийняття рішень: приклад

Компанія розглядає можливість продажу нового продукту і потребує оцінити оптимальну кількість замовлення цього товару у виробника. Компанія планує продавати товар за \$30. Виробник пропонує різну ціну товару в залежності від замовлення. Якщо замовлення менше 1000 шт., то ціна рівна \$24, між 1000 та 2000 шт. ціна рівна \$23, між 2000 та 3000 шт. ціна \$22.25, між 3000 та 4000 шт. ціна \$21.75 і при замовленні більше 4000 шт. ціна рівна \$21.30. Тобто, замовивши, наприклад, 2500 шт. товару ціна замовлення для компанії складе  $\$22.25 \cdot 2500 = \$55\,625$ . Також, весь непроданий товар компанія може повернути за ціною \$10 за шт. Компанія не впевнена в попиті на товар, тому не знає скільки замовити товару. Допоможіть!

Також, припустимо, що базуючись на попередньому досвіді компанія очікує такий розподіл ймовірного попиту на новий товар:

Попит	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500
Ймовірність	0.025	0.05	0.15	0.25	0.25	0.15	0.07	0.04	0.015

# Моделювання для прийняття рішень: приклад

Маємо вхідну інформацію: ціна продажі товару (\$30), ціна повернення (\$10), знижки при замовленні. Маємо дві невідомі величини: величину замовлення та величину попиту на товар. Ціль компанії – максимізація прибутку.

Запишемо це в Excel:

Для невідомих величин поставимо будь-які величини, що потім зможемо міняти.

Microsoft Excel - QuantityDiscount

File Edit View Insert Format Tools Data Window Help

Arial 10 B I U

Ordering decision with quantity discounts	
1	Ordering decision with quantity discounts
2	
3	<b>Inputs</b>
4	Unit cost - see table to right
5	Unit price \$30
6	Sale price for leftovers \$10
7	
8	Order quantity (trial value) 2500
9	Demand (trial value) 2000
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	

Unit cost as a function of quantity ordered	
At least	Unit cost
0	\$24.00
1000	\$23.00
2000	\$22.25
3000	\$21.75
4000	\$21.30

Range names used:

- UnitPrice - B5
- SalePrice - B6
- CostLookup - D5:E9
- OrderQuan - B8
- Demand - B11
- SoldReg - B12
- SoldSale - B13
- Revenue - B14
- Cost - B15
- Profit - B16
- Probabilities - B32:J32

Model

Draw AutoShapes

Ready NUM

start Chpt02 UCU\_BusinessSchool Microsoft PowerPoint ... 13:54 середа 13.08.2008

# Моделювання для прийняття рішень: приклад

Далі запишемо модель для визначення прибутку. Для цього визначимо кількість товару проданого за звичайною ціною як менше з величини замовлення та попиту (**=MIN(OrderQuan;Demand)**).

Якщо замовлено більше ніж продано, то ця величина визначається наступним чином (**=IF(OrderQuan>Demand;OrderQuan-Demand;0)**).

Далі, визначаємо дохід як к-кість проданого товару на його звичайну ціну плюс к-кість непроданого товару на ціну повернення (**=SoldReg\*UnitPrice+SoldSale\*SalePrice**).

Витрати – це ціна замовлення, що залежить від величини замовлення, оскільки діє система знижок. Щоб це записати в Excel використаємо функцію VLOOKUP, а саме (**=VLOOKUP(OrderQuan;CostLookup;2)\*OrderQuan**).

Нарешті, прибуток = дохід – витрати (**=Revenue-Cost**).

# Моделювання для прийняття рішень: приклад

Отриману модель ми можемо використати для відповіді на питання “Що буде, якщо ми замовимо  $X$  товару, а попит складе  $Y$ ?”

Для цього використовуємо функцію **Data -> Table**.

Зазначивши можливі значення замовлення та попиту в таблиці та поставивши у верхні лівій клітинці формулу для визначення

прибутку ми виділяємо

таблицю, викликаємо функцію

**Data -> Table** та визначаємо

вхідні значення для рядка та стовця та тиснем **OK**.

В результаті отримуємо

можливі значення прибутку

при різних значеннях величини

замовлення та попиту.

