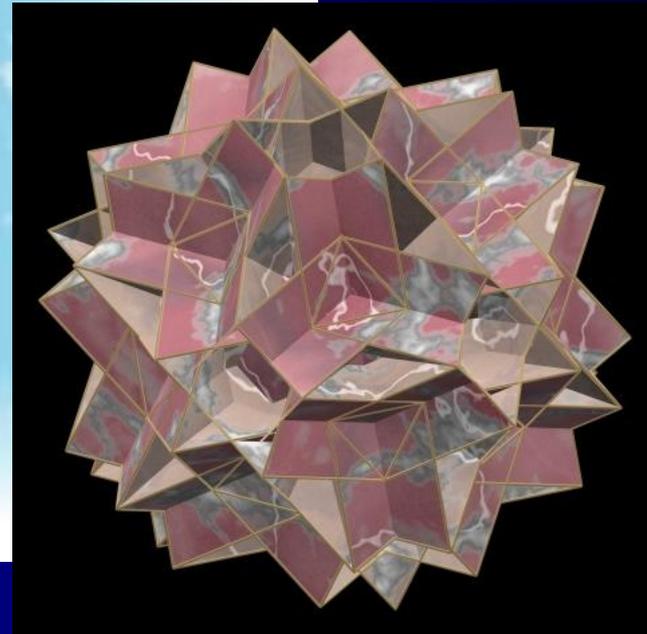
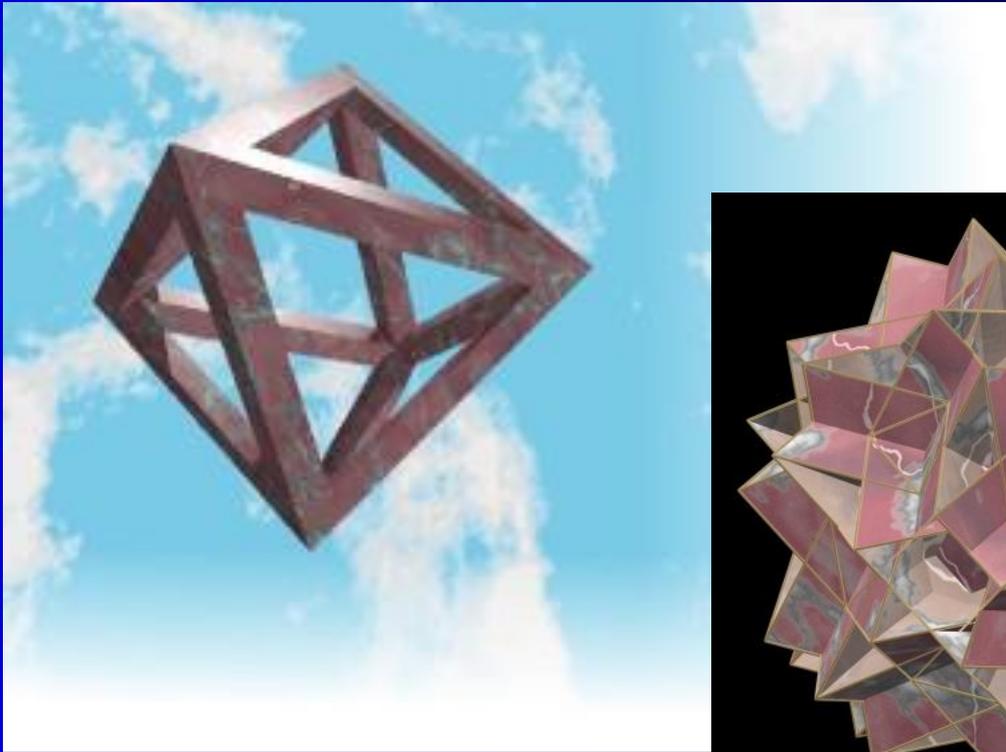


Lessing

Мир многогранников



Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой - красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства.

Бертран Рассел





Многогранники



Однородные
выпуклые



Однородные
невыпуклые

Тела
Платона

Тела
Архимеда

Выпуклые
призмы и
антипризмы

Невыпуклые
полуправильные
однородные
многогранники

Тела
Кеплер
а-
Пуансо

Невыпуклые
призмы и
антипризмы



Правильными многогранниками

называют выпуклые многогранники, все грани и все углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники.

В каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер.

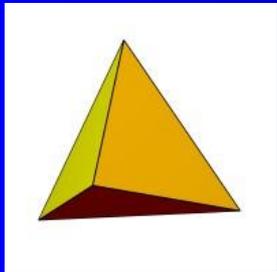
Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многоугольника равны.



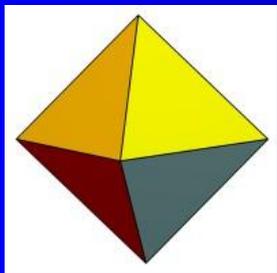
Правильные многогранники - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников.

Правильные многогранники

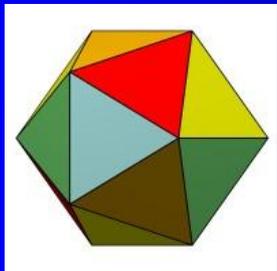
Сколько же их существует?

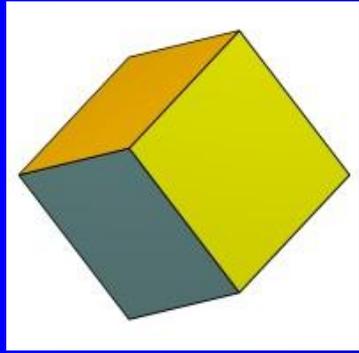


Рассмотрим развертку вершины многогранника. Каждая вершина может принадлежать трем и более граням.

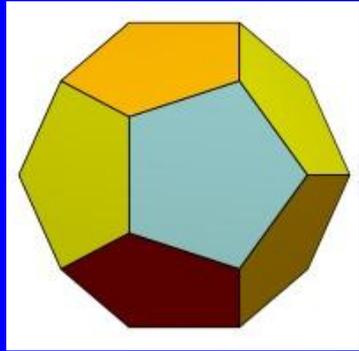


Сначала рассмотрим случай, когда грани многогранника - равносторонние треугольники. Поскольку внутренний угол равностороннего треугольника равен 60° , три таких угла дадут в развертке 180° . Если теперь склеить развертку в многогранный угол, получится тетраэдр - многогранник, в каждой вершине которого встречаются три правильные треугольные грани. Если добавить к развертке вершины еще один треугольник, в сумме получится 240° . Это развертка вершины октаэдра. Добавление пятого треугольника даст угол 300° - мы получаем развертку вершины икосаэдра. Если же добавить еще один, шестой треугольник, сумма углов станет равной 360° - эта развертка, очевидно, не может соответствовать ни одному выпуклому многограннику.





Теперь перейдем к квадратным граням. Развертка из трех квадратных граней имеет угол $3 \times 90^\circ = 270^\circ$ - получается вершина **куба**, который также называют **гексаэдром**. Добавление еще одного квадрата увеличит угол до 360° - этой развертке уже не соответствует никакой выпуклый многогранник.



