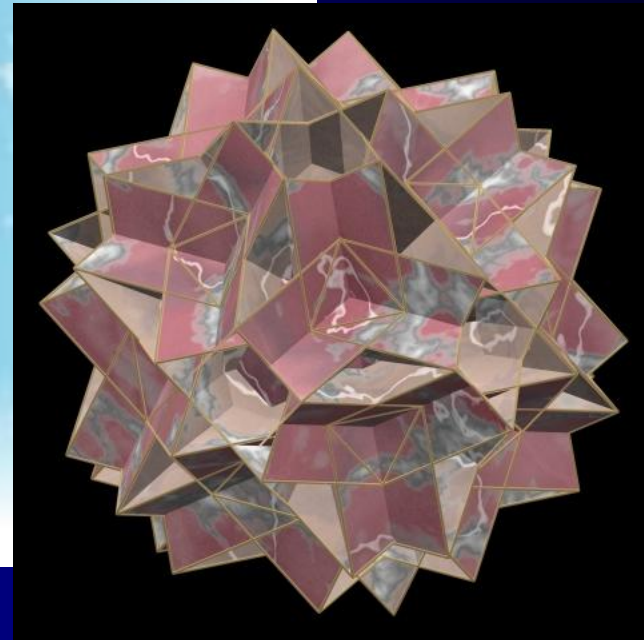
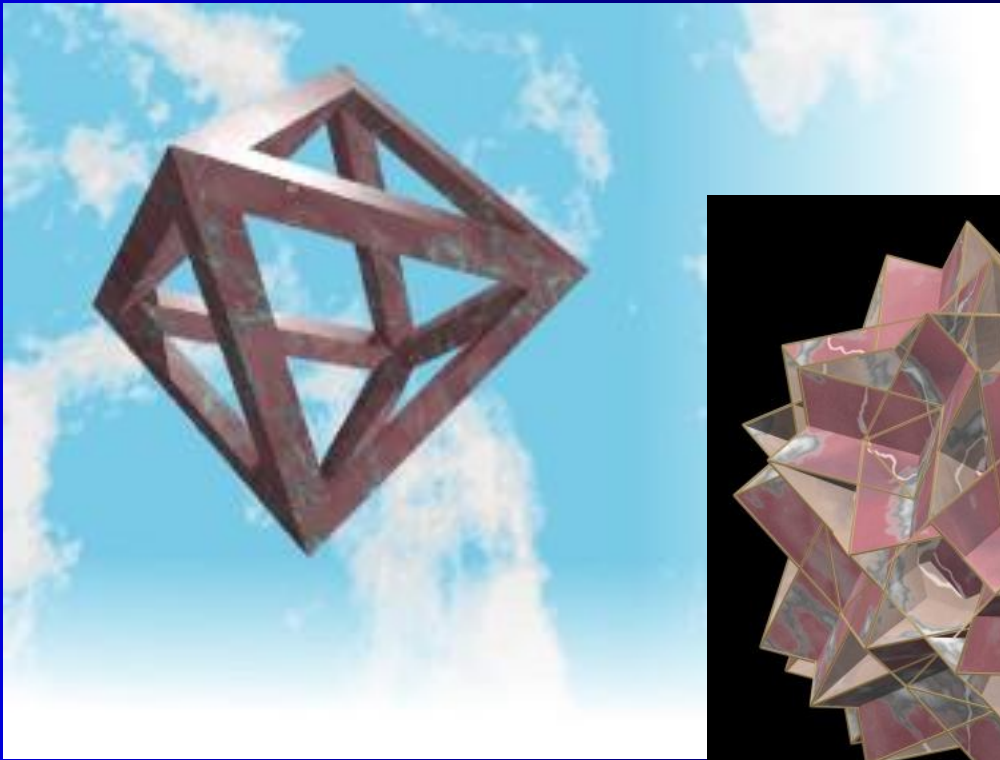


Lessing

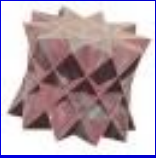
# ***Мир многогранников***



*Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой - красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства.*

*Бертран Рассел*

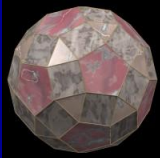




# Многогранники



Однородные  
выпуклые



Однородные  
невыпуклые

Тела  
Платона

Тела  
Архимеда

Выпуклые  
призмы и  
антипризмы

Невыпуклые  
полуправильные  
однородные  
многогранники

Тела  
Кеплер  
а-  
Пуансо

Невыпуклые  
призмы и  
антипризмы



## ***Правильными многогранниками***

*называют выпуклые многогранники, все грани и все углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники.*

*В каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер.*

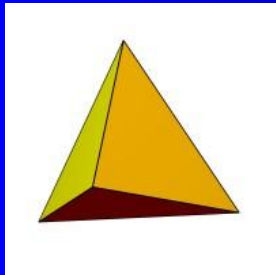
*Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многоугольника равны.*



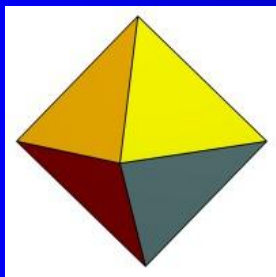
*Правильные многогранники - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников.*

# Правильные многогранники

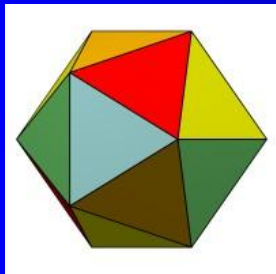
Сколько же их существует?



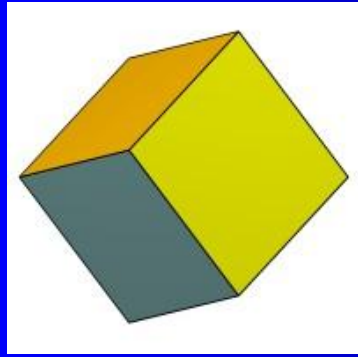
Рассмотрим развертку вершины многогранника. Каждая вершина может принадлежать трем и более граням.



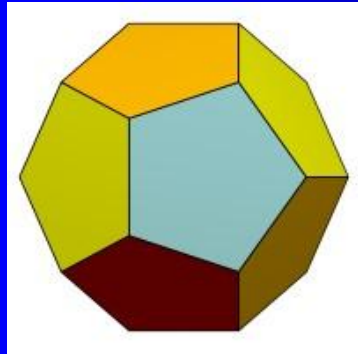
Сначала рассмотрим случай, когда грани многогранника - равносторонние треугольники. Поскольку внутренний угол равностороннего треугольника равен  $60^\circ$ , три таких угла дадут в развертке  $180^\circ$ . Если теперь склеить развертку в многогранный угол, получится тетраэдр - многогранник, в каждой вершине которого встречаются три правильные треугольные грани. Если добавить к развертке вершины еще один треугольник, в сумме получится  $240^\circ$ . Это развертка



вершины октаэдра. Добавление пятого треугольника даст угол  $300^\circ$  - мы получаем развертку вершины икосаэдра. Если же добавить еще один, шестой треугольник, сумма углов станет равной  $360^\circ$  - эта развертка, очевидно, не может соответствовать ни одному выпуклому многограннику.



Теперь перейдем к квадратным граням. Развертка из трех квадратных граней имеет угол  $3 \times 90^\circ = 270^\circ$  - получается вершина **куба**, который также называют **гексаэдром**. Добавление еще одного квадрата увеличит угол до  $360^\circ$  - этой развертке уже не соответствует никакой выпуклый многогранник.



