СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

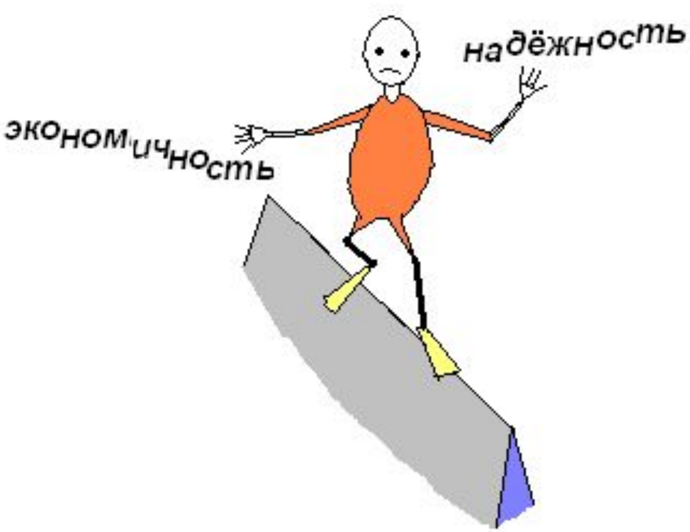
Основные требования к конструкциям

Природные ресурсы должны использоваться рационально.

Соответственно, от конструкций требуется <u>надёжность</u> и <u>экономичность</u>.

«Сопротивление материалов» как наука возникла для обеспечения этих требований и установления оптимального баланса между ними.

- **Экономичность** определяют: 1. стоимость материалов,
  2. стоимость изготовления,
  3. затраты на эксплуатацию.



жность определяют:
1. Прочность,
2. Жесткость,
3. Выносливость,
4. Устойчивость.

долговечность, безотказность,
топригодность, сохраняемость)

Определения

- **Прочность** – это способность материалов сопротивляться необратимым изменениям и разрушению.

  Пластичность – *способность материала получать большие остаточные изменения (деформации), не разрушаясь.*

  Хрупкость - *свойство противоположное пластичности.*

  Упругость – *способность твёрдых тел восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после устранения внешних сил.*

  Элементы в конструкциях должны сопротивляться упруго.

- **Жесткость** – это способность элементов конструкций и конструкций в целом сопротивляться чрезмерным (большим) геометрическим упругим изменениям.

- **Выносливость** – это способность материалов сопротивляться усталостному разрушению и ползучести.

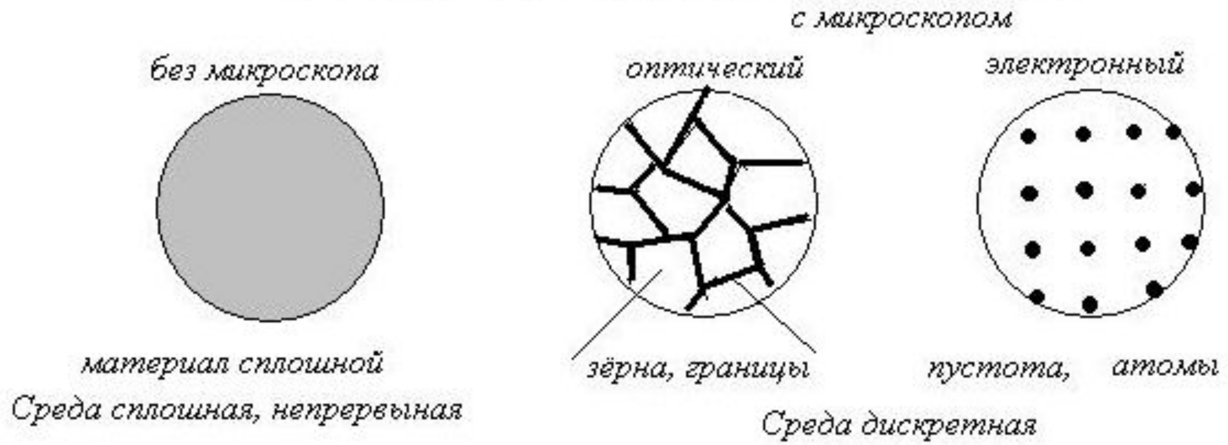
  Усталость – *разрушение материалов под действием переменных напряжений*.

  Ползучесть – *изменение во времени деформаций и напряжений при неизменной нагрузке (наблюдается при повышенных температурах)*

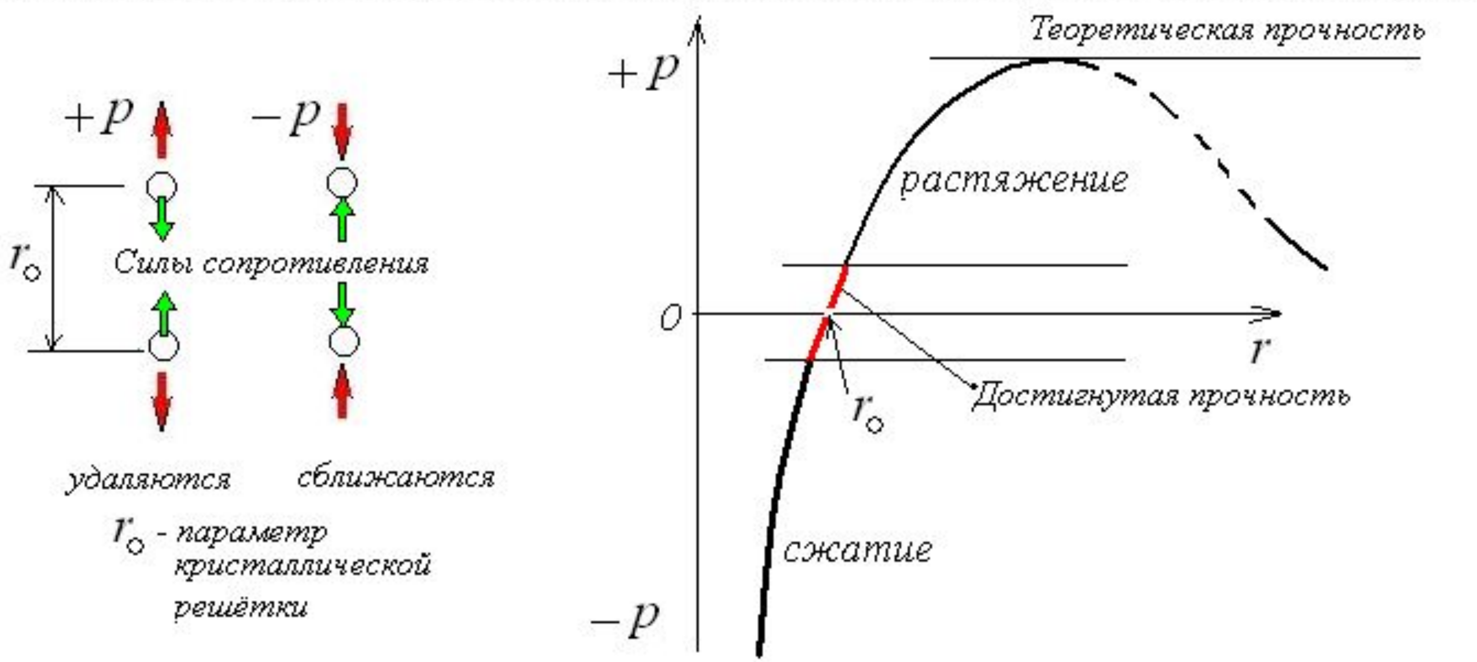
- **Устойчивость** – это способность элементов конструкций и конструкций в целом сохранять предусмотренную (заданную) геометрию деформирования.

