

Тема. «Ранг матрицы»

Основные понятия:

1. Определение Определение ранга матрицы.
Свойства ранга матрицы
2. Способы нахождения ранга матрицы
3. Теорема о ранге матрицы

завершить

1. Определение ранга матрицы. Свойства ранга матрицы

Рангом матрицы называют наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля (обозначается $r(A)$ или $\text{rang}A$).

Свойства ранга матрицы:

- 1) если матрица A имеет размеры $m \times n$, то $\text{rang}A \leq \min(m; n)$;
- 2) $\text{rang}A = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны нулю;
- 3) если матрица A – квадратная порядка n , то $\text{rang}A = n$ тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$.

[назад](#)



2. Способы нахождения ранга матрицы

- 1) Используя определение и свойства ранга матрицы
- 2) Используя свойство миноров
- 3) Используя элементарные преобразования

[назад](#)

Данный способ (используя *определение и свойства ранга* матрицы) удобно применять при нахождения ранга матрицы «небольшой» размерности.

Пример 1. Вычислить ранги следующих матриц

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3) C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Решение

назад

Решение (Пример 1). Вычислить ранги следующих матриц

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}A=0$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}B=2$$

$$3) C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}C=1$$

$$4) D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}D=1$$

назад

Данный способ (используя *свойство миноров*) удобно применять при нахождения ранга матрицы с «большим количеством» нулевых элементов.

Свойство миноров. Если все миноры порядка k данной матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю.

Метод: Если среди миноров порядка k данной матрицы есть отличные от нуля, а все миноры порядка $(k+1)$ равны нулю или не существуют, то ранг матрицы равен k .

Пример 2. Вычислить ранги следующих матриц

$$1) A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение Решение

назад

Решение (Пример 2).

$$1) A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A = 2$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} B = 1$$

назад

Данный способ нахождения ранга матрицы (используя **элементарные преобразования**) удобно применять к матрице любой размерности.

Метод: с помощью элементарных преобразований свести матрицу к ступенчатому виду или квазитреугольной форме

где $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$ $\neq 0, i=1, \dots, r; r \leq k$, тогда ранг матрицы равен r .

Пример 3.
 a_{ii}

назад

Элементарные преобразования,

не меняющие ранга матрицы:

- 1) отбрасывание нулевой строки (столбца);
- 2) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;
- 3) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;
- 4) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;
- 5) транспонирование матрицы.

[назад](#)

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 7 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 7 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 6 & 5 & 7 & 9 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-6)+ \\ \times(-2)+ \\ \times(-3)+ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -18 & 7 \end{pmatrix} \times(-1)+$$

далее

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)+} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отбрасываем нулевую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}A = 3$$

назад

3. Теорема о ранге матрицы

Строки (столбцы) матрицы e_1, e_2, \dots, e_m , называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = 0$. В противном случае строки матрицы называются **линейно независимыми**.

Теорема о ранге матрицы: ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов.

Пример 4.

[назад](#)

Пример 4. Найти максимальное число линейно независимых строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 11 & 6 \\ -1 & -3 & 0 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 11 & 6 \\ -1 & -3 & 0 & -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2)+ \\ + \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \times(-1)+ \end{matrix}$$

далее

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отбрасываем нулевые строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A = 2$$

Следовательно, по теореме о ранге матрицы исходная матрица имеет две линейно независимые строки (или столбца).

назад

A decorative graphic on the left side of the slide features three balloons. The top balloon is light blue, the middle one is a slightly darker blue, and the bottom one is dark blue. Each balloon has a white string and a small white ribbon. The balloons are surrounded by several white, triangular, starburst-like shapes that radiate outwards, giving the impression of light or movement.

Спасибо за внимание!

**Не забывайте готовиться к
лекциям и семинарам!**

**(Тема следующей лекции «Системы линейных
алгебраических уравнений»)**

Удачи!