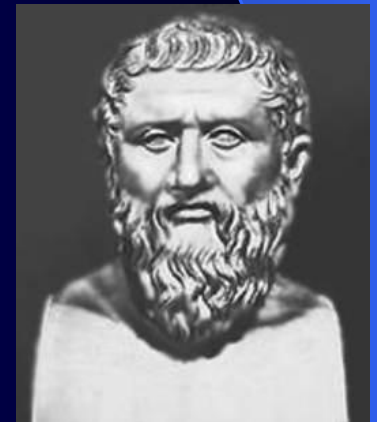
Три пятиугольные грани дают угол развертки  $3 \times 108^\circ = 324^\circ$  - вершина **додэкаэдра**. Если добавить еще один пятиугольник, получим больше  $360^\circ$  - поэтому останавливаемся.

Для шестиугольников уже три грани дают угол развертки  $3 \times 120^\circ = 360^\circ$ , поэтому правильного выпуклого многогранника с шестиугольными гранями не существует. Если же грань имеет еще больше углов, то развертка будет иметь еще больший угол. Значит, правильных выпуклых многогранников с гранями, имеющими шесть и более углов, не существует.

## *Сделаем вывод:*

*Мы убедились, что существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями.*

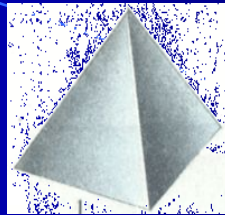
*Эти тела еще называют телами Платона.*







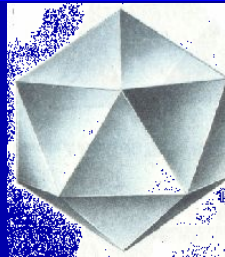
**огонь**



**тетраэдр**



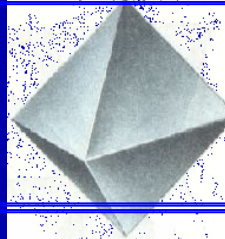
**вода**



**икосаэдр**



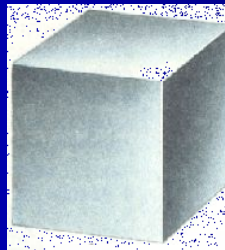
**воздух**



**октаэдр**



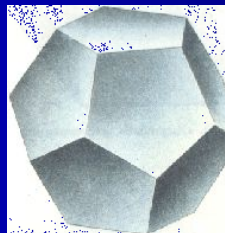
**земля**



**гексаэдр**



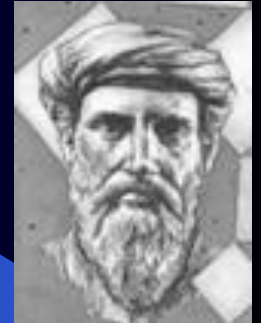
**вселенная**



**додекаэдр**

Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход практической к философской геометрии. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получить новые геометрические свойства

Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора



Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник.

Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов. Существование только пяти правильных многогранников относили к строению материи и Вселенной. Пифагорейцы, а затем Платон полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды.

Согласно их мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных Платоновых тел.

**Теорема Эйлера.** Пусть  $V$  --- число вершин выпуклого многогранника,  $P$  --- число его рёбер и  $G$  --- число граней. Тогда верно равенство  $V-P+G=2$

Многогранник	Число рёбер при вершине	Число рёбер одной грани	Число граней	Число рёбер	Число вершин
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Гексаэдр (куб)	3	4	6	12	8
Октаэдр	4	3	8	12	6
Додекаэдр	3	5	12	30	20
Икосаэдр	5	3	20	30	12

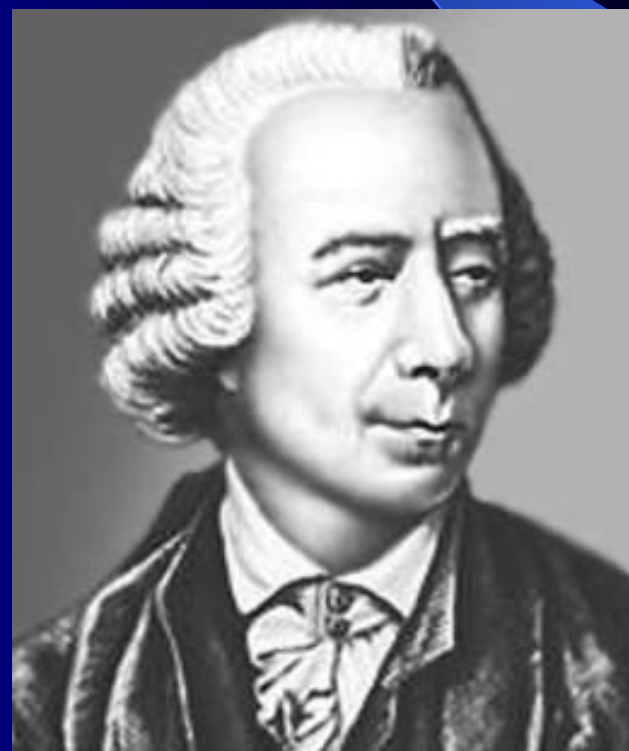


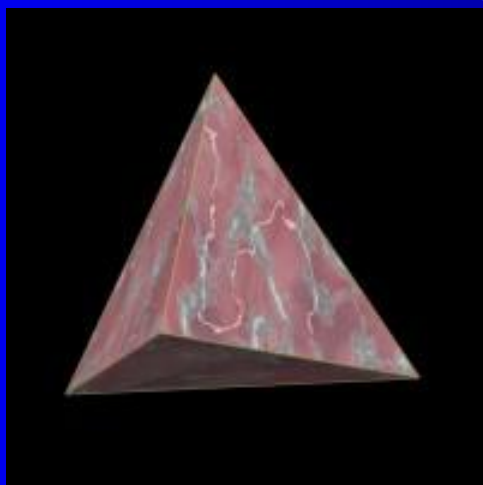
Число  $=V-P+G$  называется **эйлеровой характеристикой** многогранника. Согласно теореме Эйлера, для выпуклого многогранника эта характеристика равна 2. То, что эйлерова характеристика равна 2 для некоторых знакомых нам многогранников, видно из таблицы.