Физические представления о деформируемом материале

Что представляет материал наблюдателю?

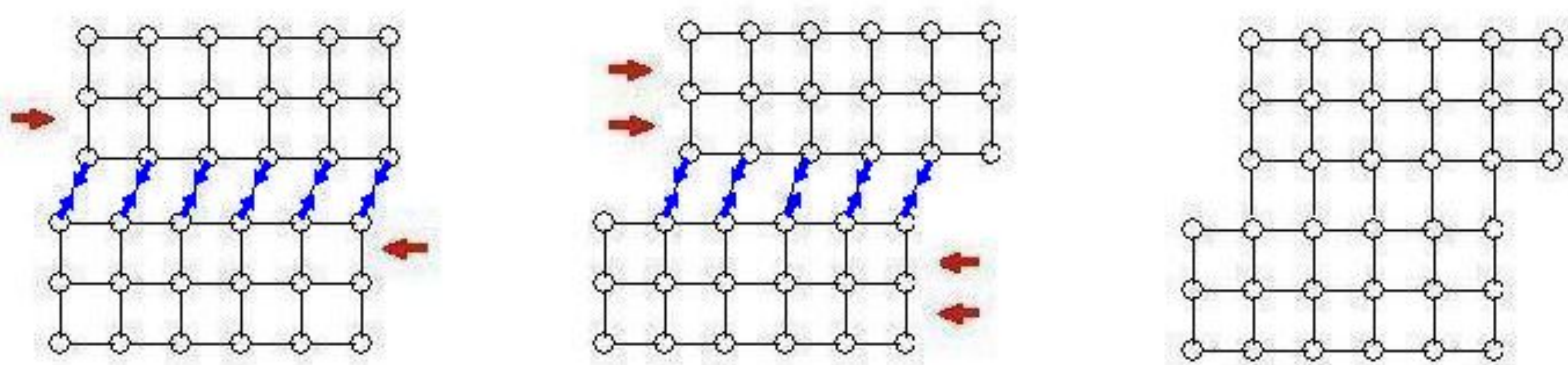


Чем занимаются атомы, когда тело деформируется (изменяется форма, размеры)?



Механизм образования деформаций

Наблюдаются смещение (сдвиги) слоёв в кристаллической решетке



Упругое деформирование

Пластическое деформирование

Остаточные изменения после разгрузки (и разрушения)

Модельные представления в «сопротивлении материалов»

1. Материал

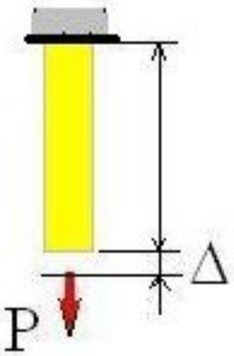
- *сплошной (непрерывность),*

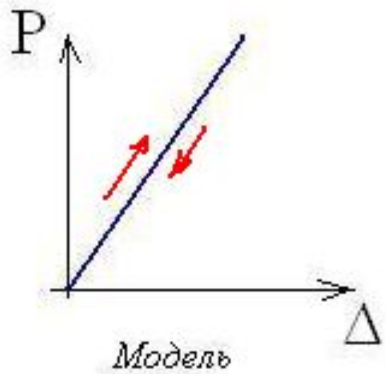
Обусловлено уровнем развития математики. Аппарат дифференциального и интегрального исчисления пригоден только для непрерывных функций.

- *линейно-упругий.*

Закон Гука:
"Геометрические изменения пропорциональны нагрузке"

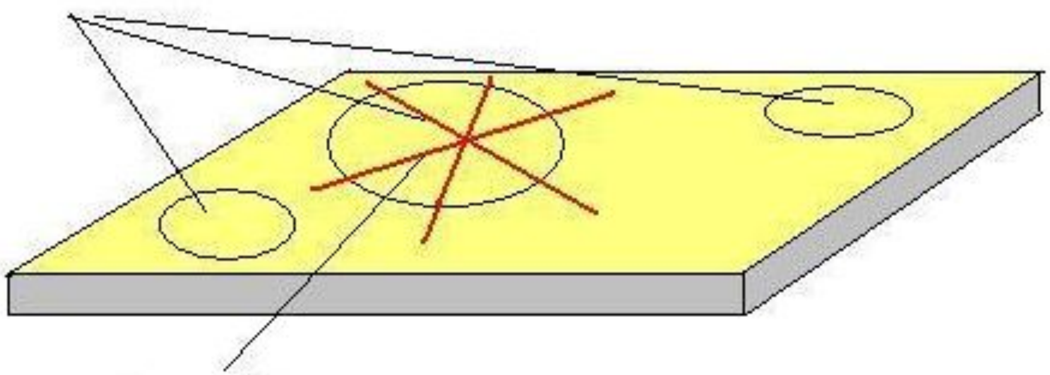
$$\Delta = \delta \cdot P$$





- *однородный,*

свойства в малом объёме и большом одинаковы

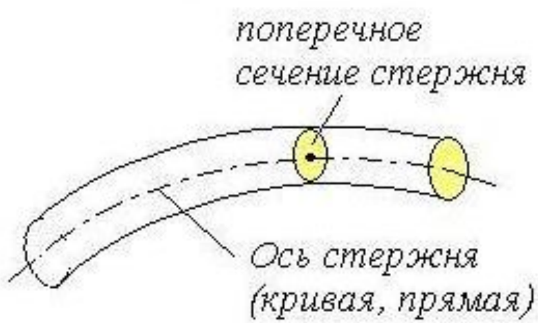


- *изотропный.*

свойства одинаковы по всем направлениям

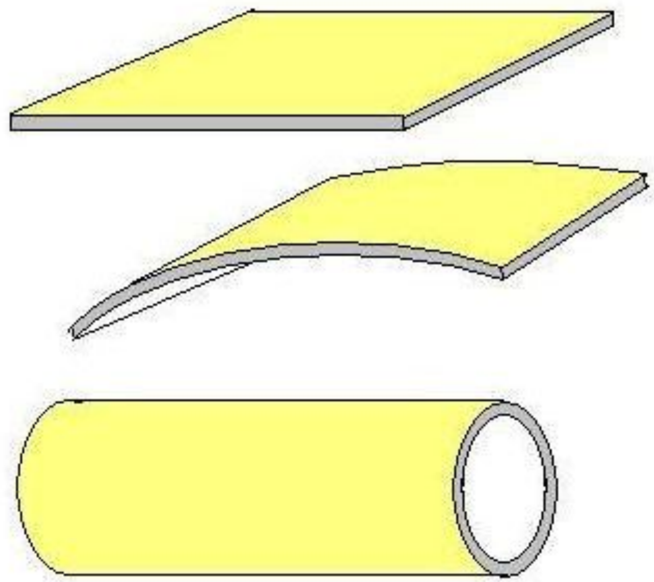
2. Классификация деформируемых элементов

Стержень *(балка, вал, стойка)*



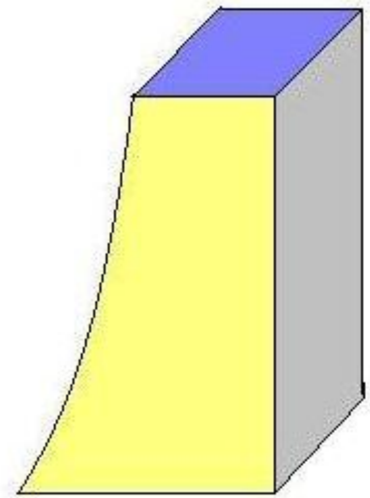
один размер (длина) много больше двух других