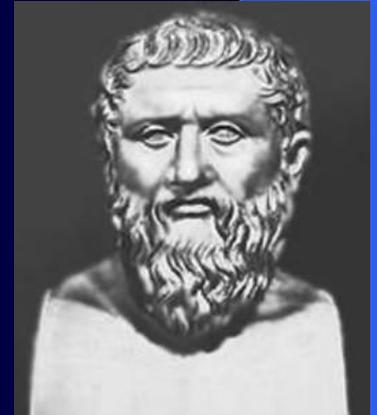
Три пятиугольные грани дают угол развертки $3 \times 108^\circ = 324^\circ$ - вершина **додекаэдра**. Если добавить еще один пятиугольник, получим больше 360° - поэтому останавливаемся.

Для шестиугольников уже три грани дают угол развертки $3 \times 120^\circ = 360^\circ$, поэтому правильного выпуклого многогранника с шестиугольными гранями не существует. Если же грань имеет еще больше углов, то развертка будет иметь еще больший угол. Значит, правильных выпуклых многогранников с гранями, имеющими шесть и более углов, не существует.

Сделаем вывод:

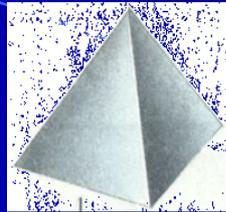
Мы убедились, что существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями.

Эти тела еще называют телами Платона.





огонь



тетраэдр



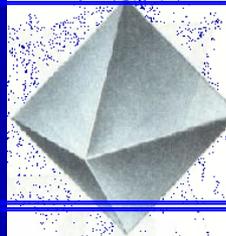
вода



икосаэдр



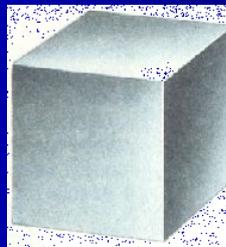
воздух



октаэдр



земля



гексаэдр



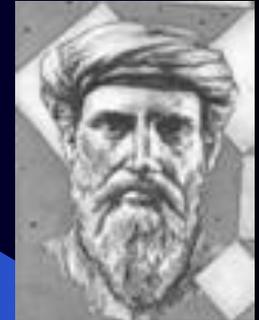
вселенная



додекаэдр

Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход практической к философской геометрии. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получить новые геометрические свойства

Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора



Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник.

Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов. Существование только пяти правильных многогранников относили к строению материи и Вселенной. Пифагорейцы, а затем Платон полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды.

Согласно их мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных Платоновых тел.

Теорема Эйлера. Пусть V --- число вершин выпуклого многогранника, P --- число его рёбер и G --- число граней. Тогда верно равенство $V-P+G=2$

Многогранник	Число рёбер при вершине	Число рёбер одной грани	Число граней	Число рёбер	Число вершин
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Гексаэдр (куб)	3	4	6	12	8
Октаэдр	4	3	8	12	6
Додекаэдр	3	5	12	30	20
Икосаэдр	5	3	20	30	12

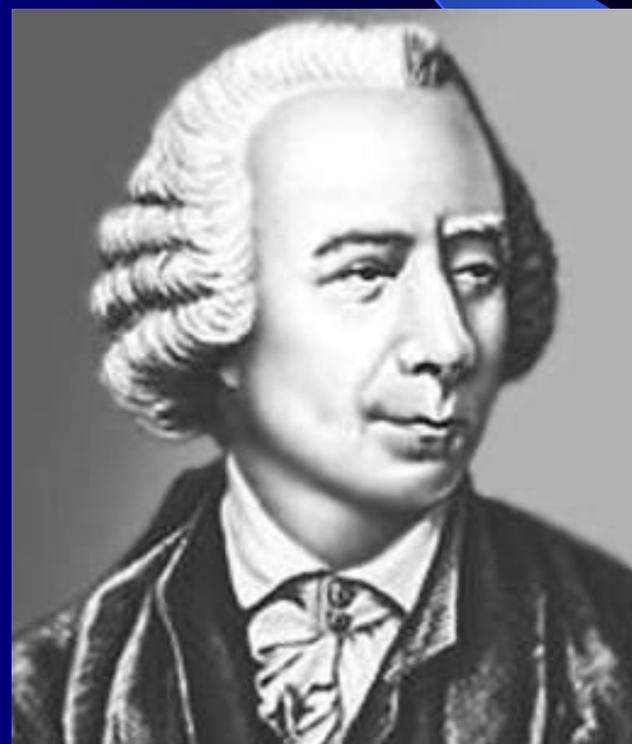


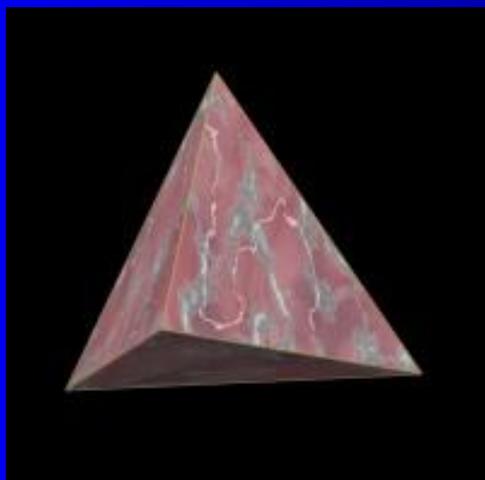
Число $=V-P+G$ называется **эйлеровой характеристикой** многогранника. Согласно теореме Эйлера, для выпуклого многогранника эта характеристика равна 2. То, что эйлерова характеристика равна 2 для некоторых знакомых нам многогранников, видно из таблицы.