# Теорема Эйлера

*Число вершин минус число рёбер  
плюс число граней равно двум.*

$$V - P + \Gamma = 2$$

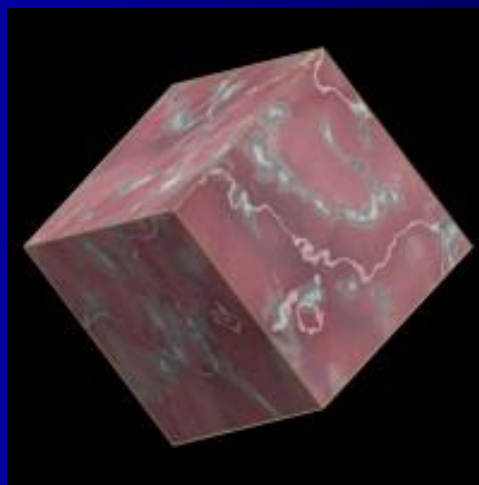




Тетраэдр



Октаэдр



Гексаэдр



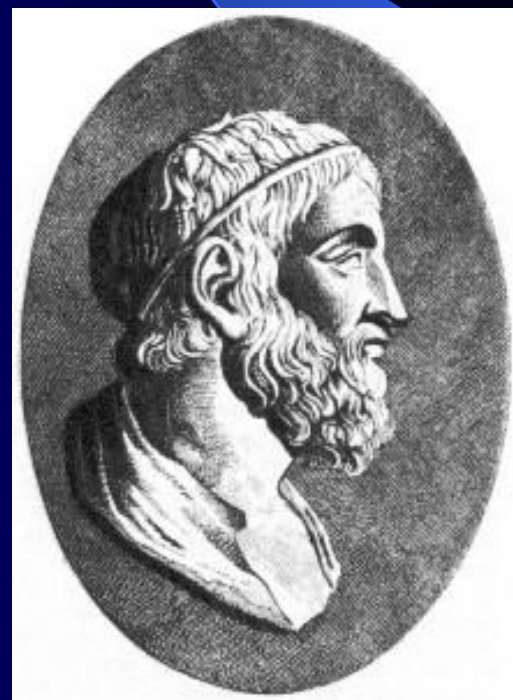
Икосаэдр



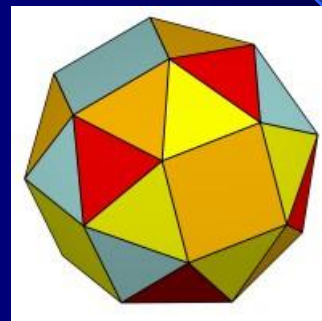
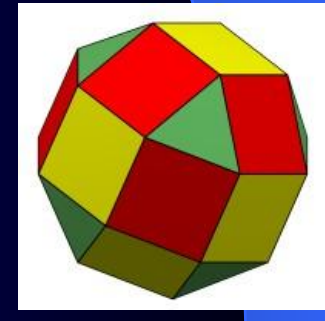
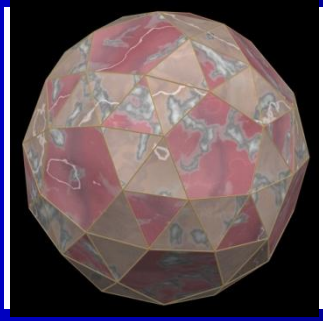
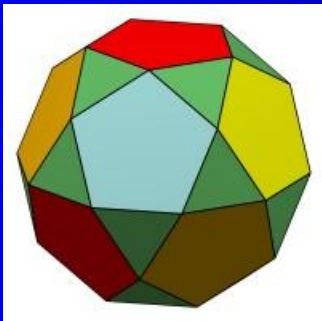
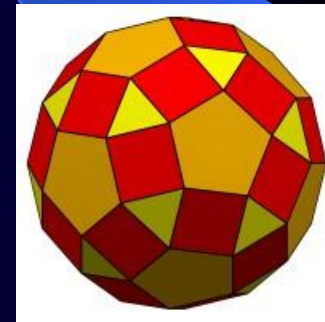
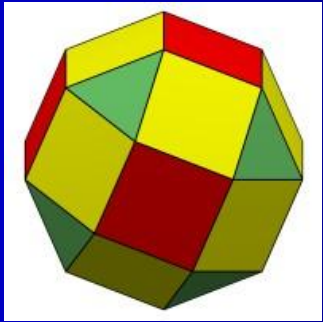
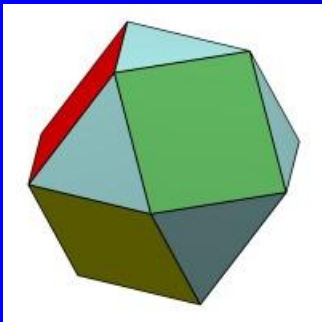
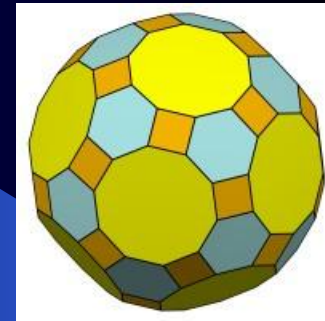
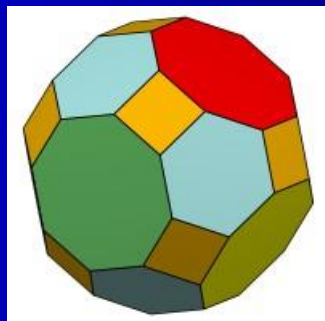
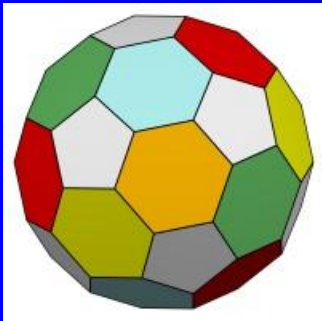
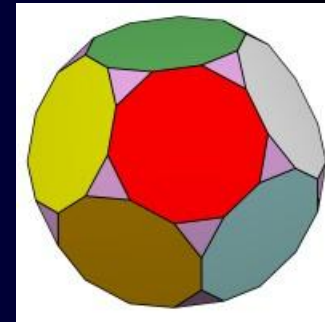
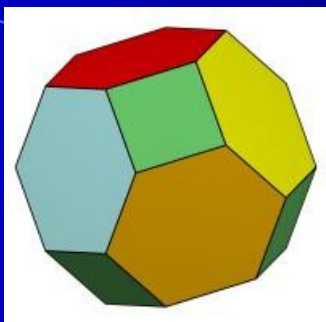
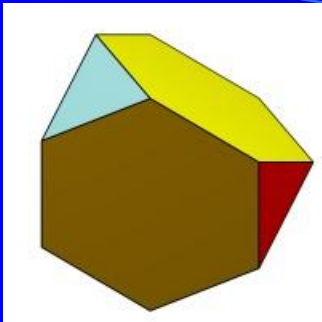
Додекаэдр

# Тела Архимеда

**Архимедовыми телами** называются полуправильные однородные выпуклые многогранники, то есть выпуклые многогранники, все многогранные углы которых равны, а грани - правильные многоугольники нескольких типов.



*Тела  
Архимеда*



*Тело  
Аикинузе*



# Тела

## Кеплера - Пуансо

Среди невыпуклых однородных многогранников Среди невыпуклых однородных многогранников существуют аналоги платоновых тел - четыре *правильных невыпуклых однородных многогранника* или *тела Кеплера - Пуансо*. Как следует из их названия, тела Кеплера-Пуансо - это невыпуклые однородные многогранники, все грани которых - одинаковые правильные многоугольники, и все многогранные углы которых равны. Грани при этом могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми.