Пластина *(оболочка, тонкостенный сосуд, труба)*



один размер (толщина) много меньше двух других

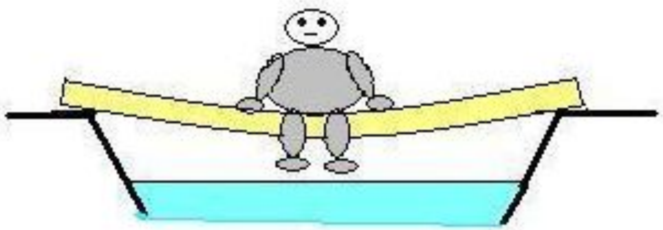
Массив



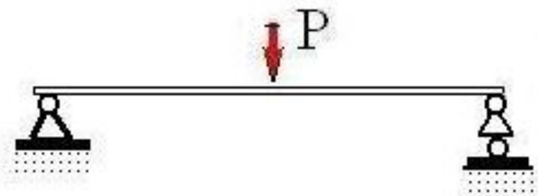
размеры соизмеримы

3. Реальный объект и расчетная схема

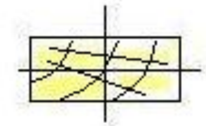
Реальный объект без несущественных особенностей называется расчётной схемой



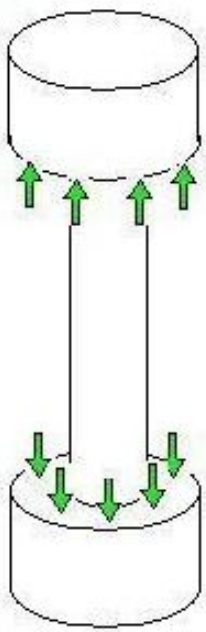
Реальность

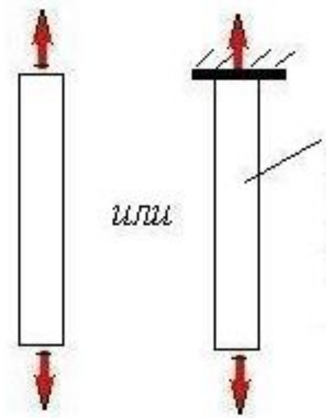


Расчётная схема



поперечное сечение стержня

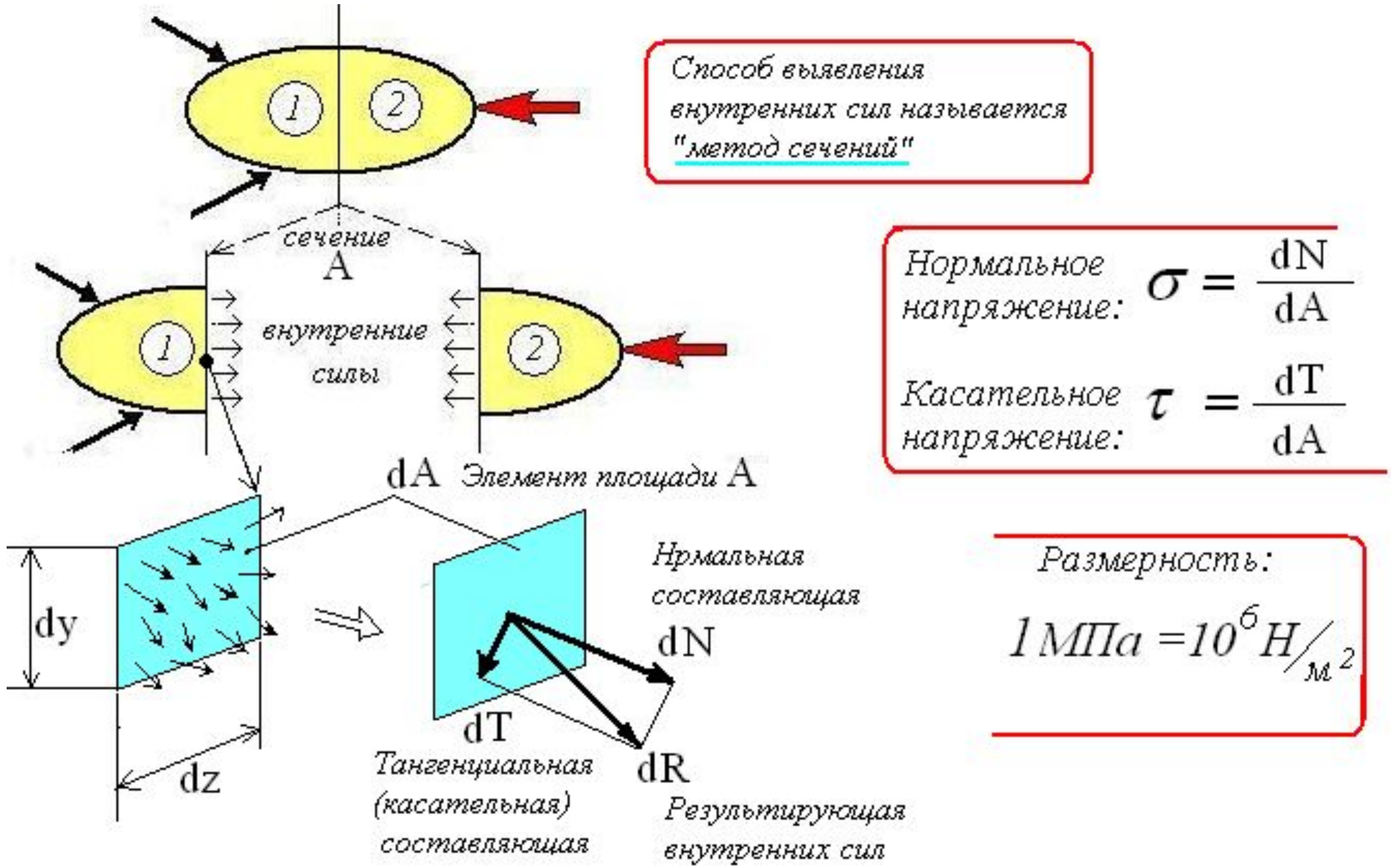




Площадь поперечного сечения

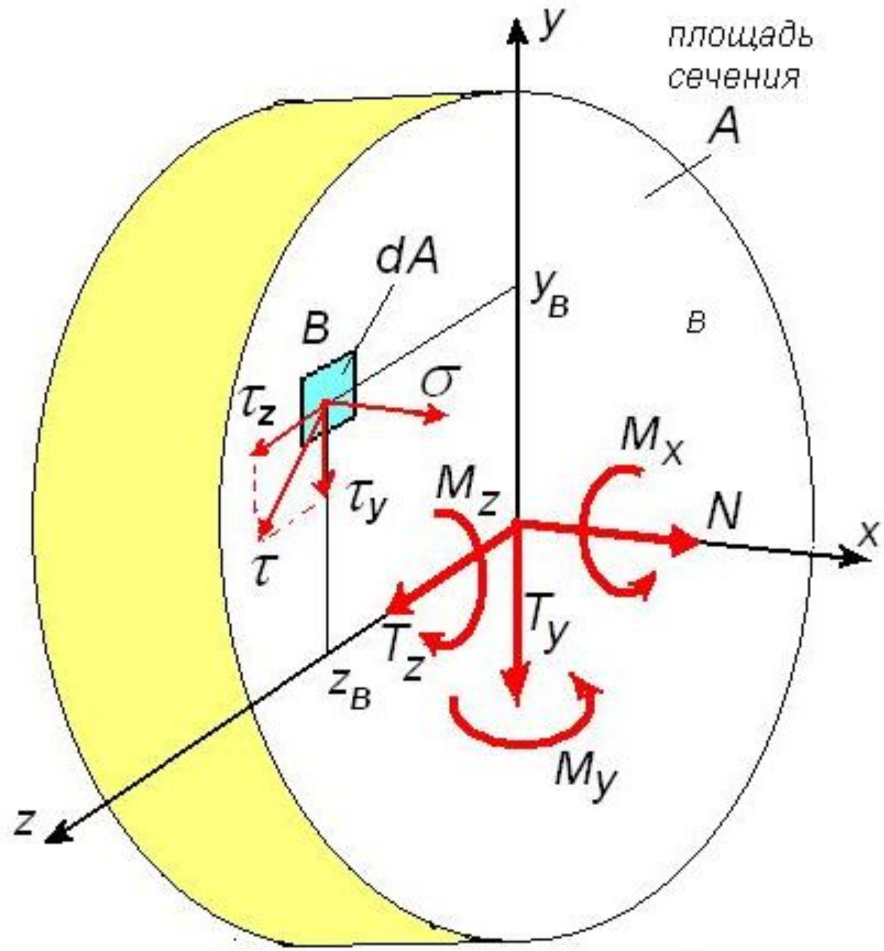
4. Внутренние силы

- **«Напряжение»** – количественная мера внутренних сил, определяет их интенсивность (величина отнесённая к единице площади).



5. «Внутренние силовые факторы»

Интегральное (результирующее) представление внутренних сил