Теорема Эйлера

*Число вершин минус число рёбер
плюс число граней равно двум.*

$$V - P + \Gamma = 2$$





Тетраэдр



Октаэдр



Гексаэдр



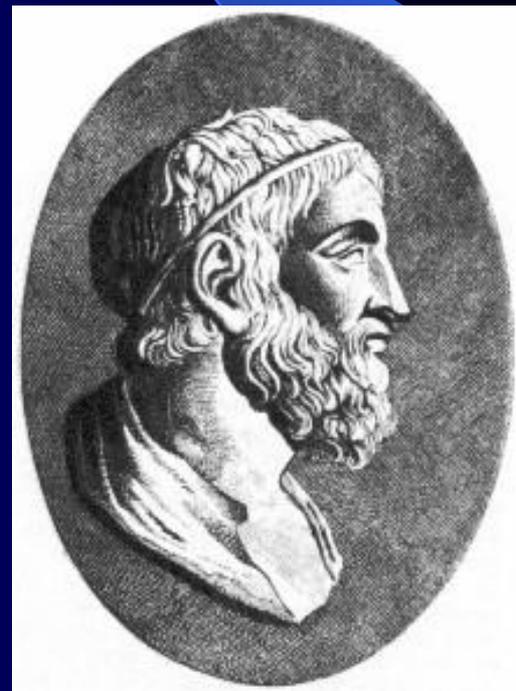
Икосаэдр



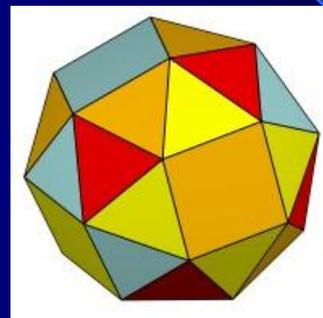
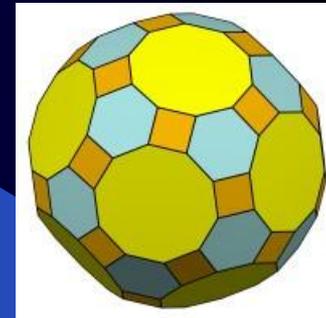
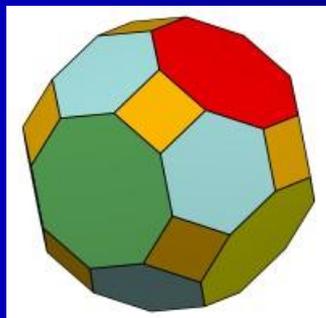
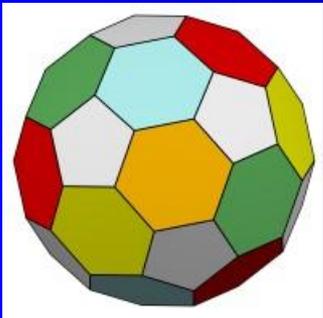
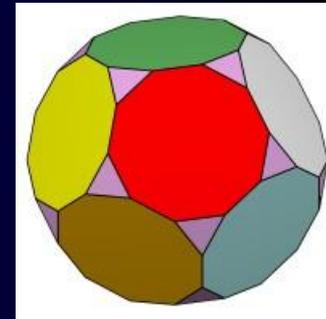
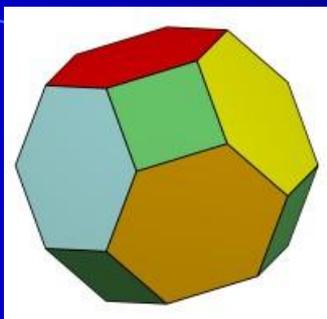
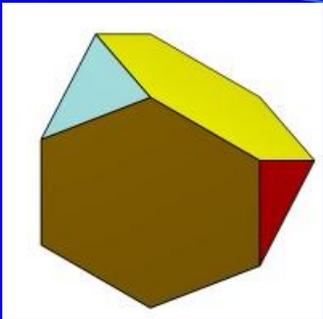
Додекаэдр

Тела Архимеда

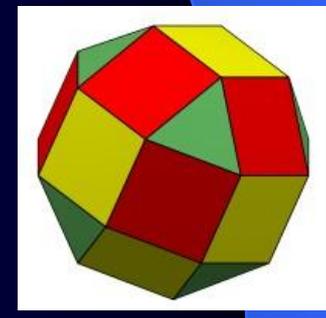
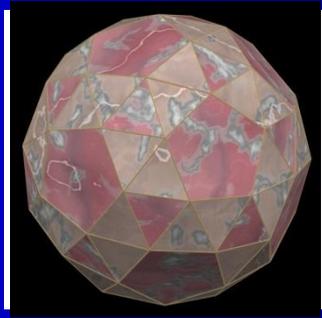
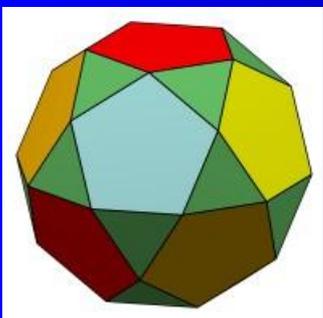
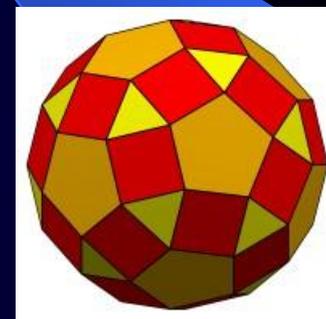
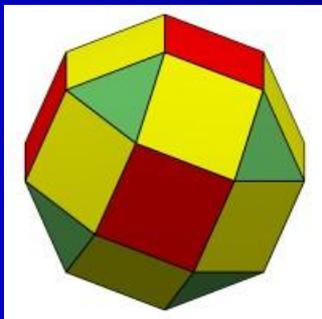
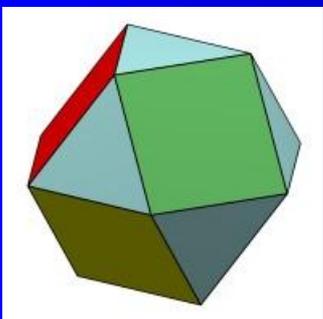
Архимедовыми телами называются полуправильные однородные выпуклые многогранники, то есть выпуклые многогранники, все многогранные углы которых равны, а грани - правильные многоугольники нескольких типов.



*Тела
Архимеда*



*Тело
Аикинузе*





Тела

Кеплера - Пуансо

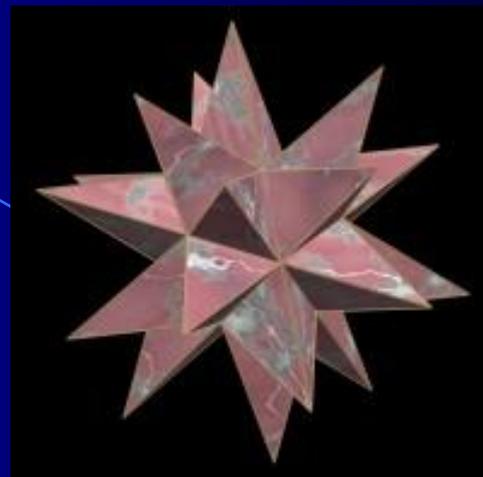
Среди невыпуклых однородных многогранников Среди невыпуклых однородных многогранников существуют аналоги платоновых тел - четыре *правильных невыпуклых однородных многогранника* или *тела Кеплера - Пуансо*. Как следует из их названия, тела Кеплера-Пуансо - это невыпуклые однородные многогранники, все грани которых - одинаковые правильные многоугольники, и все многогранные углы которых равны. Грани при этом могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми.