*Малый звездчатый*

*додекаэдр*



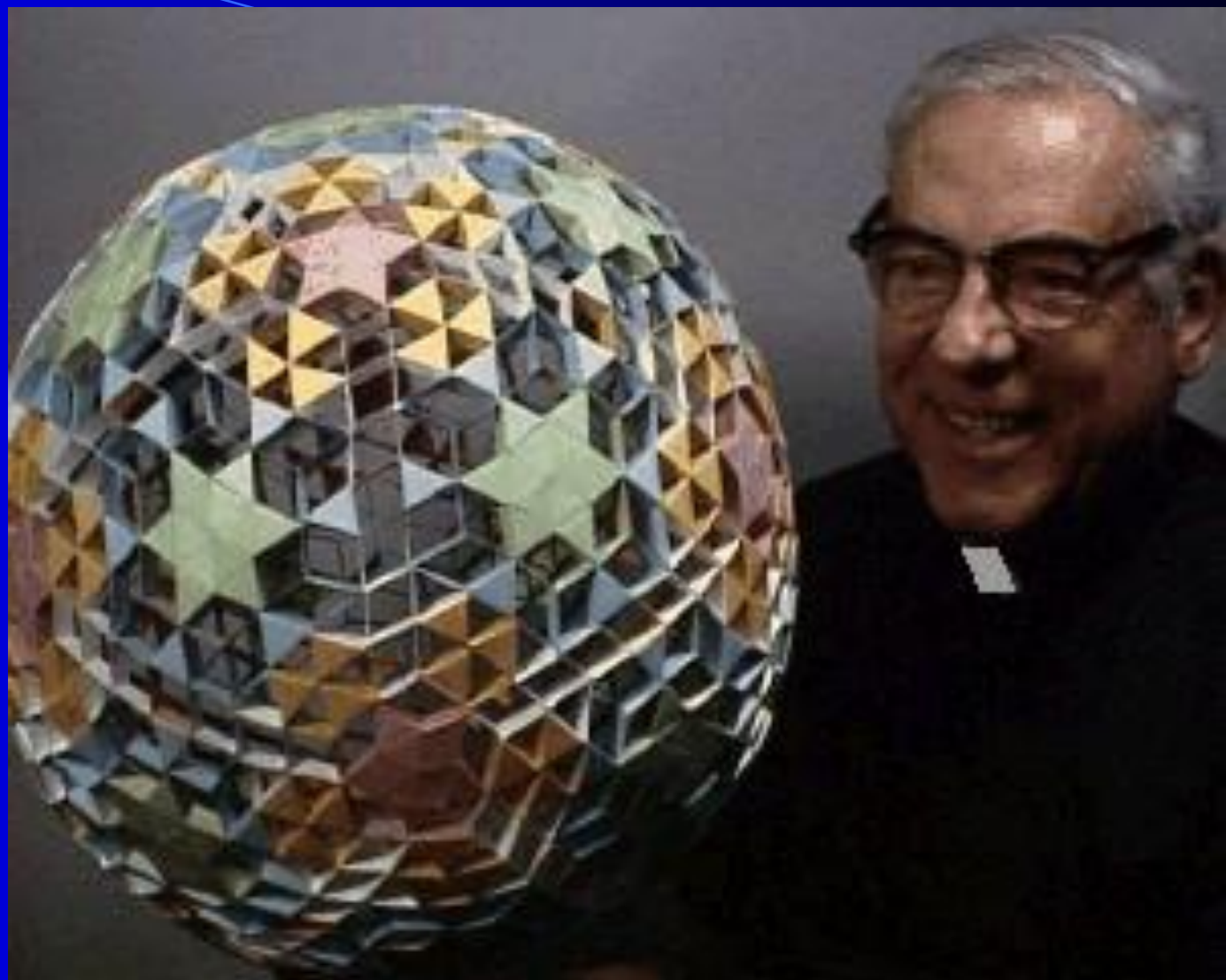
*Большой звездчатый*

*додекаэдр*



*Большой икосаэдр*





*Магнус Веннинджер (1919г.р.)*

# Многогранники в искусстве



В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи (1452 -1519) например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал правильными и полуправильными многогранниками книгу Монаха Луки Пачоли "О божественной пропорции."

Знаменитый художник, увлекавшийся геометрией Альбрехт Дюрер (1471-1528), в известной гравюре "Меланхолия I" на переднем плане изобразил додекаэдр.

художник Эшер

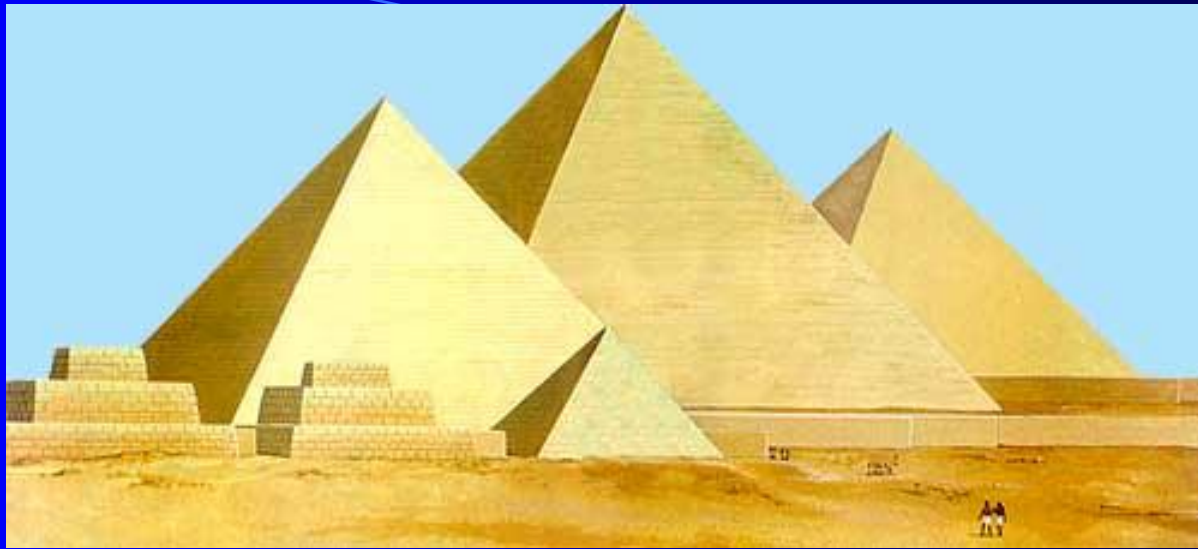
**Наука геометрия** возникла из практических задач, ее предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счете в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется всюду, где нужна хотя бы малейшая точность в определении формы и размеров. И технику, и инженеру, и квалифицированному рабочему и людям искусства геометрическое воображение необходимо, как геометру или архитектору. Математика, в частности геометрия, представляет собой могущественный инструмент познания природы, создания техники и преобразования мира.

Различные геометрические формы находят свое отражение практически во всех отраслях знаний: архитектура, искусство.

## **Многогранники в архитектуре**



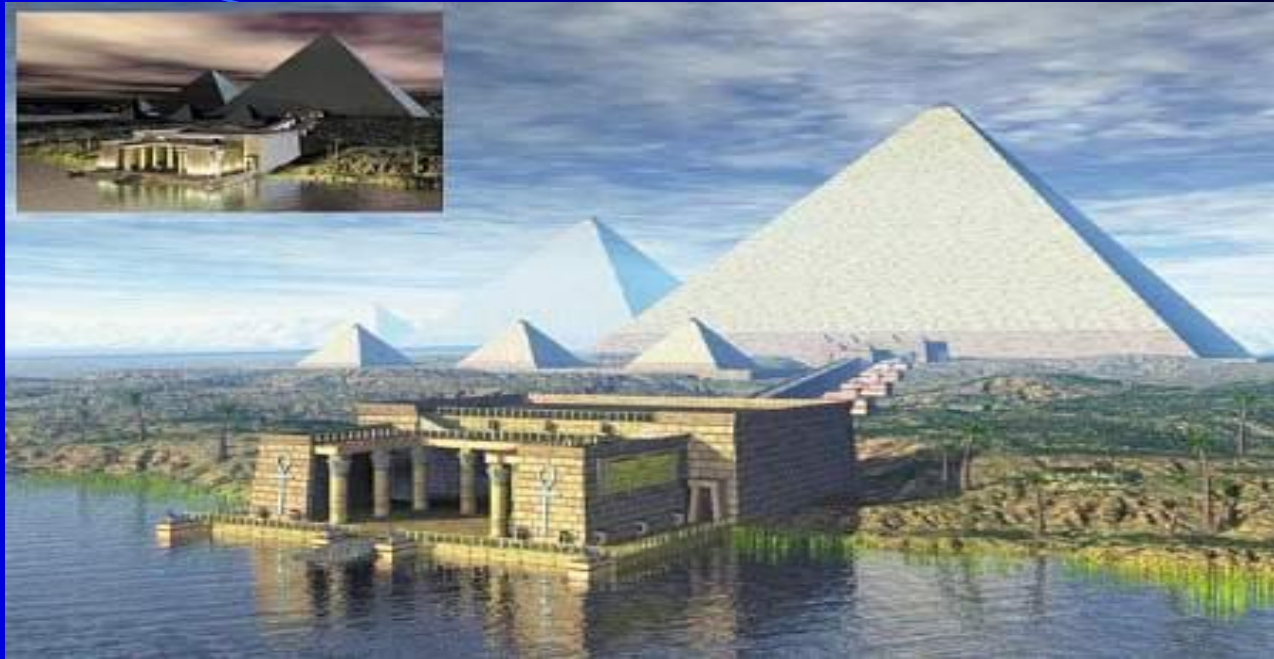
Во всем облике японского строения очевидна идея преобразования пространства, подчинения его новой логике - логике "завоевания" природного ландшафта, которому противопоставлена четкая геометрия проникающих архитектурных форм.