Microsoft Excel - QuantityDiscount

OrderQuan = =Profit

OrderQuan	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Ordering decision with quantity discounts												
2	Inputs												
4	Unit cost - see table to right												
5	Unit price	\$30											
6	Sale price for leftovers	\$10											
8	Order quantity (trial value)	2500											
10	Profit model												
11	Demand (trial value)	2000											
12	Units sold at regular price	2000											
13	Units sold at sale price	500											
14	Revenue	\$65 000											
15	Cost	\$55 625											
16	Profit	\$9 375											
18	Data table of profit as a function of order quantity (along side) and demand (along top)												
19		\$9 375	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500		
20	500	\$3 000	\$3 000	\$3 000	\$3 000	\$3 000	\$3 000	\$3 000	\$3 000	\$3 000	\$3 000		
21	1000	-\$3 000	\$7 000	\$7 000	\$7 000	\$7 000	\$7 000	\$7 000	\$7 000	\$7 000	\$7 000		
22	1500	-\$9 500	\$5 000	\$10 500	\$10 500	\$10 500	\$10 500	\$10 500	\$10 500	\$10 500	\$10 500		
23	2000	-\$14 500	-\$4 500	\$5 500	\$15 500	\$15 500	\$15 500	\$15 500	\$15 500	\$15 500	\$15 500		
24	2500	-\$20 625	-\$10 625	-\$625	\$9 375	\$19 375	\$19 375	\$19 375	\$19 375	\$19 375	\$19 375		
25	3000	-\$25 250	-\$15 250	-\$5 250	\$4 750	\$14 750	\$24 750	\$24 750	\$24 750	\$24 750	\$24 750		
26	3500	-\$31 125	-\$21 125	-\$11 125	-\$1 125	\$8 875	\$18 875	\$28 875	\$28 875	\$28 875	\$28 875		
27	4000	-\$35 200	-\$25 200	-\$15 200	-\$5 200	\$4 800	\$14 800	\$24 800	\$34 800	\$34 800	\$34 800		
28	4500	-\$40 850	-\$30 850	-\$20 850	-\$10 850	-\$850	\$9 150	\$19 150	\$29 150	\$39 150	\$39 150		

Range names used:

- UnitPrice - B5
- SalePrice - B6
- CostLookup - D5:E9
- OrderQuan - B8
- Demand - B11
- SoldReg - B12
- SoldSale - B13
- Revenue - B14
- Cost - B15
- Profit - B16
- Probabilities - B32:J32

Table

Row input cell: =\$B\$11

Column input cell: =\$B\$8

OK Cancel

# Моделювання для прийняття рішень: приклад

Щоб використати наше припущення про ймовірнісний розподіл попиту знайдемо очікуваний прибуток як суму добутків відповідних значень прибутку на відповідні ймовірності. Це можна зробити, наприклад, за допомогою функції **SUMPRODUCT**, а саме **(=SUMPRODUCT(B20:J20;Probabilities))**, де в проміжку **B20:J20** лежать значення прибутків при різних значеннях попиту при величині замовлення 500 шт. Аналогічно робимо для інших величин замовлення. Як бачимо максимальний очікуваний прибуток отримуємо при замовленні у 2000 шт. товару.

Microsoft Excel - QuantityDiscount

Unit cost as a function of quantity ordered

At least	Unit cost
0	\$24.00
1000	\$23.00
2000	\$22.25
3000	\$21.75
4000	\$21.30

Range names used:

- UnitPrice - B5
- SalePrice - B6
- CostLookup - D5:E9
- OrderQuan - B8
- Demand - B11
- SoldReg - B12
- SoldSale - B13
- Revenue - B14
- Cost - B15
- Profit - B16
- Probabilities - B32:J32

Data table of profit as a function of order quantity (along side) and demand (along top)

	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500
500	\$9 375								
1000	\$3 000	\$3 000							
1500	-\$9 500	\$500	\$10 500						
2000	-\$14 500	-\$4 500	\$5 500	\$15 500					
2500	-\$20 525	-\$10 525	-\$525	\$9 375	\$19 375				
3000	-\$25 250	-\$15 250	-\$5 250	\$4 750	\$14 750	\$24 750			
3500	-\$31 125	-\$21 125	-\$11 125	-\$1 125	\$8 875	\$18 875	\$28 875		
4000	-\$35 200	-\$25 200	-\$15 200	-\$5 200	\$4 800	\$14 800	\$24 800	\$34 800	
4500	-\$40 850	-\$30 850	-\$20 850	-\$10 850	-\$850	\$9 150	\$19 150	\$29 150	\$39 150

Model of expected demands

Попит	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500
Ймовірність	0.025	0.05	0.15	0.25	0.25	0.15	0.07	0.04	0.015

Order quantity Expected profit

Order quantity	Expected profit
500	\$3 000
1000	\$6 750
1500	\$9 500
2000	\$12 250
2500	\$11 375



# Моделювання для прийняття рішень: лінійне програмування

Зазвичай цілі будь-якого бізнесу зазвичай формулюються в термінах максимізації чи мінімізації певних величин, як от максимізація прибутку.