Малый звездчатый

додекаэдр

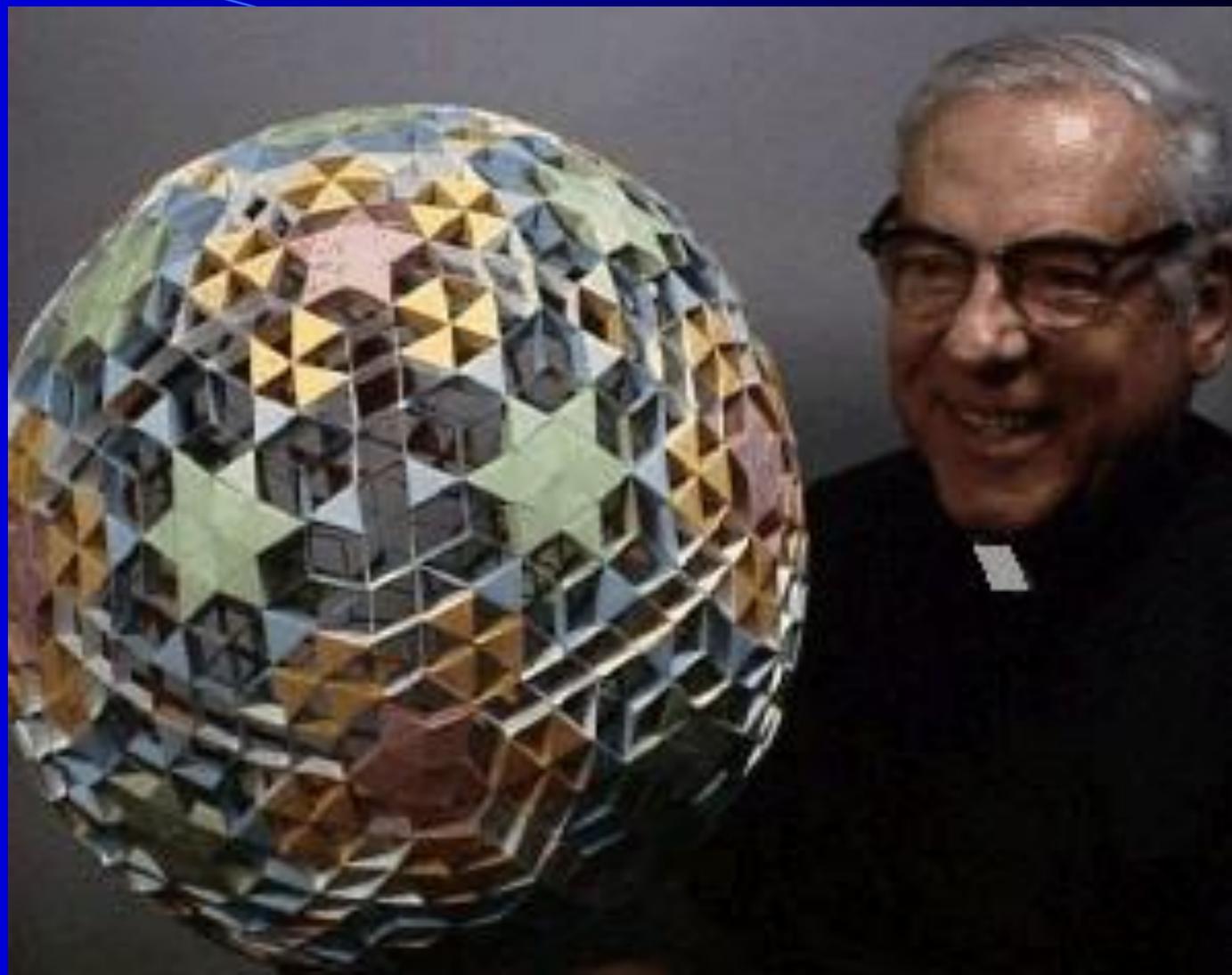


Большой звездчатый

додекаэдр



Большой икосаэдр



Магнус Веннинджер (1919г.р.)

Многогранники в искусстве



В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи (1452 -1519) например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал правильными и полуправильными многогранниками книгу Монаха Луки Пачоли "О божественной пропорции."

Знаменитый художник, увлекавшийся геометрией Альбрехт Дюрер (1471-1528), в известной гравюре "Меланхолия I" на переднем плане изобразил додекаэдр.

художник Эшер

Наука геометрия возникла из практических задач, ее предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счете в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется всюду, где нужна хотя бы малейшая точность в определении формы и размеров. И технику, и инженеру, и квалифицированному рабочему и людям искусства геометрическое воображение необходимо, как геометру или архитектору. Математика, в частности геометрия, представляет собой могущественный инструмент познания природы, создания техники и преобразования мира.

Различные геометрические формы находят свое отражение практически во всех отраслях знаний: архитектура, искусство.

Многогранники в архитектуре



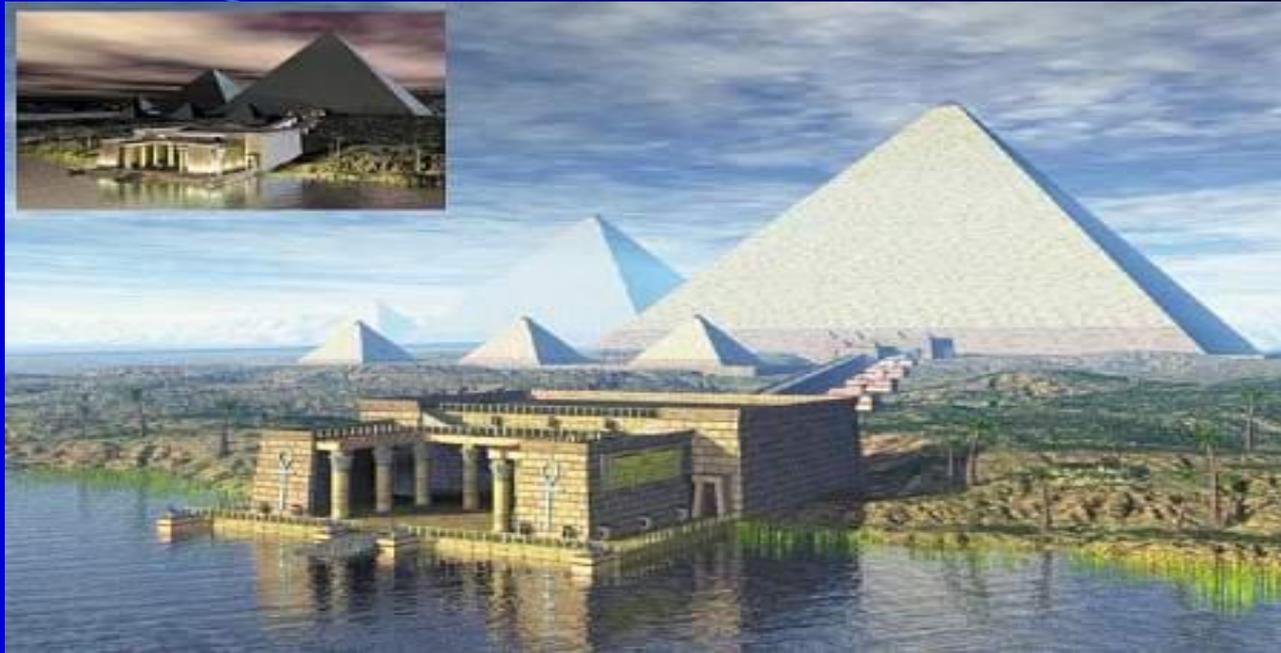
Во всем облике японского строения очевидна идея преобразования пространства, подчинения его новой логике - логике "завоевания" природного ландшафта, которому противопоставлена четкая геометрия проникающих архитектурных форм.



ЦАРСКАЯ ГРОБНИЦА

Великая пирамида была построена как гробница Хуфу, известного грекам как Хеопс. Он был одним из фараонов, или царей древнего Египта, а его гробница была завершена в 2580 году до н.э. Позднее в Гизе было построено еще две пирамиды, для сына и внука Хуфу, а также меньшие по размерам пирамиды для их царьц. Пирамида Хуфу, самая дальняя на рисунке, является самой большой. Пирамида его сына находится в середине и смотрится выше, потому что стоит на более высоком месте.

Великая пирамида в Гизе. Эта грандиозная Египетская пирамида является древнейшим из Семи чудес древности. Кроме того, это единственное из чудес, сохранившееся до наших дней. Во времена своего создания Великая пирамида была самым высоким сооружением в мире. И удерживала она этот рекорд, по всей видимости, почти 4000 лет.