## ***ЦАРСКАЯ ГРОБНИЦА***

*Великая пирамида была построена как гробница Хуфу, известного грекам как Хеопс. Он был одним из фараонов, или царей древнего Египта, а его гробница была завершена в 2580 году до н.э. Позднее в Гизе было построено еще две пирамиды, для сына и внука Хуфу, а также меньшие по размерам пирамиды для их царьц. Пирамида Хуфу, самая дальняя на рисунке, является самой большой. Пирамида его сына находится в середине и смотрится выше, потому что стоит на более высоком месте.*

*Великая пирамида в Гизе. Эта грандиозная Египетская пирамида является древнейшим из Семи чудес древности. Кроме того, это единственное из чудес, сохранившееся до наших дней. Во времена своего создания Великая пирамида была самым высоким сооружением в мире. И удерживала она этот рекорд, по всей видимости, почти 4000 лет.*



## ***СТРОИТЕЛЬСТВО ПИРАМИД***

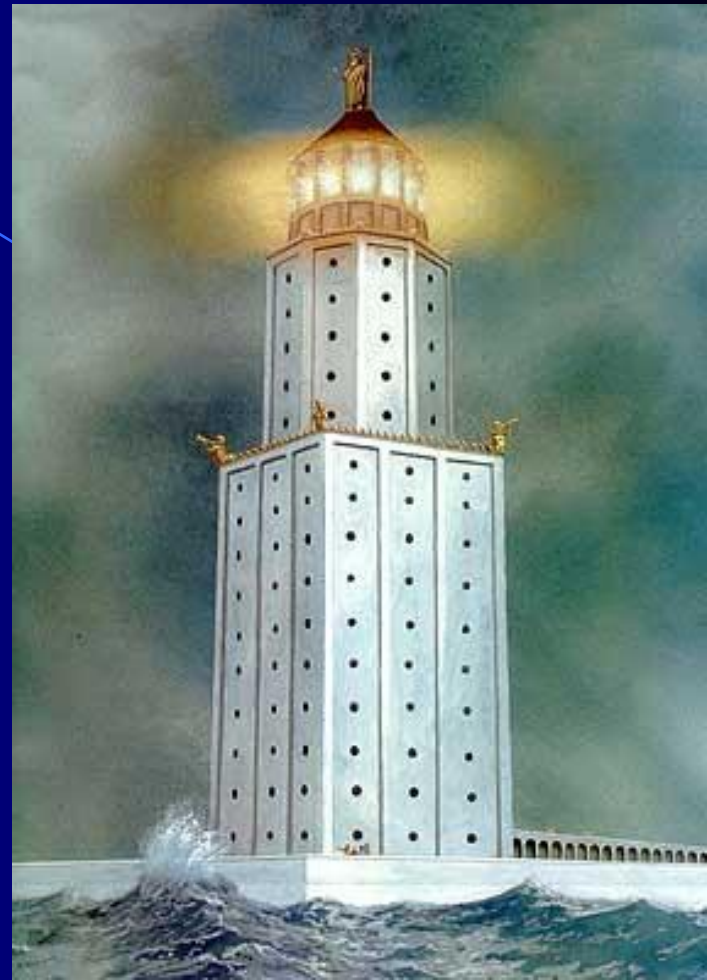
*Пирамиды стоят на древнем кладбище в Гизе, на противоположном от Каира, столицы современного Египта, берегу реки Нил. Некоторые археологи считают, что, возможно, на строительство Великой пирамиды 100 000 человек потребовалось 20 лет. Она была создана из более чем 2 миллионов каменных блоков, каждый из которых весил не менее 2,5 тонн. Рабочие подтаскивали их к месту, используя пандусы, блоки и рычаги, а затем подгоняли друг к другу, без раствора.*

## **ОСТРОВ И МАЯК**

*Маяк был построен на маленьком острове Фарос в Средиземном море, около берегов Александрии. Этот оживленный порт основал Александр Великий во время посещения Египта. Сооружение назвали по имени острова. На его строительство, должно быть, ушло 20 лет, а завершен он был около 280 г. до н.э., во времена правления Птолемея II, царя Египта.*

## **ТРИ БАШНИ**

*Фаросский маяк состоял из трех мраморных башен, стоявших на основании из массивных каменных блоков. Первая башня была прямоугольной, в ней находились комнаты, в которых жили рабочие и солдаты. Над этой башней располагалась меньшая, восьмиугольная башня со спиральным пандусом, ведущим в верхнюю башню.*



## *Александрийский маяк.*



*В III веке до н.э. был построен маяк, чтобы корабли могли благополучно миновать рифы на пути в Александрийскую бухту. Ночью им помогало в этом отражение языков пламени, а днем - столб дыма. Это был первый в мире маяк, и простоял он 1500 лет.*



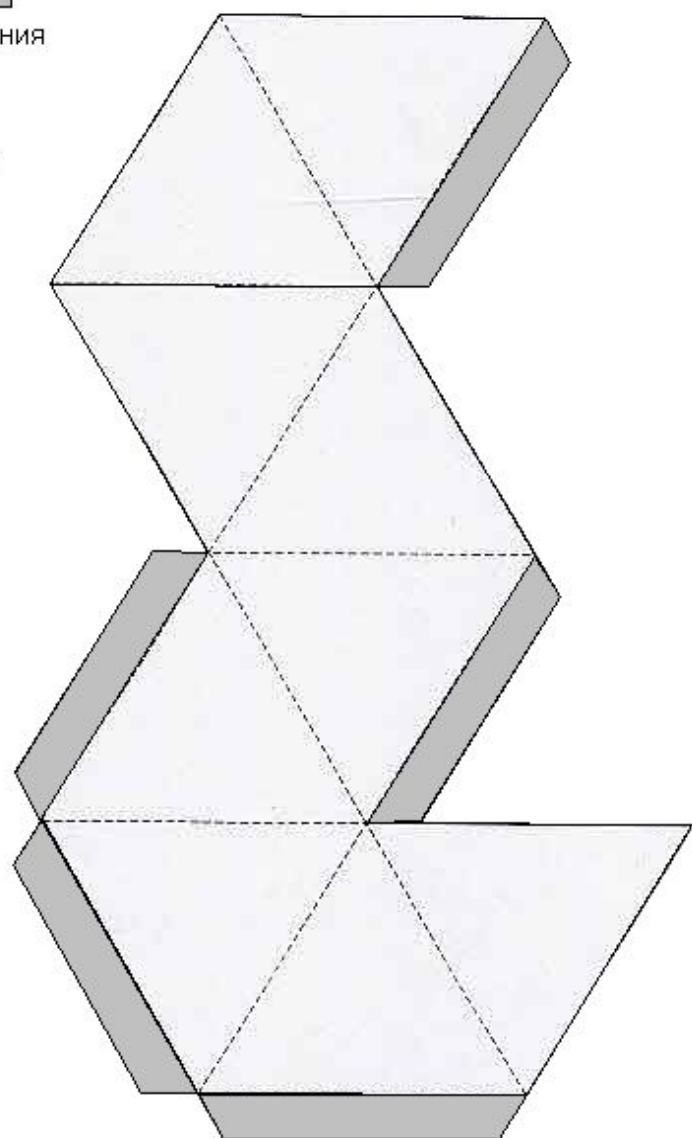


# *Развёртки некоторых многогранников*

- ❖ *Правильные многогранники (тела Платона)*
- ❖ *Тела Архимеда*
- ❖ *Тела Кеплера-Пуансо*
- ❖ *Невыпуклые полуправильные многогранники*