Лінійне програмування (ЛП) – це розв'язування задач оптимізації.

Класична задача лінійного програмування – це оптимізувати певний (лінійний) процес при заданих обмеженнях.

ЛП складає невід'ємну частину фактично будь-якої системи прийняття рішень і вирішує задачі фактично з будь-якому аспекті ведення бізнесу.

**Наша задача – зрозуміти суть ЛП, розглянути ряд застосувань ЛП для різних аспектів ведення бізнесу та навчитись його застосовувати використовуючи Excel та його надбудови.**



# ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Для цього типу задач проблема полягає в пошуку оптимального набору товарів виробництва для максимізації прибутку.

*Компанія Monet випускає чотири типи фоторамок (1, 2, 3 та 4) що відрізняються у розмірі, формі та матеріалах. Кожен тип рамки вимагає певних кваліфікованих людських ресурсів, металу та шкла.*

	Робоча сила	Метал	Шкло	Ціна продажі
Рамка 1	2	4	6	\$28.50
Рамка 2	1	2	2	\$12.50
Рамка 3	3	1	1	\$29.25
Рамка 4	2	2	2	\$21.50

*Наразі на ринку максимально можна отримати до 4000 годин людських ресурсів, 6000 одиниць металу та 10000 одиниць шкла за ціною, відповідно, \$8/год., \$0.5 та \$0.75. Також, ринкові умови є такі, що неможливо продати більше 1000 рамок 1, 2000 рамок 2, 500 рамок 3 та 1000 рамок 4. Який оптимальний набір рамок для максимізації прибутку?*

# ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Спочатку знайдемо прибуток від однієї рамки кожного типу. Для рамки 1 маємо:  $\$28.50 - (2 \cdot \$8 + 4 \cdot \$0.5 + 6 \cdot \$0.75) = \$6$ . Для рамок 2, 3 та 4 маємо, відповідно,  $\$2$ ,  $\$4$  та  $\$3$ . Отже, якщо через  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  та  $X_4$  позначимо кількість рамок кожного типу, то наша задача така:

$$\max 6X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_4 \text{ (наша ціль)}$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 + 2X_4 \leq 4000 \text{ (обмеження робочої сили)}$$

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 6000 \text{ (обмеження пропозиції металу)}$$

$$6X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 10000 \text{ (обмеження пропозиції скла)}$$

$$X_1 \leq 1000 \text{ (обмеження попиту)}$$

$$X_2 \leq 2000 \text{ (обмеження попиту)}$$

$$X_3 \leq 500 \text{ (обмеження попиту)}$$

$$X_4 \leq 1000 \text{ (обмеження попиту)}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \text{ (кількості є позитивними числами)}$$

# ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Для запису та розв'язання задачі в Excel нам потрібно розділити всі змінні в залежності від їх типу:

1. Вхідні дані (Inputs): всі числові дані з умови задачі;
2. Змінні (Changing cells): кількості рамок кожного типу;
3. Цілова змінна (Target, objective cell): прибуток, як функція від вхідних даних та змінних;

Також важливим елементом запису задачі в Excel є формулювання обмежень.

# ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

The screenshot displays a Microsoft Excel spreadsheet titled "ProductMix" with the following data and structure:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Product mix model</b>										
2											
3	<b>Input data</b>										
4	Hourly wage rate	\$8.00									
5	Cost per oz of metal	\$0.50									
6	Cost per oz of glass	\$0.75									
7											
8	Frame type	1	2	3	4						
9	Labor hours per frame	2	1	3	2						
10	Metal (oz.) per frame	4	2	1	2						
11	Glass (oz.) per frame	6	2	1	2						
12	Unit selling price	\$28.50	\$12.50	\$28.25	\$21.50						
13											
14	<b>Production plan</b>										
15	Frame type	1	2	3	4						
16	Frames produced	1000	800	400	0						
17		<=	<=	<=	<=						
18	Maximum sales	1000	2000	500	1000						
19											
20	<b>Resource constraints</b>										
21	Labor hours	Used	<=	Available							
22	Metal (oz.)	4000	<=	4000							
23	Glass (oz.)	6000	<=	6000							
24		8000	<=	10000							