СТРОИТЕЛЬСТВО ПИРАМИД

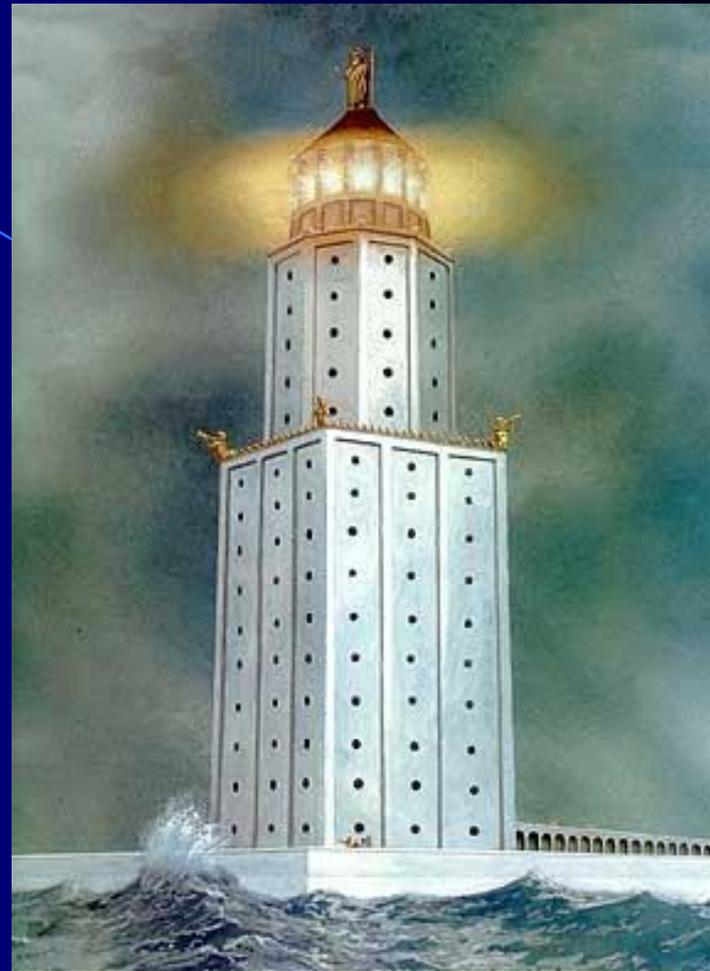
Пирамиды стоят на древнем кладбище в Гизе, на противоположном от Каира, столицы современного Египта, берегу реки Нил. Некоторые археологи считают, что, возможно, на строительство Великой пирамиды 100 000 человек потребовалось 20 лет. Она была создана из более чем 2 миллионов каменных блоков, каждый из которых весил не менее 2,5 тонн. Рабочие подтаскивали их к месту, используя пандусы, блоки и рычаги, а затем подгоняли друг к другу, без раствора.

ОСТРОВ И МАЯК

Маяк был построен на маленьком острове Фарос в Средиземном море, около берегов Александрии. Этот оживленный порт основал Александр Великий во время посещения Египта. Сооружение назвали по имени острова. На его строительство, должно быть, ушло 20 лет, а завершен он был около 280 г. до н.э., во времена правления Птолемея II, царя Египта.

ТРИ БАШНИ

Фаросский маяк состоял из трех мраморных башен, стоявших на основании из массивных каменных блоков. Первая башня была прямоугольной, в ней находились комнаты, в которых жили рабочие и солдаты. Над этой башней располагалась меньшая, восьмиугольная башня со спиральным пандусом, ведущим в верхнюю башню.



Александрийский маяк.



В III веке до н.э. был построен маяк, чтобы корабли могли благополучно миновать рифы на пути в Александрийскую бухту. Ночью им помогало в этом отражение языков пламени, а днем - столб дыма. Это был первый в мире маяк, и простоял он 1500 лет.

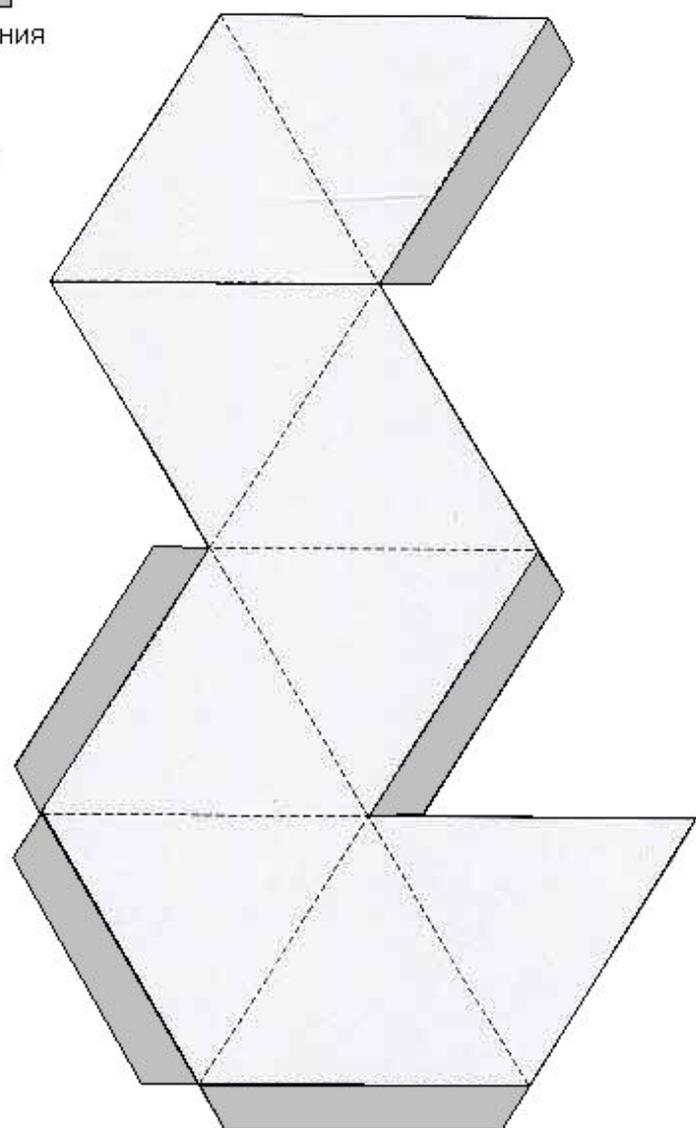


Развёртки некоторых многогранников

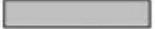
- ❖ *Правильные многогранники (тела Платона)*
- ❖ *Тела Архимеда*
- ❖ *Тела Кеплера-Пуансо*
- ❖ *Невыпуклые полуправильные многогранники*

