Тема. «Ранг матрицы»

Основные понятия:

1. **Определение**Определение ранга матрицы. **Свойства** ранга матрицы
2. **Способы нахождения** ранга матрицы
3. **Теорема о ранге** матрицы

завершить

1. Определение ранга матрицы. Свойства ранга матрицы

Рангом матрицы называют наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля (обозначается ***r(A)*** или ***rangA***).

Свойства ранга матрицы:

1) если матрица A имеет размеры $m \times n$, то $rangA \leq \min(m;n)$;

2) $rangA=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны нулю;

3) если матрица A – квадратная порядка n, то $rangA = n$ тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$.

назад

2. Способы нахождения ранга матрицы

1) Используя определение и свойства ранга матрицы
2) Используя свойство миноров
3) Используя элементарные преобразования

назад

Данный способ (используя ***определение и свойства ранга*** матрицы) удобно применять при нахождения ранга матрицы «небольшой» размерности.

Пример 1. Вычислить ранги следующих матриц

1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $D=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

Решение

назад

Решение (Пример 1). Вычислить ранги следующих матриц

1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}A=0$

2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}B=2$

3) $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}C=1$

4) $D=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}D=1$

назад

Данный способ (используя ***свойство миноров***) удобно применять при нахождения ранга матрицы с «большим количеством» нулевых элементов.

Свойство миноров. Если все миноры порядка k данной матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю.

Метод: Если среди миноров порядка k данной матрицы есть отличные от нуля, а все миноры порядка $(k+1)$ равны нулю или не существуют, то ранг матрицы равен k.

Пример 2. Вычислить ранги следующих матриц

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

РешениеРешение

назад

Решение **(Пример 2).**

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow rangA = 2$$

$$2)\ B=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow rangB = 1$$

назад

Данный способ нахождения ранга матрицы (используя ***<u>элементарные преобразования</u>***) удобно применять к матрице любой размерности.

Метод: с помощью элементарных преобразований свести матрицу к ступенчатому виду или квазитреугольной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i=1,\dots,r$; $r \leq k$, тогда ранг матрицы равен r.

<u>Пример 3</u>.

<u>назад</u>

Элементарные преобразования,

не меняющие ранга матрицы:

1) отбрасывание нулевой строки (столбца);
2) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;
3) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;
4) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;
5) транспонирование матрицы.

назад

<u>Пример 3</u>. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 7 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 7 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 6 & 5 & 7 & 9 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \times(-6)+ \quad \times(-2)+ \quad \times(-3)+$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -18 & 7 \end{pmatrix} \quad \times(-1)+$$

<u>далее</u>

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \end{pmatrix} \times(-1)+ \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отбрасываем нулевую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 3$$

назад

3. Теорема о ранге матрицы

Строки (столбцы) матрицы $e_1, e_2, ..., e_m$, называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m = 0$$

В противном случае строки матрицы называются ***линейно независимыми***.

Теорема о ранге матрицы: ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов.

Пример 4.

назад

Пример 4. Найти максимальное число линейно независимых строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 11 & 6 \\ -1 & -3 & 0 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 11 & 6 \\ -1 & -3 & 0 & -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-2)+ \quad + \\ \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \quad \times(-1)+ \\ \\ \\ \end{array}$$

далее

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отбрасываем нулевые строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 2$$

Следовательно, по теореме о ранге матрицы исходная матрица имеет две линейно независимые строки (или столбца).

назад

Спасибо за внимание!

Не забывайте готовиться к лекциям и семинарам!

(Тема следующей лекции «Системы линейных алгебраических уравнений»)

Удачи!