$$\int_A \sigma \, dA = \int_A dN = \boxed{N}$$ – нормальная сила

$$\int_A \tau_y \, dA = \int_A dT_y = T_y$$

$$\int_A \tau_z \, dA = \int_A dT_z = T_z$$

поперечные силы

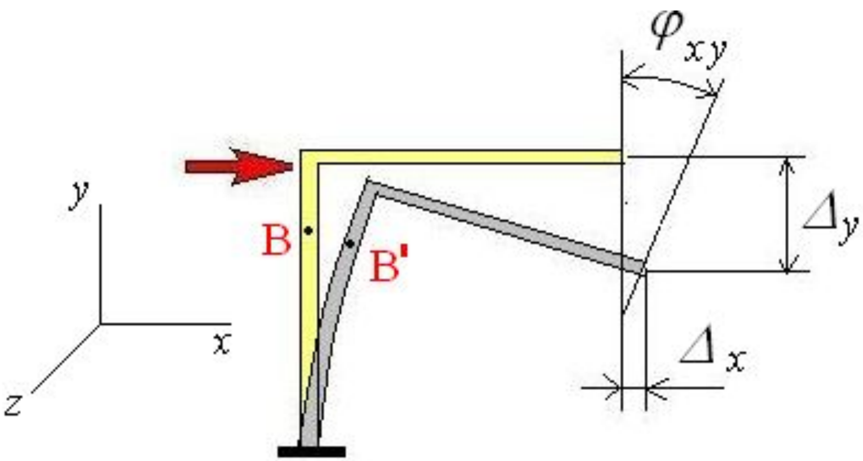
$$\int_A \sigma \, dA \cdot y_B = \int_A dM_z = M_z$$

$$\int_A \sigma \, dA \cdot z_B = \int_A dM_y = M_y$$

изгибающие моменты

$$\int_A \tau_y \, dA \cdot z_B + \int_A \tau_y \, dA \cdot y_B = \int_A dM_x = \boxed{M_x}$$ крутящий момент

6. «Перемещения» и «Деформации»



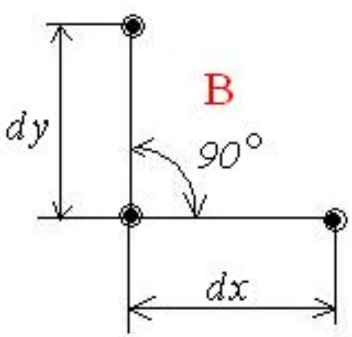
Перемещения - изменение положения поперечного сечения стержня в пространстве:

Δ – линейное перемещение

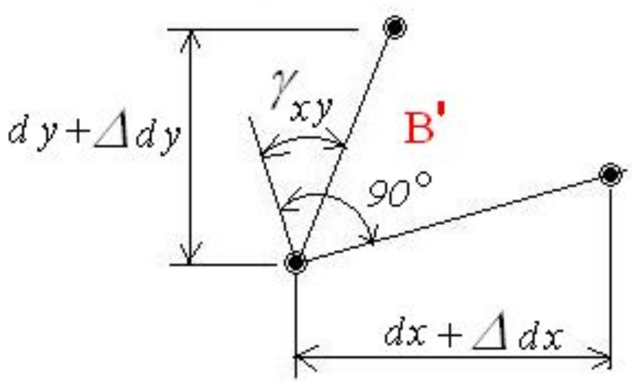
φ – угловое перемещение (поворот сечения)

Три точки на поверхности элемента

До нагрузки



При нагрузке



"Деформации" - меры геометрических именений в окрестности "точки"