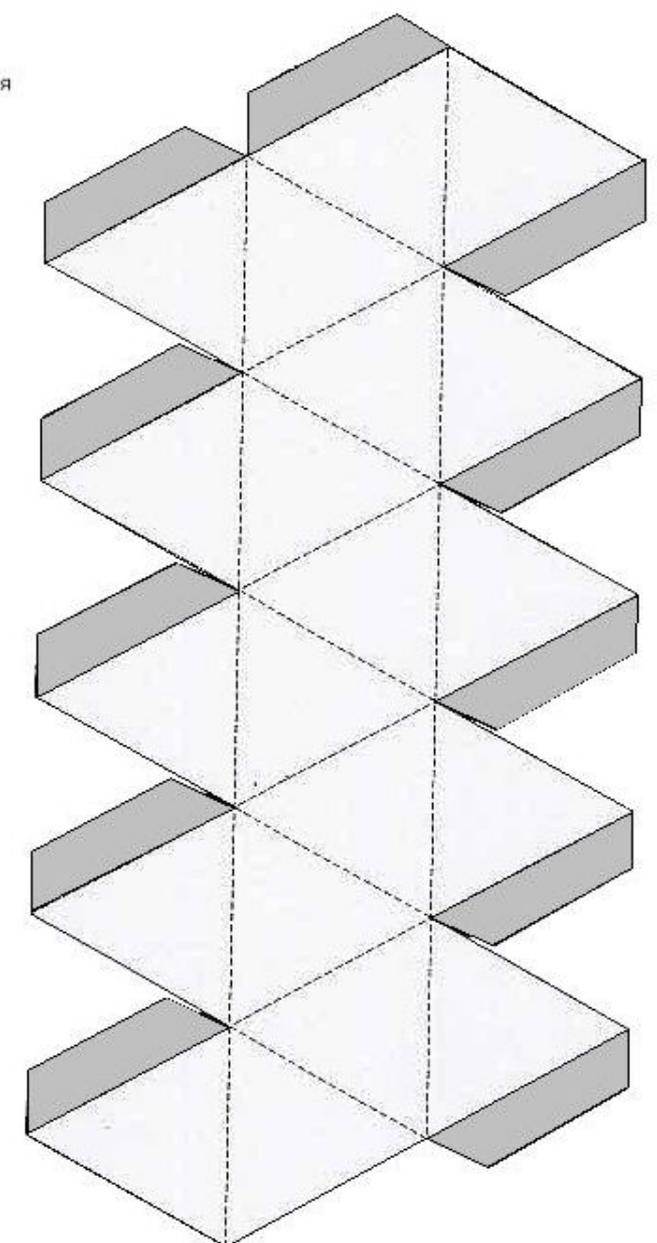
Выкройка октаэдра

-  места склеивания
-  линии сгиба
-  линия надреза



Выкройка икосаэдра

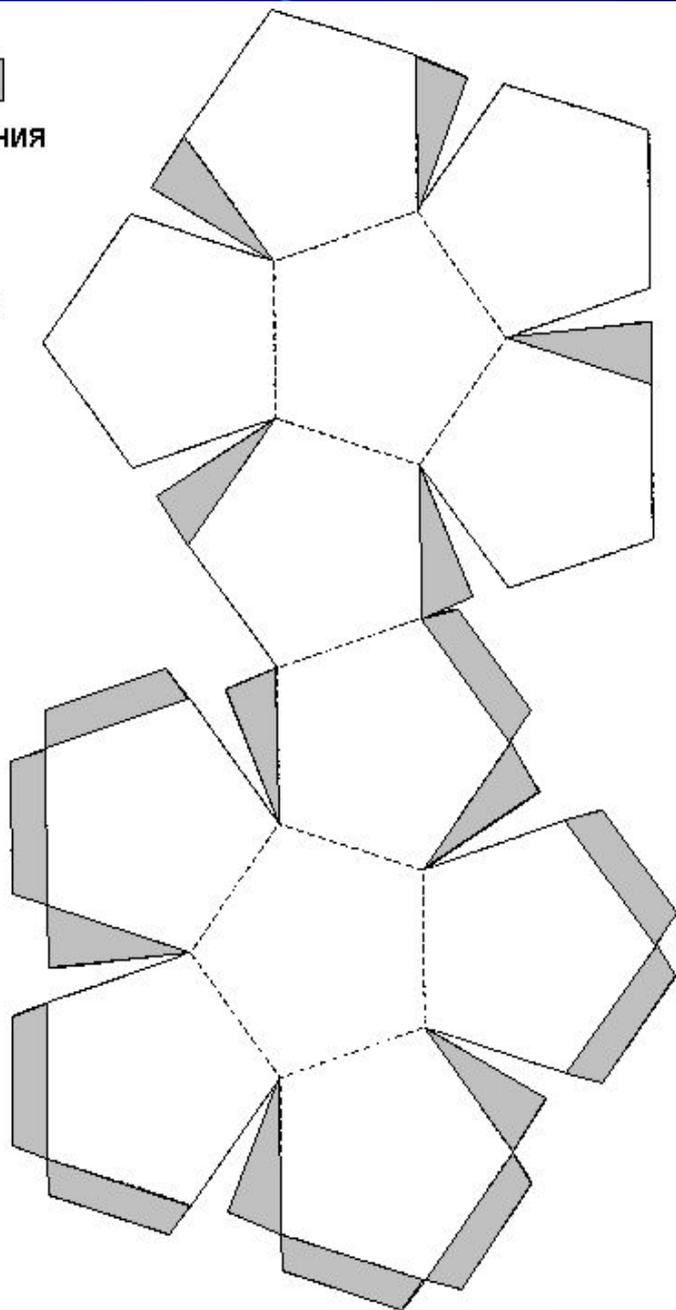
-  места склеивания
-  линии сгиба
-  линия надреза




места склеивания

линия сгиба

линия надреза

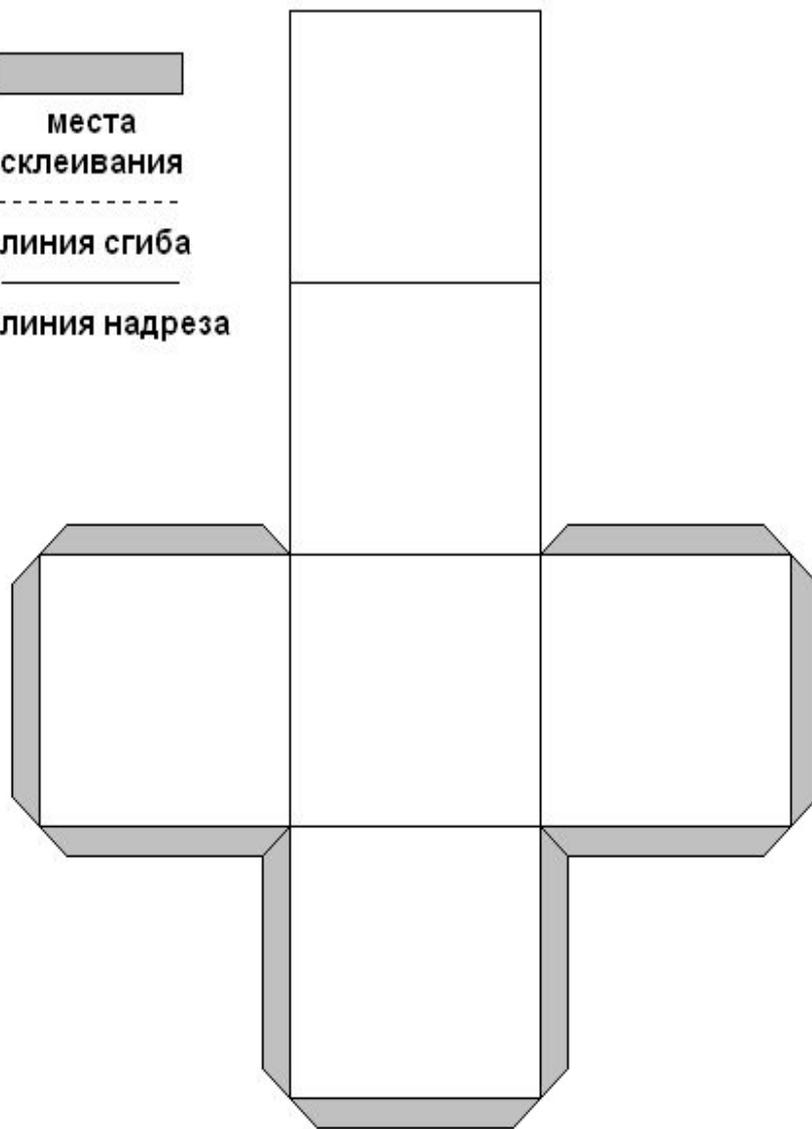


Выкройка гексаэдра (куба)