**Range names used:**  
Produced - B16:E16  
MaxSales - B18:E18  
Used - B21:B23  
Available - D21:D23  
TotProfit - F32

The spreadsheet also shows a taskbar at the bottom with the following applications: start, Chpt03, Seminar\_2\_30.09, Microsoft PowerPoin..., Новини УНІАН - Міс..., UK, Уже витрачено 195..., vleshchuk -- Instant ..., iPhone поставит 20..., ProductMix, and system tray icons for network, volume, and date (12:13, четвер, 14.08.2008).

# ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Далі нам потрібно записати саму модель для визначення прибутку на основі вхідних даних, змінних та існуючих обмеженнях.

Microsoft Excel - ProductMix

File Edit View Insert Format Tools Data Window Help

Arial 10 B I U

131 =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	<b>Product mix model</b>														
2															
3	<b>Input data</b>														
4	Hourly wage rate	\$8.00													
5	Cost per oz of metal	\$0.50													
6	Cost per oz of glass	\$0.75													
7															
8	Frame type	1	2	3	4										
9	Labor hours per frame	2	1	3	2										
10	Metal (oz.) per frame	4	2	1	2										
11	Glass (oz.) per frame	6	2	1	2										
12	Unit selling price	\$28.50	\$12.50	\$29.25	\$21.50										
13															
14	<b>Production plan</b>														
15	Frame type	1	2	3	4										
16	Frames produced	1000	800	400	0										
17		<=	<=	<=	<=										
18	Maximum sales	1000	2000	500	1000										
19															
20	<b>Resource constraints</b>	Used		Available											
21	Labor hours	4000	<=	4000											
22	Metal (oz.)	6000	<=	6000											
23	Glass (oz.)	8000	<=	10000											
24															
25	<b>Revenue, cost summary</b>														
26	Frame type	1	2	3	4	Totals									
27	Revenue	\$28 500	\$10 000	\$11 700	\$0	\$50 200									
28	Costs of inputs														
29	Labor	\$16 000	\$6 400	\$9 600	\$0	\$32 000									
30	Metal	\$2 000	\$800	\$200	\$0	\$3 000									
31	Glass	\$4 500	\$1 200	\$300	\$0	\$6 000									
32	Profit	\$6 000	\$1 600	\$1 600	\$0	\$9 200									

Range names used:  
Produced - B16:E16  
MaxSales - B18:E18  
Used - B21:B23  
Available - D21:D23  
TotProfit - F32

Model / Sensitivity1 / Sensitivity2 / Sensitivity3 / Rescaled /

Ready NUM

start Chpt03 Seminar\_2\_30.09 Microsoft PowerPoin... Inbox - Yahoo! Mail - ... 12:23 Четвер 14.08.2008

Уже витрачено 195... vleshchuk -- Instant ... iPhone поставит 20... ProductMix



# ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Для знаходження максимального прибутку та відповідних змінних кількостей рамок використаємо функцію **Принятие решений (Solver)**

The screenshot displays a Microsoft Excel spreadsheet titled "ProductMix" with the Solver Parameters dialog box open. The spreadsheet is organized into several sections: "Input data", "Production plan", "Resource constraints", and "Revenue, cost summary".

**Input data:**

Hourly wage rate	\$8.00			
Cost per oz of metal	\$0.50			
Cost per oz of glass	\$0.75			

**Production plan:**

Frame type	1	2	3	4
Labor hours per frame	2	1	3	2
Metal (oz) per frame	4	2	1	2
Glass (oz) per frame	6	2	1	2
Unit selling price	\$28.50	\$12.50	\$29.25	\$21.50

**Production plan (Current Values):**

Frame type	1	2	3	4
Frames produced	1000	800	400	0

**Resource constraints:**

	Used		Available
Labor hours	4000	<=	4000
Metal (oz.)	6000	<=	6000
Glass (oz.)	8000	<=	10000