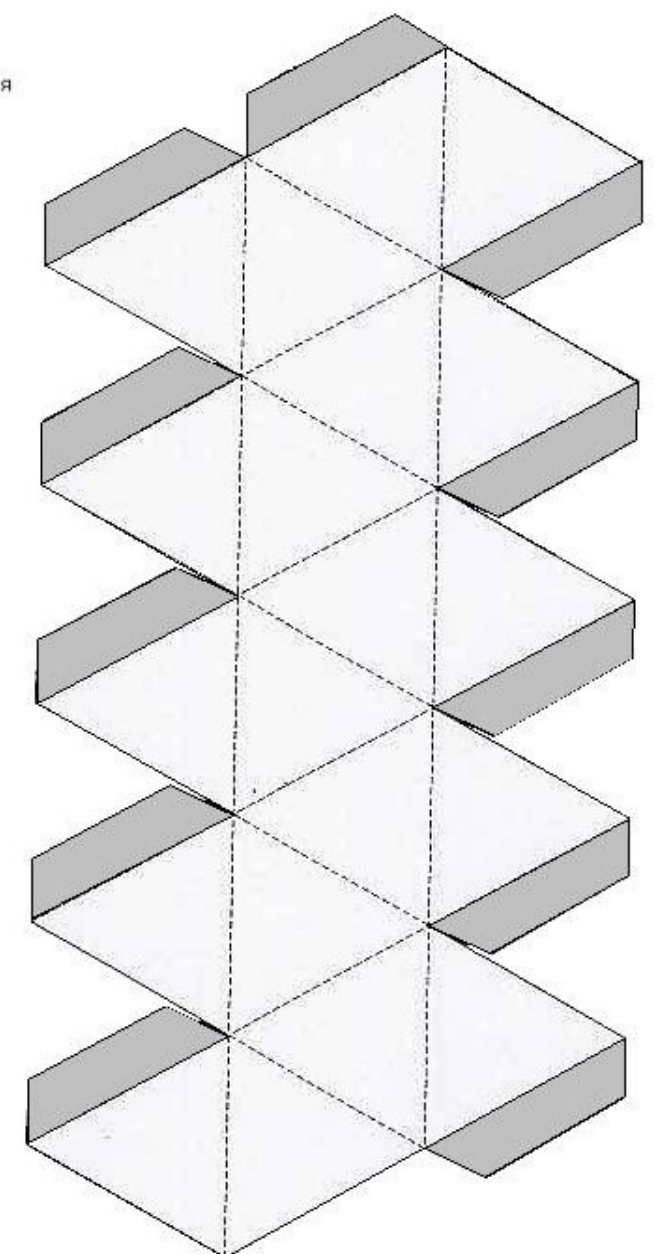
# Выкройка октаэдра

- места склеивания
- - - - - линии сгиба
- линия надреза

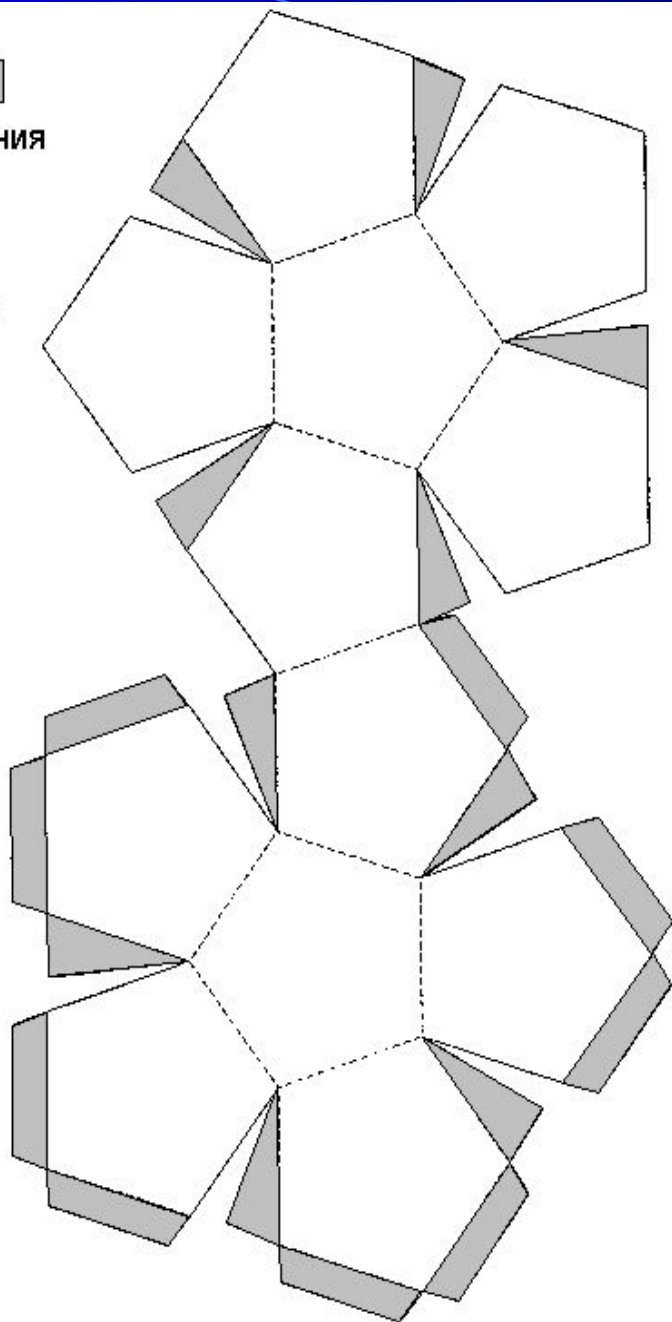


# Выкройка икосаэдра

- места склеивания
- - - - - линии сгиба
- линия надреза

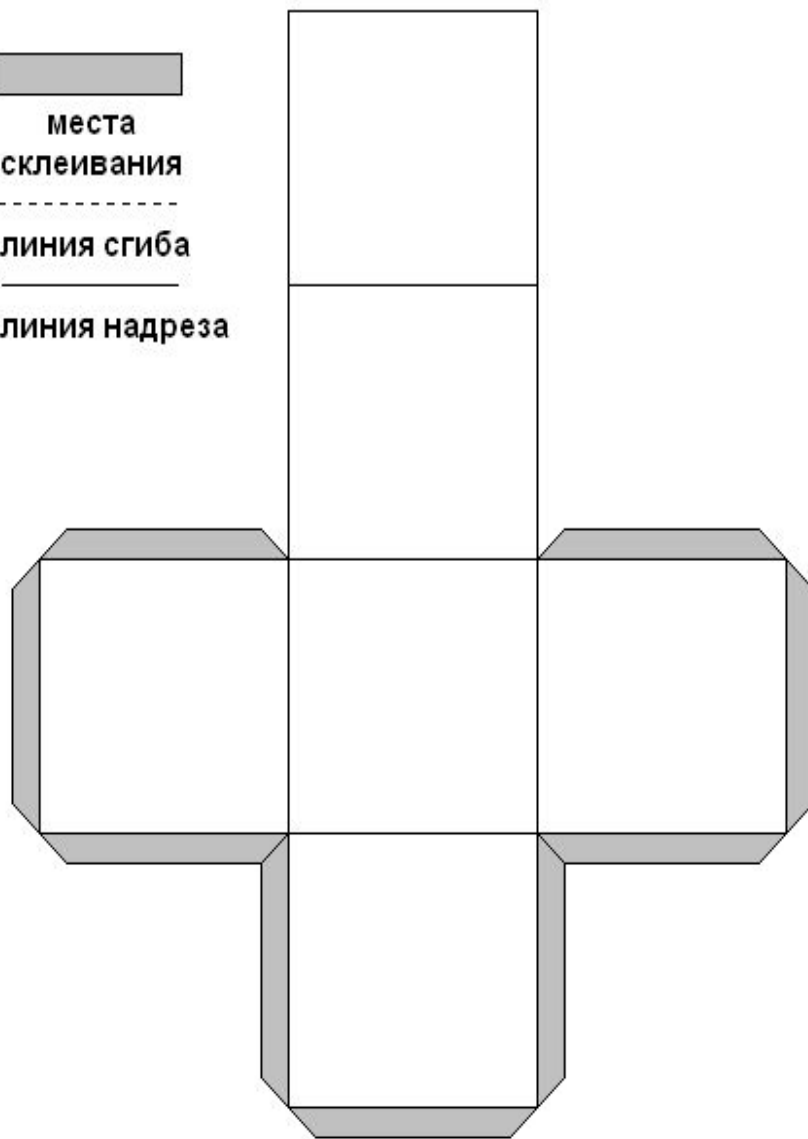


  
места склеивания  
-----  
линия сгиба  
\_\_\_\_\_  
линия надреза

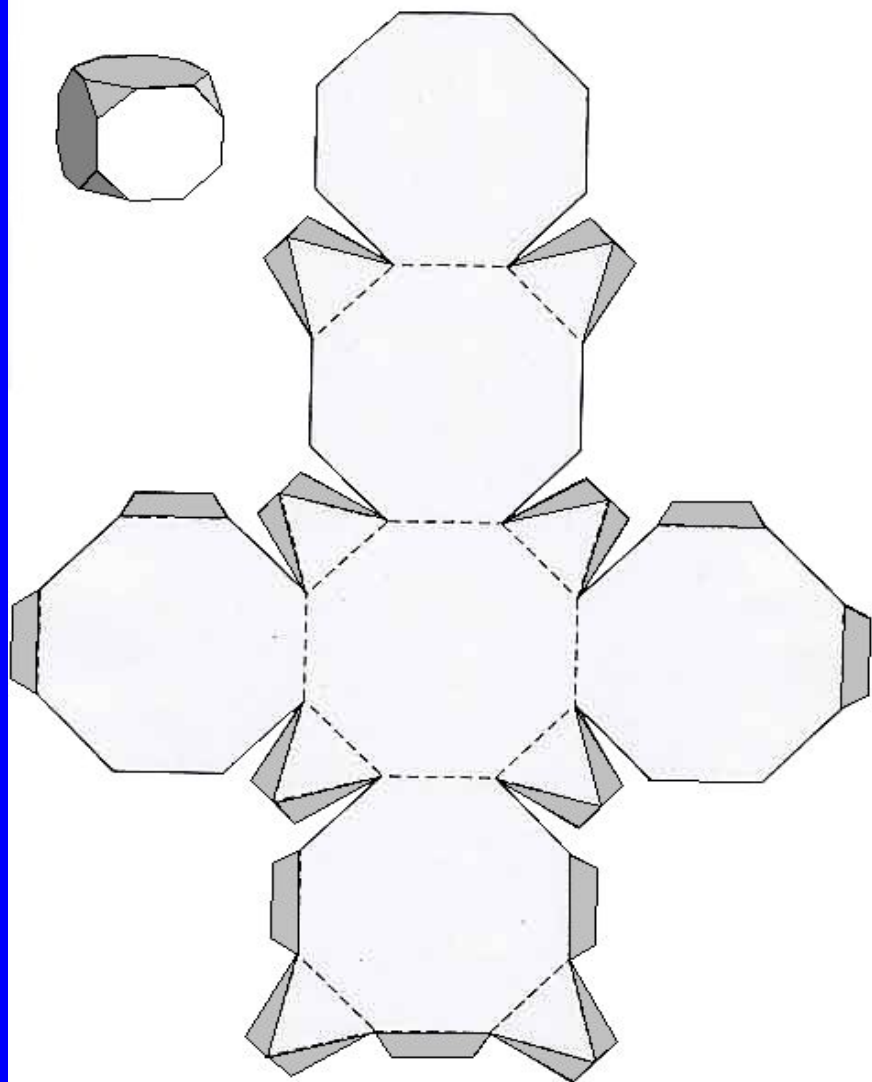


## Выкройка гексаэдра (куба)

  
места  