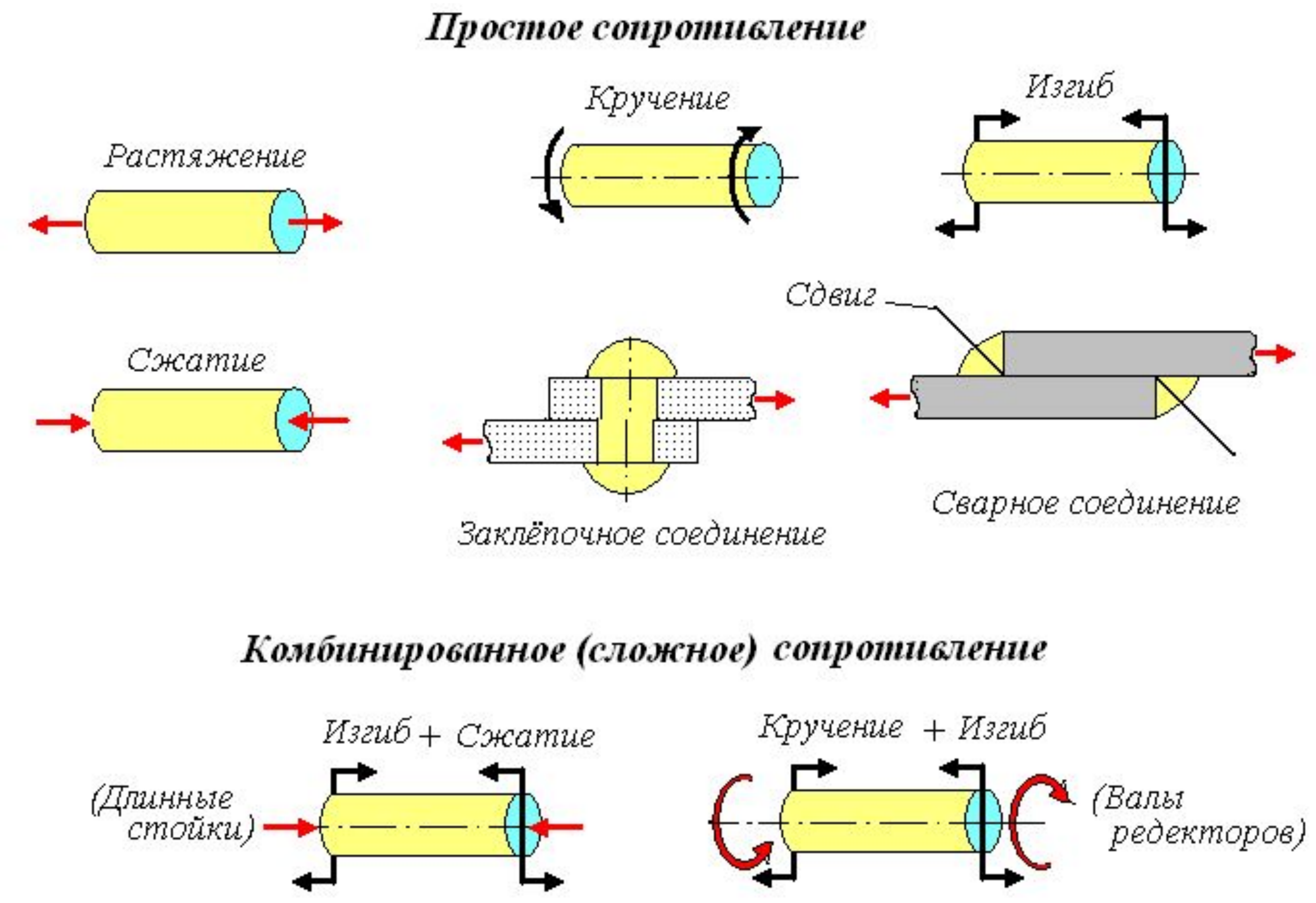
угловая деформация

γ_{xy} – угол сдвига

линейные деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}.$$

Виды деформирования



Показатель надёжности и экономичности:
Коэффициент запаса (запас прочности)

$$n = \frac{\text{Предельное значение параметра, определяющего работу элемента (конструкции)}}{\text{Рабочее (назначенное) значение этого параметра}} > 1{,}0$$

$[n]$ -- допускаемый (регламентируемый) коэффициент запаса

Условие $n \geqslant [n]$

проектировщик обеспечивает, эксплуатационник соблюдает

Прочность оценивается величиной напряжений.

Условия прочности: $\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$, $\quad [\sigma] = \dfrac{\sigma_{пред}}{[n]}$.

$\tau_{max} \leqslant [\tau]$, $\quad [\tau] = \dfrac{\tau_{пред}}{[n]}$.

опеделяются экспериментально

$[\sigma]$, $[\tau]$ — допускаемые напряжения.

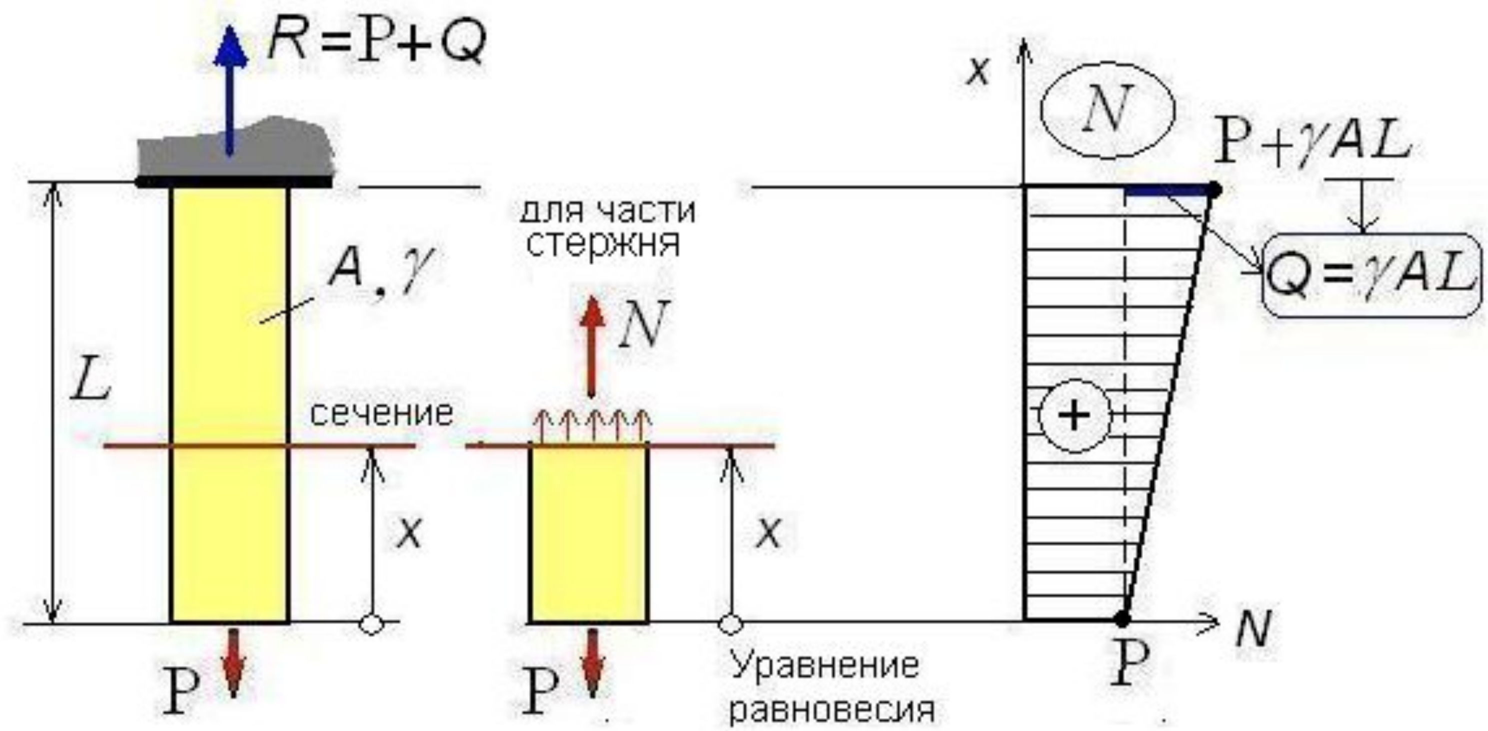
Жесткость определяется величиной перемещений.

Условие жескости: $\Delta_{max} \leqslant [\Delta]$ ← *назначается*

Растяжение (сжатие)