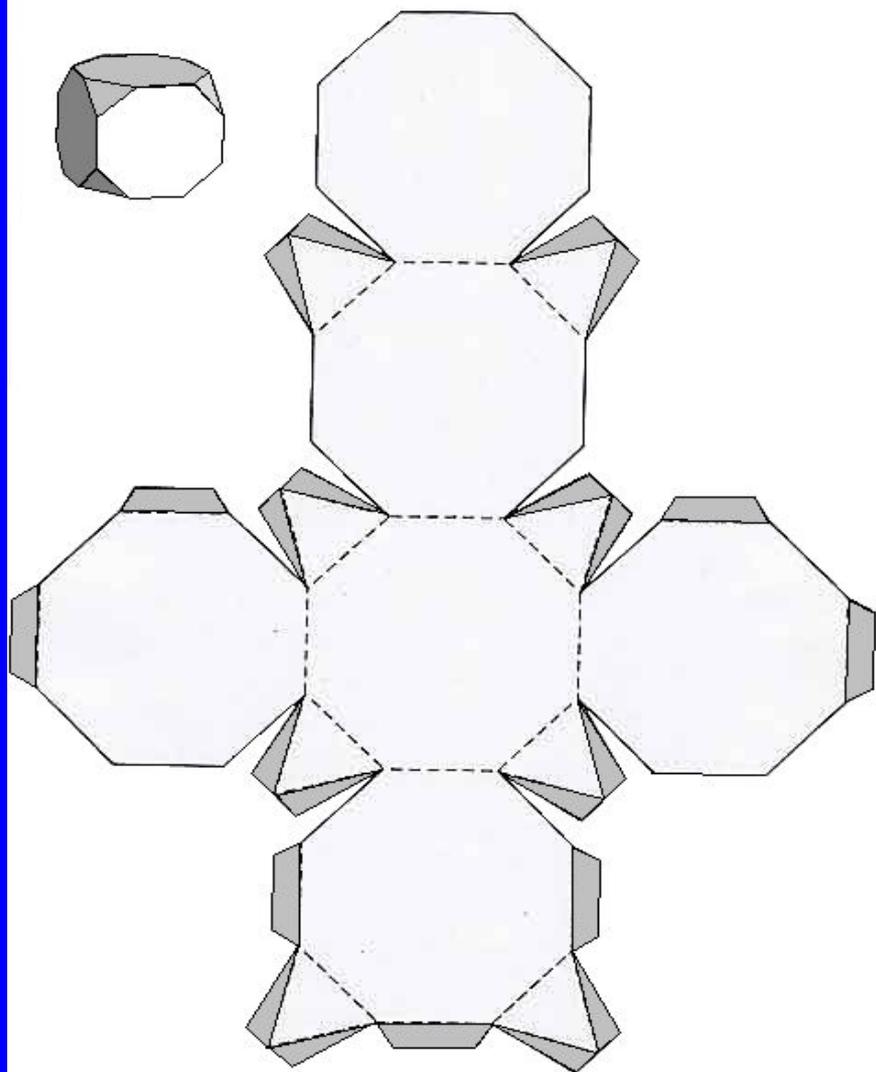

места склеивания

линия сгиба

линия надреза



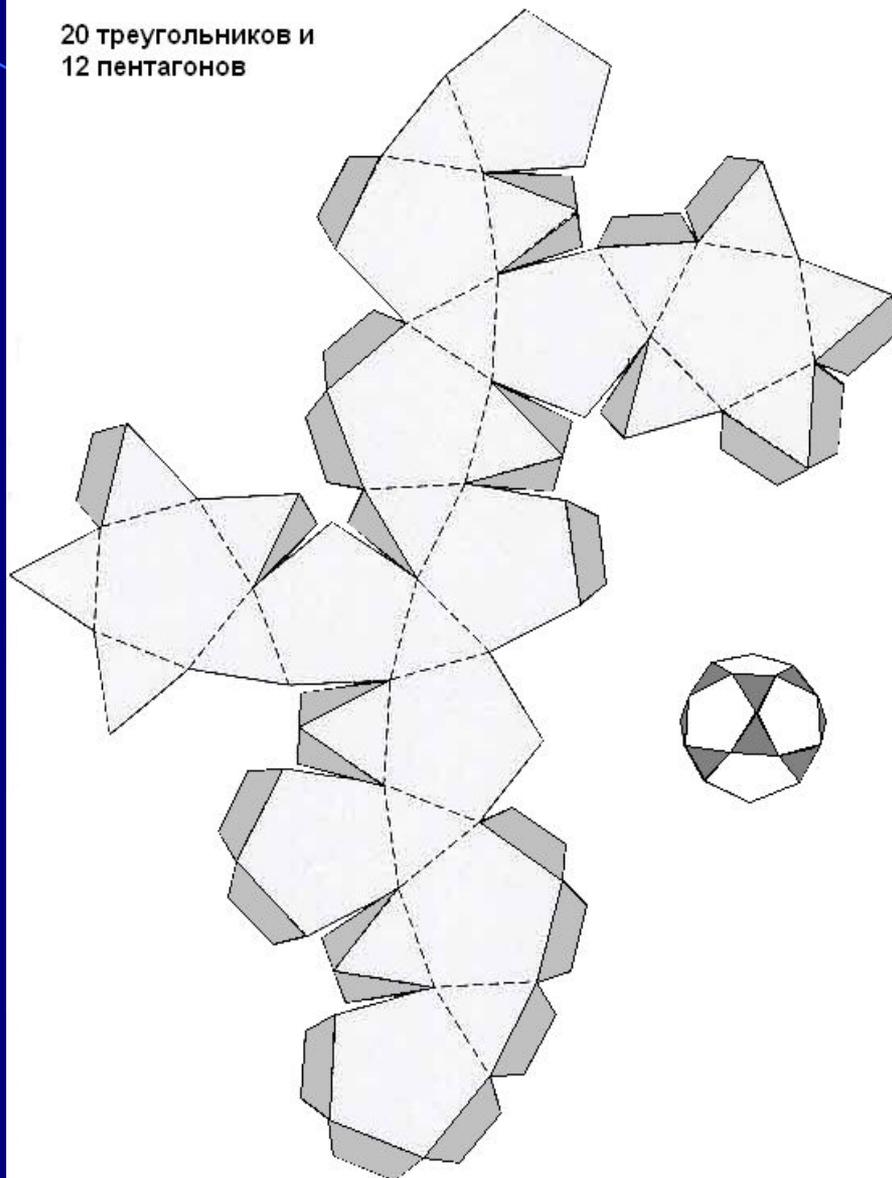
Усечённый куб



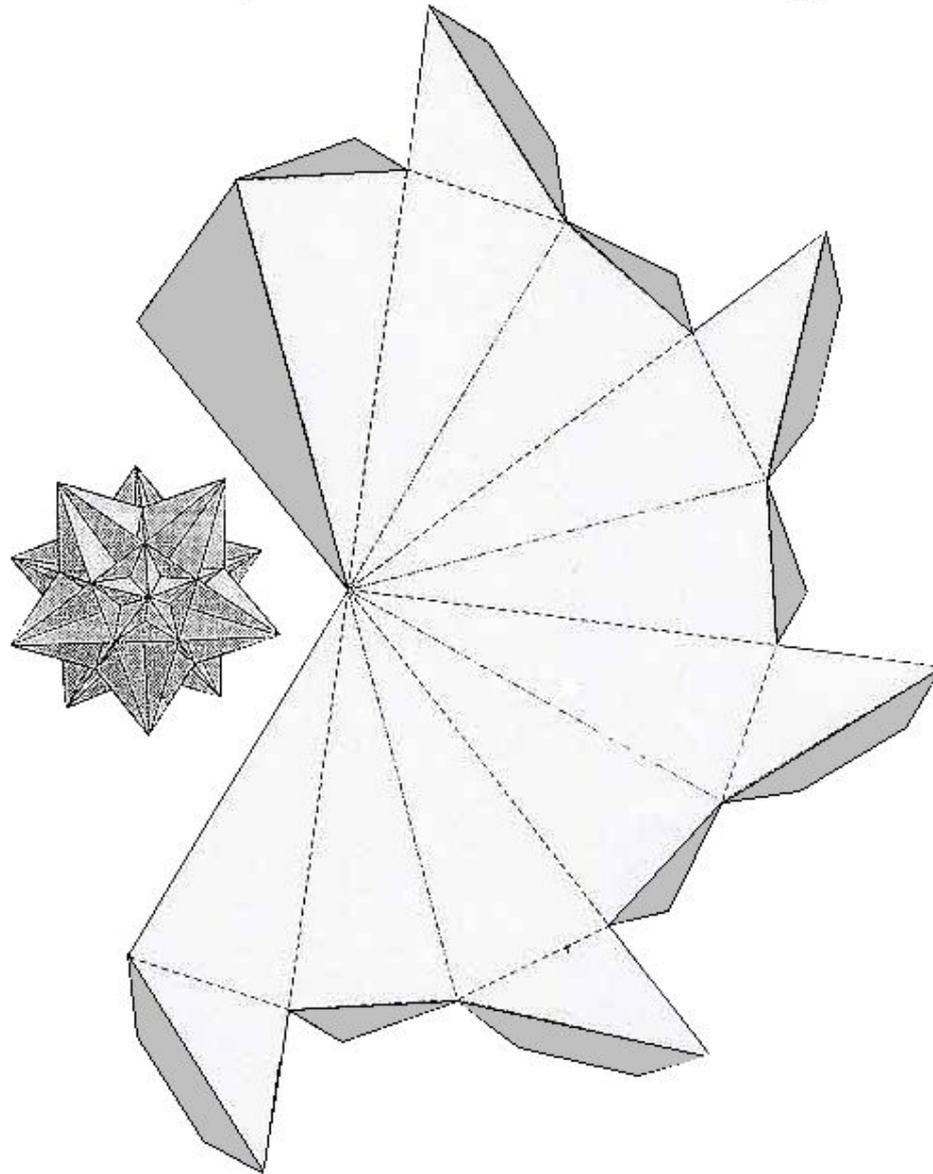
8 треугольников
6 восьмиугольников

Икосододекаэд

20 треугольников и
12 пентагонов

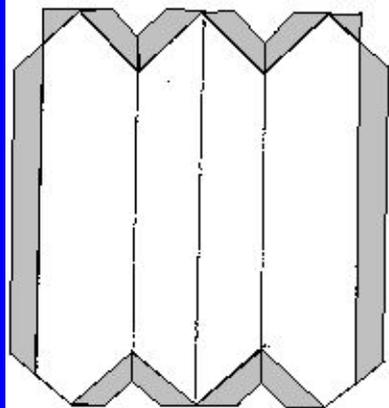


Выкройка большого икосаэдра

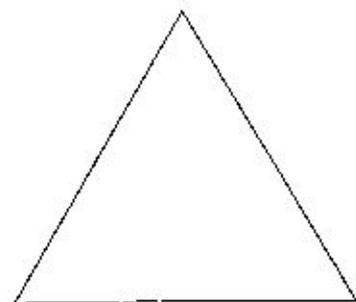