склеивания  
-----  
линия сгиба  
\_\_\_\_\_  
линия надреза



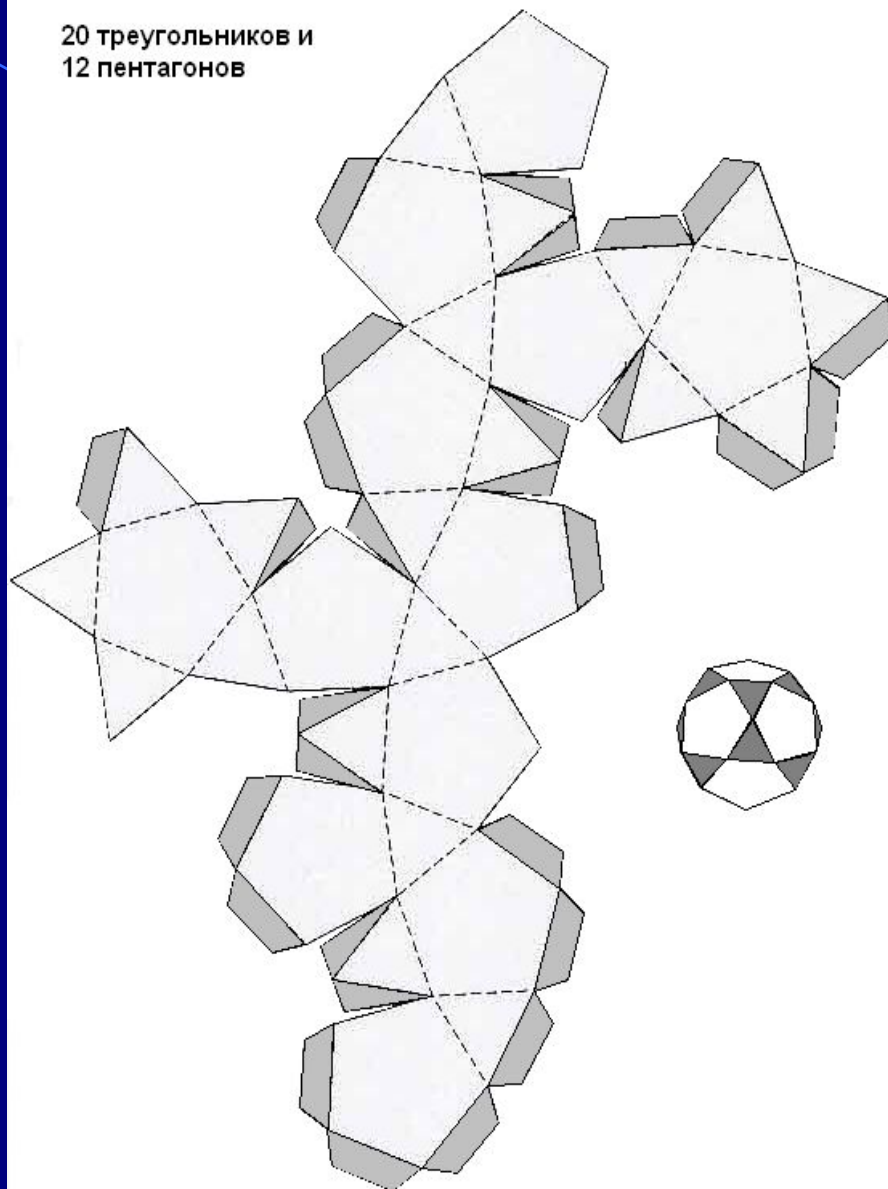
## Усечённый куб



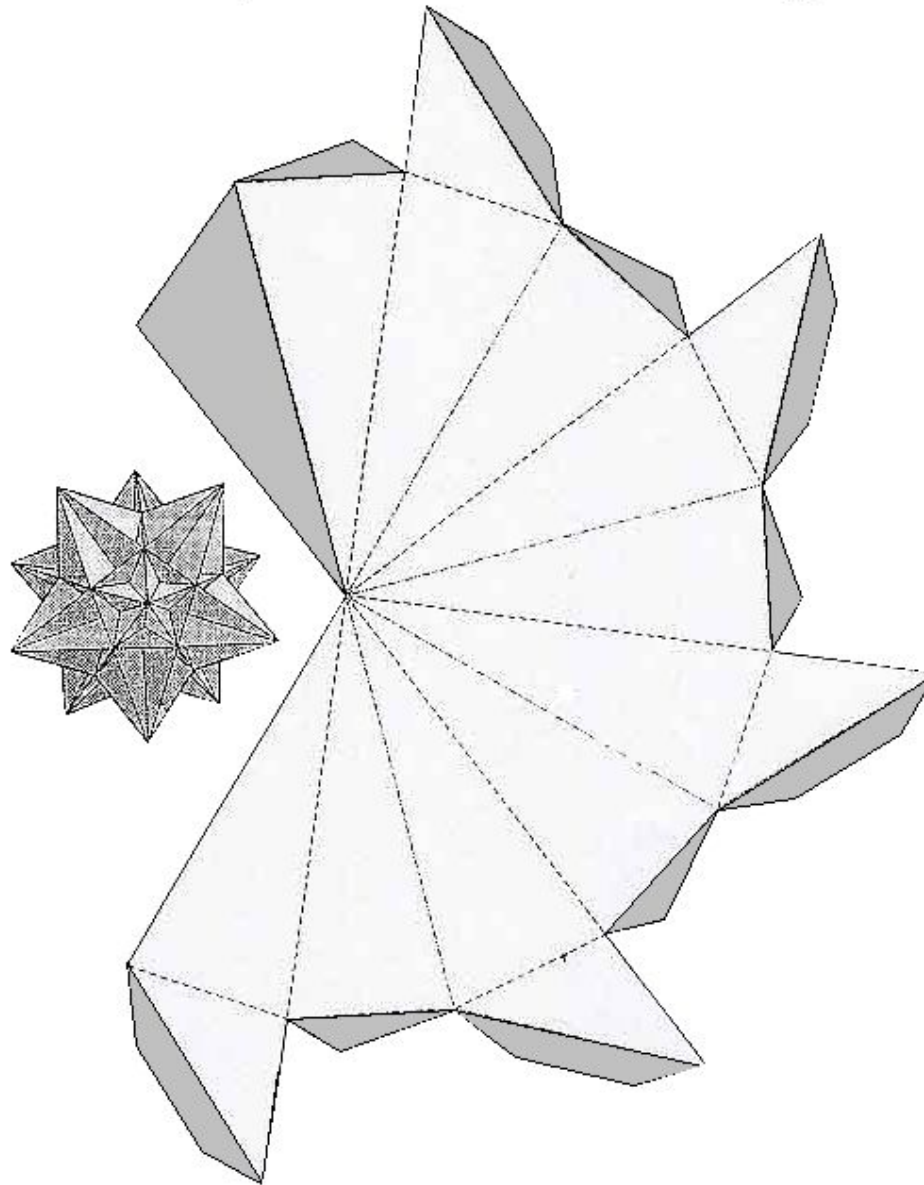
8 треугольников  
6 восьмиугольников

## Икосододекаэд

20 треугольников и  
12 пентагонов

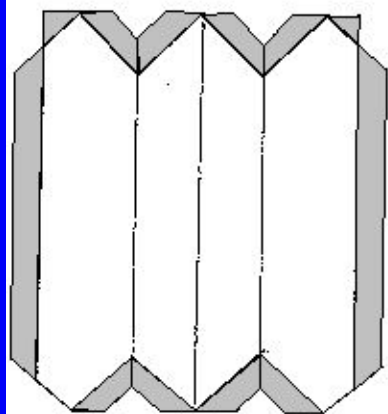


## Выкройка большого икосаэдра

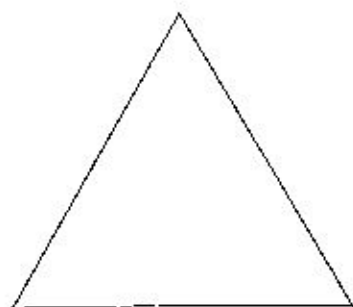