**Revenue, cost summary:**

Revenue	\$28 500	\$10 000	\$11 700	\$0	\$50 200
Costs of inputs					
Labor	\$16 000	\$6 400	\$9 600	\$0	\$32 000
Metal	\$2 000	\$800	\$200	\$0	\$3 000
Glass	\$4 500	\$1 200	\$300	\$0	\$6 000
Profit	\$6 000	\$1 600	\$1 600	\$0	\$9 200

**Solver Parameters Dialog Box:**

- Set Target Cell: TotProfit
- Equal To: Max
- By Changing Cells: Produced
- Subject to the Constraints: Produced <= MaxSales, Used <= Available

# ЛП: приклад вибору оптимального набору товарів (product mix problem)

Знаходження оптимального набору товарів та відповідного прибутку не завершує, а лише починає аналіз. Далі можна робити всеможливі аналізи чутливості ставлячи різні варіанти змін у вхідні дані. Наприклад, як зміниться оптимальний набір товарів, якщо збільшити ціну рамки 4 з \$21.50 до \$26.50. Зрозуміло, що прибуток збільшиться, але на скільки? Зробивши відповідну заміну в вхідних даних та викликавши функцію Solver знов отримуємо, що максимальний прибуток зростає з \$9200 до \$14000.

Дякуючи додатку Solver Table ми можемо автоматизувати зміну вхідних даних. Викликавши функцію **Data -> Solver Table** ми можемо автоматизувати зміну одного або двох вхідних параметрів одночасно.

Припустимо, ми хочемо подивитись як змінюється максимальний прибуток та відповідний набір товарів при зміні наявної робочої сили з 2500 до 5000 годин (з кроком 250 год.). Як це зробити?



# ЛП: мережні моделі

Багато оптимізаційних задач можуть бути зображеня у вигляді мереж (графів). У бізнесі такі задачі зазвичай трапляються у логістиці, як от транспортна задача чи оптимізація виконання проектів.

Простим прикладом **транспортної** задачі є задача компанії, що має декілька центрів виробництва та декілька центрів споживання товару. Кожен центр характеризується певним максимальним обсягом виробництва чи споживання товару. Задача компанії полягає в мінімізації коштів на транспортування товару з центрів виробництва в центри споживання товару.

# ЛП: мережні моделі – оптимізація виконання проектів

*Мережеві моделі можна використати для оптимізації таймінгу комплексних проектів, що складаються з багатьох етапів. Якщо відомий точний час для виконання кожного етапу, то ЛП дозволяє визначити час необхідний для виконання проекту. Якщо ж невідомий час виконання певних етапів, то можна оцінити ймовірність виконання проекту за певний час.*

*Прикладами можуть слугувати:*

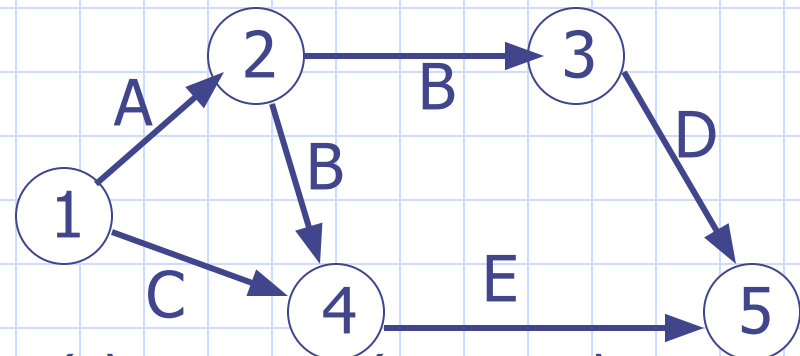
- *будівельні проекти;*
- *організація масових заходів;*
- *дизайн та маркетинг нового продукту;*
- *організація злиття компаній;*
- *...*

# ЛП: мережні моделі – оптимізація виконання проектів

У випадку оптимізації проекту використовується так звана модель критичного шляху (*critical path model – CPM*). Для її застосування потрібно знати етапи проекту та їх послідовність. Проект вважається виконаним, якщо пройдені всі етапи (у відповідній послідовності).

Ми можемо зобразити проект за допомогою графу, тобто за допомогою комбінації вузлів та дуг. Наприклад, проект

можна зобразити так



**Критичним(и) шляхом (етапом)** назвемо ті етапи, що впливають на тривалість проекту.

Етап	Необхідний попередній етап
A	Нема
B	A
C	Нема
D	B
E	B, C