- это такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные силы N

1. Определение N и графическое представление



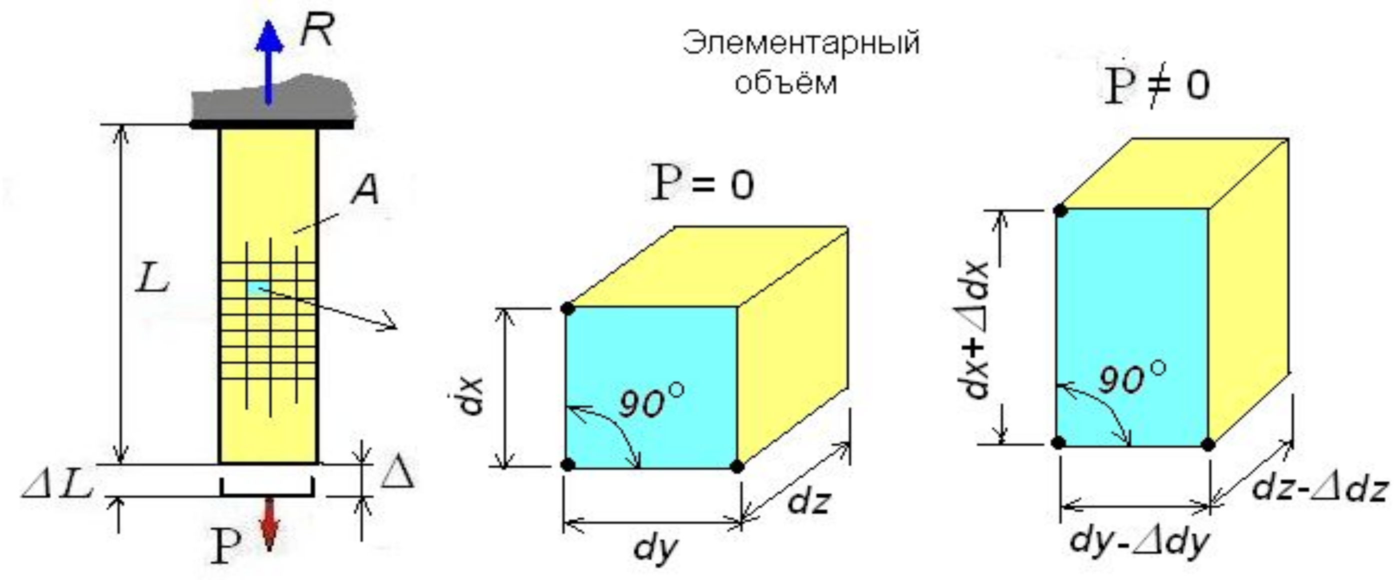
$$\sum X = N - P - \gamma A x = 0$$

$$\boxed{N = P + \gamma A x}$$

Строим график | $x = 0,\ N = P.$ / $x = L,\ N = P + \gamma A L.$

X изменяется в пределах $\boxed{0 \leqslant x \leqslant L}$

2. Перемещения, деформации



$$dx = dy = dz$$

ΔL — изменение длины стержня

Δ — перемещение концевого сечения

$\Delta = \Delta L$ перемещение сечения определяется через изменение длиы стержня

$\Delta dx, \Delta dy, \Delta dz$ — изменение размеров элементарного объёма

Деформации: продольная $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta dx}{dx}$

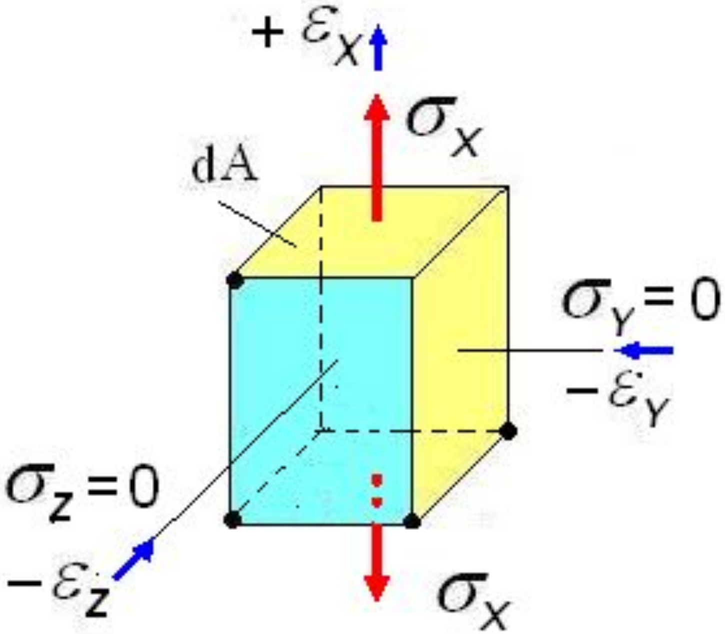
поперечные $\varepsilon_y = \dfrac{\Delta dy}{dy}$, $\varepsilon_z = \dfrac{\Delta dz}{dz}$

для изотропного материала

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z$$

Коэффициент Пуассона : $\mu = \dfrac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$ **отношение поперечной дефомации к продольной**

3. Связь напряжений с деформациями. «Закон Гука».



$$\boxed{\sigma_X = E \cdot \varepsilon_X}$$

***E* – Модуль упругости**

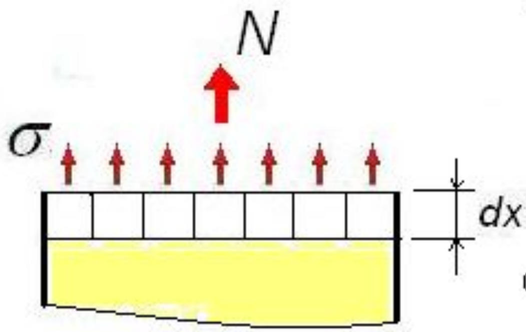
(нормальный Модуль,
Модуль упругости первого рода (Юнга)

Выражение поперечных деформаций через продольную

$$\varepsilon_Y = \varepsilon_Z = -\mu \cdot \varepsilon_X$$

4. Определение напряжений

В слое dx все элементарные объёмы деформируются одинаково, следовательно, и напряжения по сечению стержня распределены равномерно.



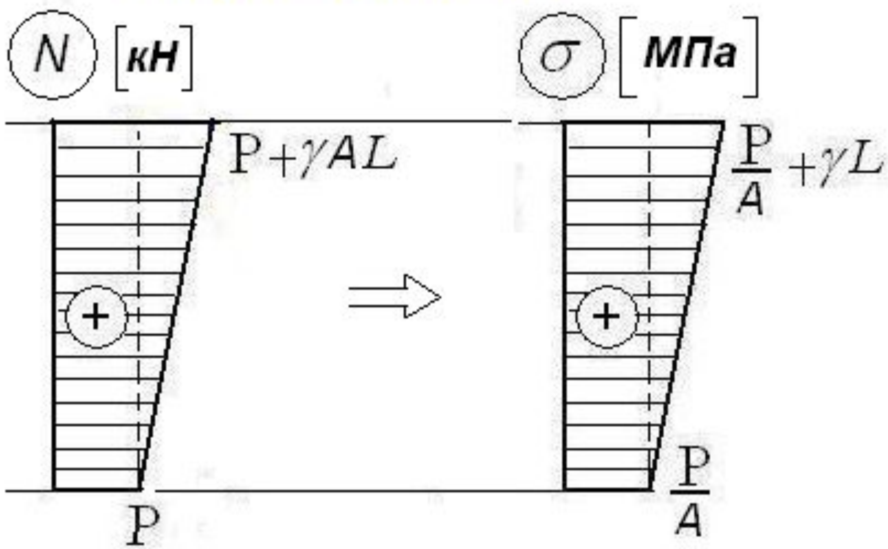
Результирующая напряжений по площади его:

$$N = \int_A \sigma \, dA = \sigma \cdot \int_A dA = \sigma \cdot A$$

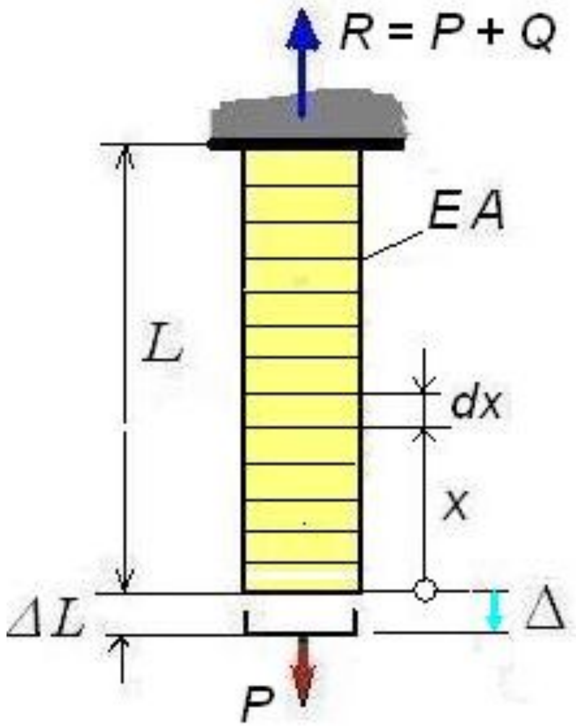
Соответственно, напряжения вычисляются по формуле:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

Построение диаграммы σ



5. Определение изменения длины стержня



Все слои стержня dx получают изменения Δdx

По определению: $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta dx}{dx}$.