Для изготовления многогранника надо 12 таких звёзд, склейка которых осуществляется по общей склейки додекаэдра.

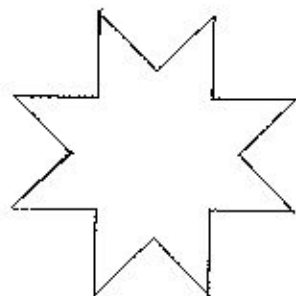
## Кубооктоусечённый кубоктаэдр



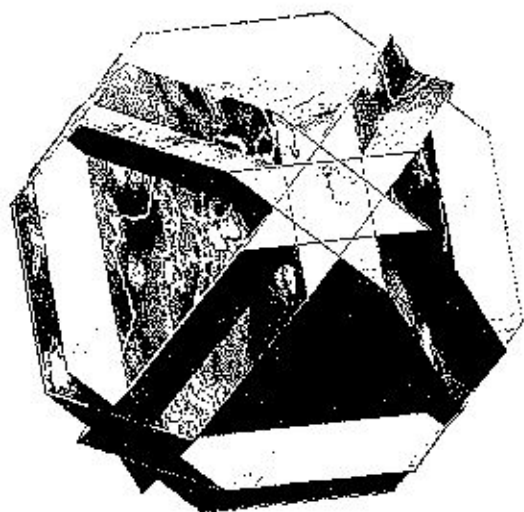
12 деталей



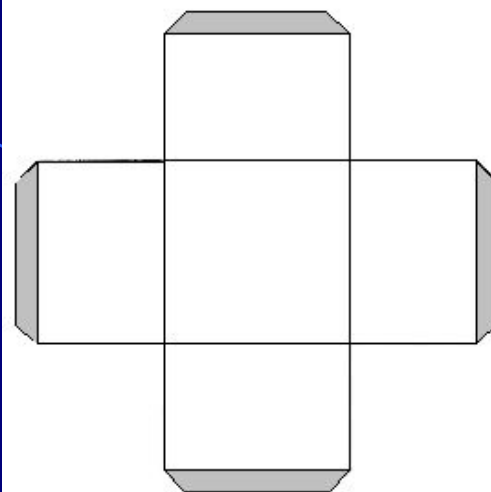
8 деталей



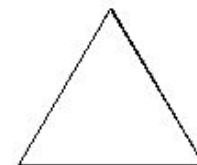
6 деталей



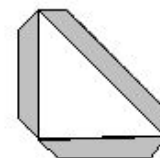
## Малый кубокубоктаэдр



6 деталей



8 деталей



24 детали