Для изготовления многогранника надо 12 таких звёзд, склейка которых осуществляется по общей склейки додекаэдра.

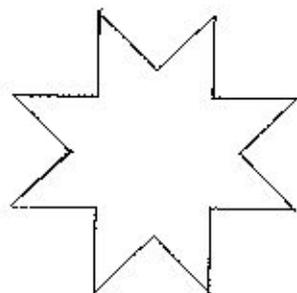
Кубооктоусечённый кубоктаэдр



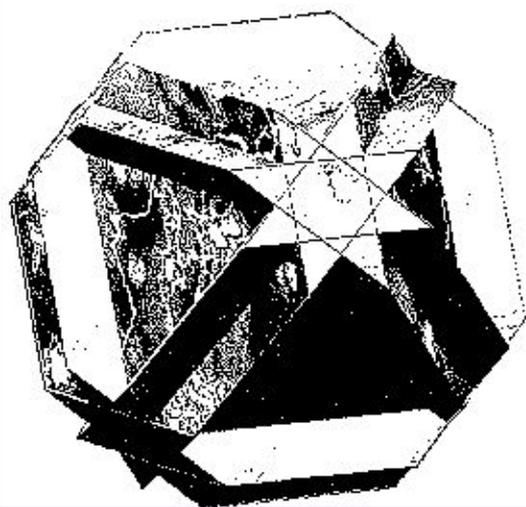
12 деталей



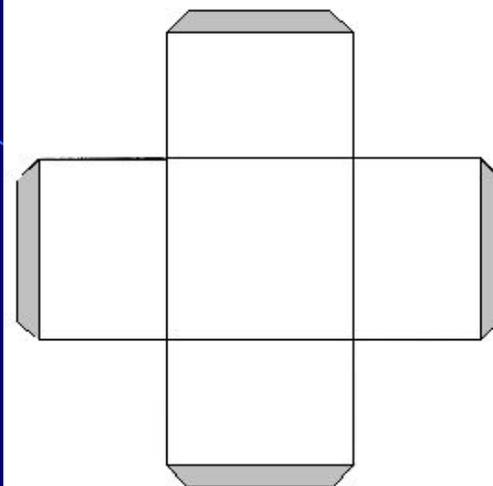
8 деталей



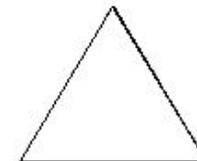
6 деталей



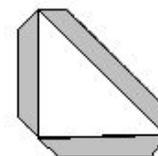
Малый кубокубоктаэдр



6 деталей



8 деталей



24 детали