Следовательно, $\Delta dx = \varepsilon_x \cdot dx$

По закону Гука: $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$, где $\sigma_x = \dfrac{N}{A}$.

$$\boxed{\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \frac{N}{EA} dx}$$

Это выражение позволяет определить изменение длины стержня при любом распределении внутренних сил по его длине.

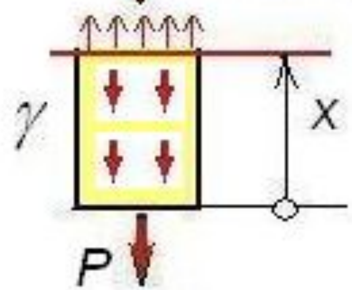
Произведение модуля упругости на площадь поперечного сечения стержня

EA называется ***жесткость стержня при растяжении (сжатии)***

Модуль упругости E, соответственно, называют также ***жесткость материала***

Для стержня под действием сосредоточенной силы P

и собственного веса $Q = \gamma A L$

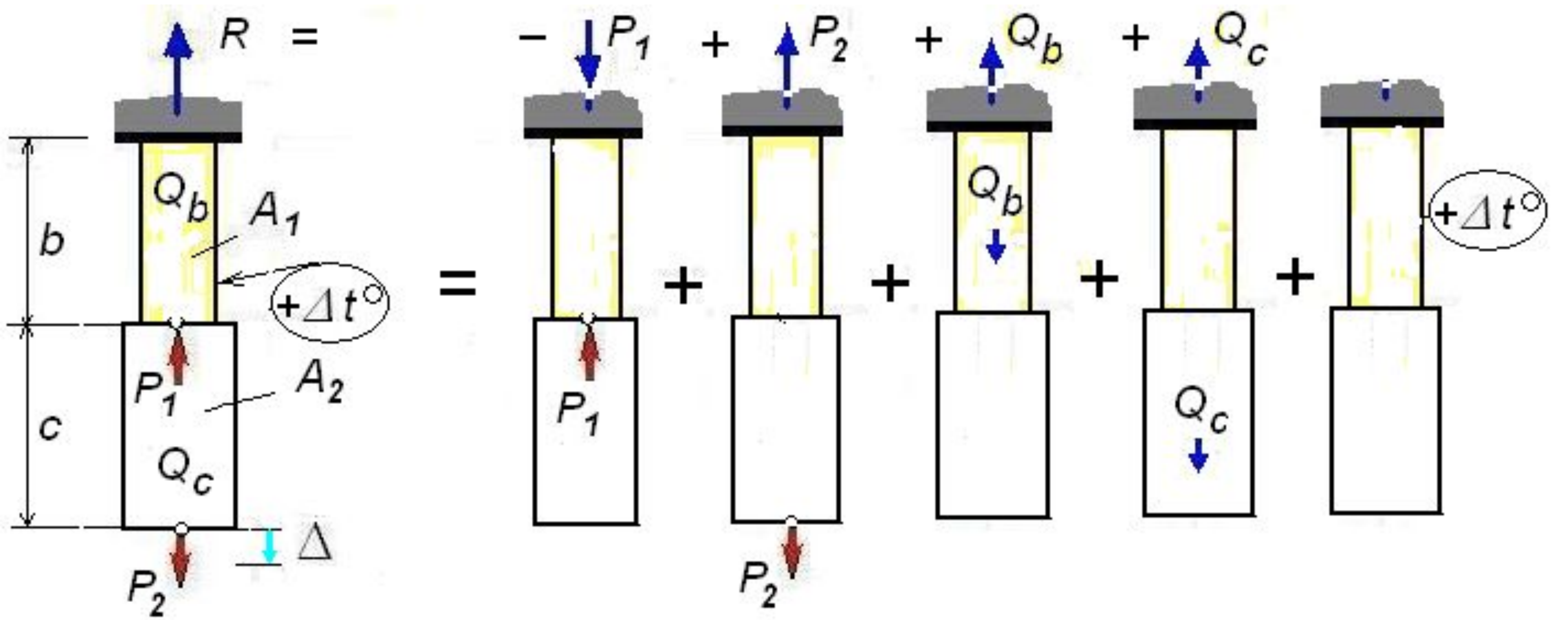


$$\Delta L = \int_0^L \frac{P + \gamma A x}{EA} dx = \frac{P}{EA}\int_0^L dx + \frac{\gamma A}{EA}\int_0^L x\, dx = \frac{PL}{EA} + \frac{\gamma A L^2}{2EA}.$$

Действие сосредоточенной силы	Действие собственного веса стержня
$\Delta L_P = \dfrac{PL}{EA}$	$\Delta L_Q = \dfrac{QL}{2EA}$

Принцип независимости действия сил
(принцип суперпозиции)

Эффект одновременного действия сил равен сумме эффектов производимых отдельно каждой силой (только для линейно-упругих тел) .



$$\Delta = \begin{cases} \Delta b = -\dfrac{P_1 \cdot b}{EA_1} + \dfrac{P_2 b}{EA_1} + \dfrac{Q_b \cdot b}{2EA_1} + \dfrac{Q_c \cdot b}{EA_1} + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot b \\ \Delta c = 0 + \dfrac{P_2 \cdot c}{EA_2} \quad 0 + \dfrac{Q_c \cdot c}{2EA_2} \quad 0 \end{cases}$$

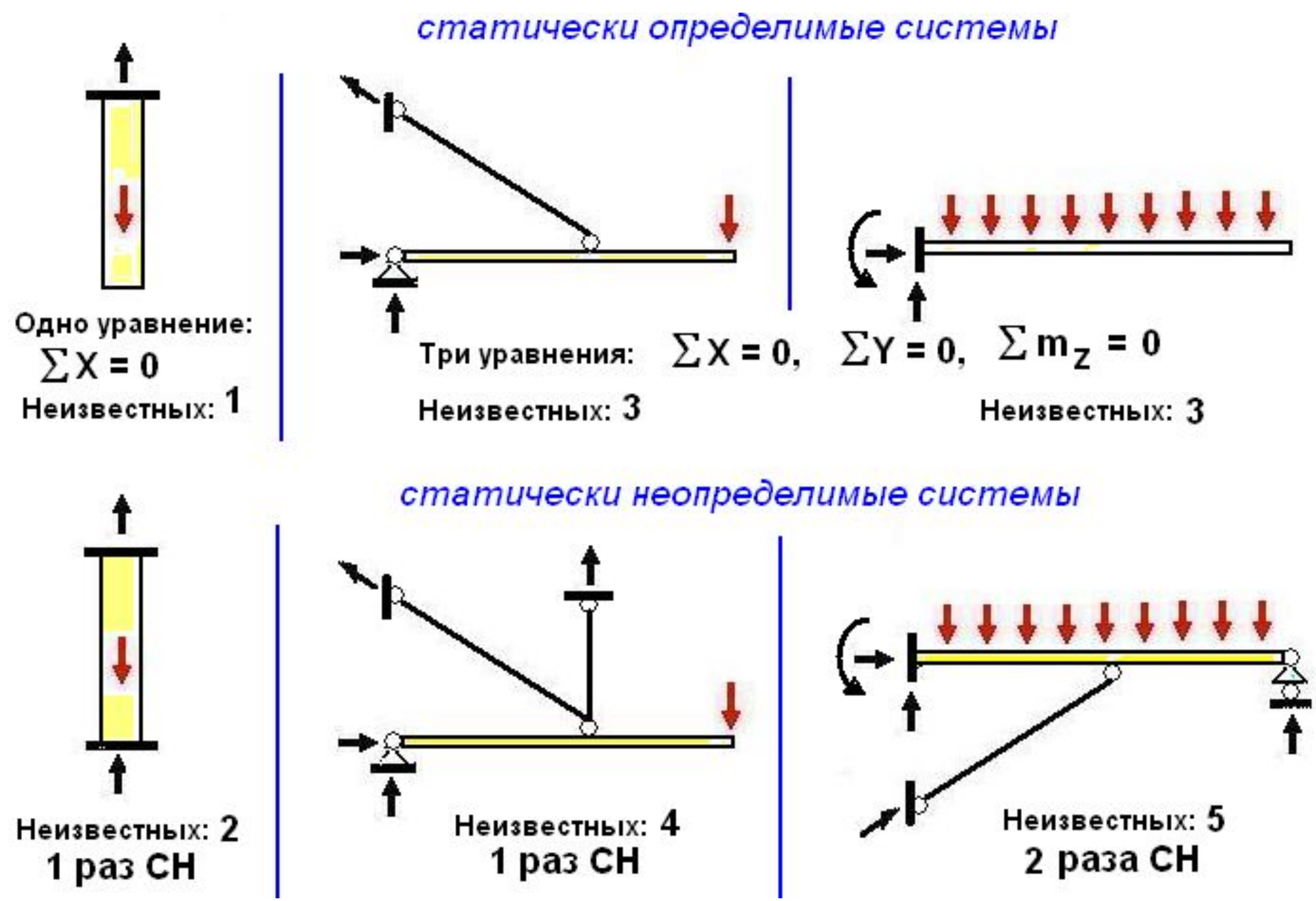
Системы статически неопределимые (СНС)

Это такие системы, при расчёте которых для определения действующих сил не хватает уравнений статики (равновесия)

(связей больше, чем необходимо для обеспечения неподвижности системы)

(уравнений меньше, чем неизвестных).

Разность межу числом неизвестных и числом уравнений определяет степень статической неопределимости.

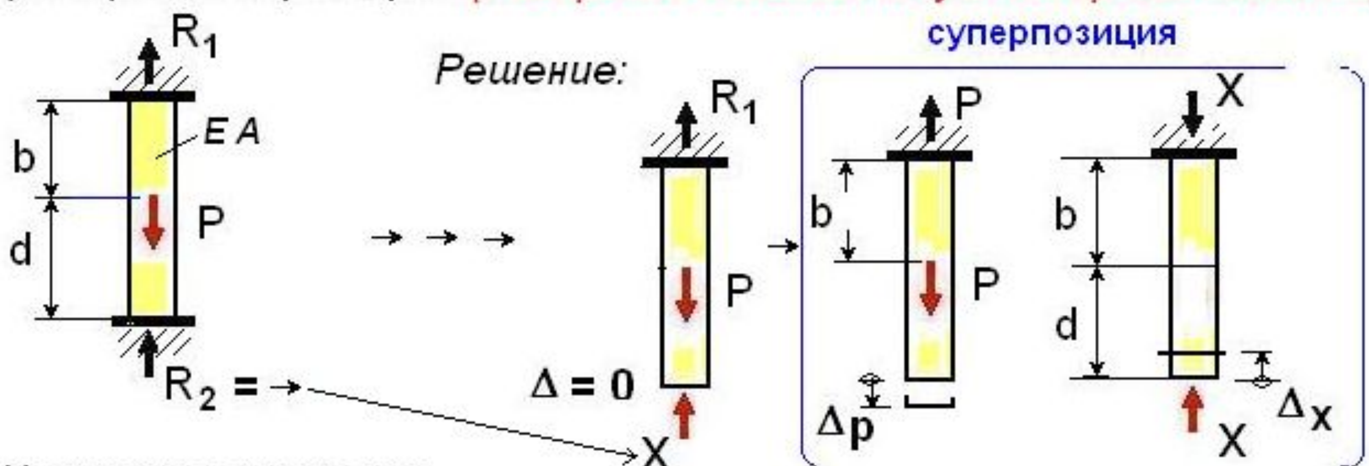


С математической точки зрения, чтобы иметь решение необходимо иметь столько уравнений, сколько имеется неизвестных.

При расчёте СНС уравнения статики дополняются уравнениями, число которых равно степени статической неопределимости.

Эти дополнительные уравнения составляются из очевидного соображения: система деформируется точно в соответствии с наложенными на неё связями.

Пример: Найти реакции. *(Раскрыть статическую неопределимость)*



Уравнение равновесия:

1) $\sum X = R_1 + R_2 - P = 0$

Дополнительное уравнение:

2) $\Delta = 0$

(изменение длины стержня отсутствует); перемещение нижнего сечения равно нулю.

$$\Delta = \Delta p + \Delta x = 0$$

$$2)\quad \Delta = \frac{Pb}{EA} - \frac{X(b+d)}{EA} = 0.$$

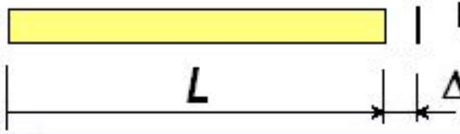
из 2): $X = R_2 = \dfrac{Pb}{(b+d)}$.

из 1): $R_1 = P - R_2 = \dfrac{Pd}{(b+d)}$.

После раскрытия статической неопределимости внутренние усилия определяются как в системе статически определимой.

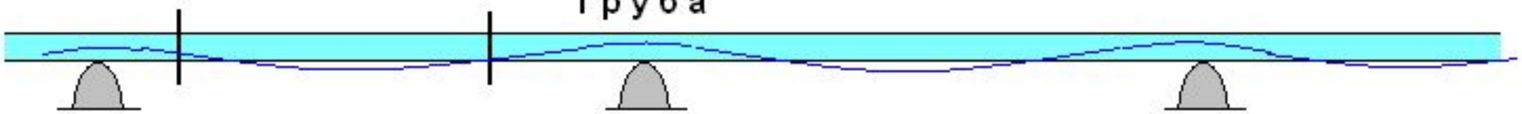
Температурные напряжения

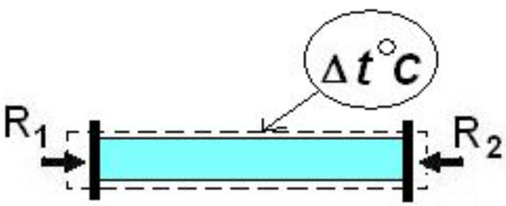
Изменение температуры: $\Delta t = t_к - t_н$



Изменение длины стержня:

$\Delta L_t = \alpha_t \cdot L \cdot \Delta t$ (α_t – температурный коэффициент)



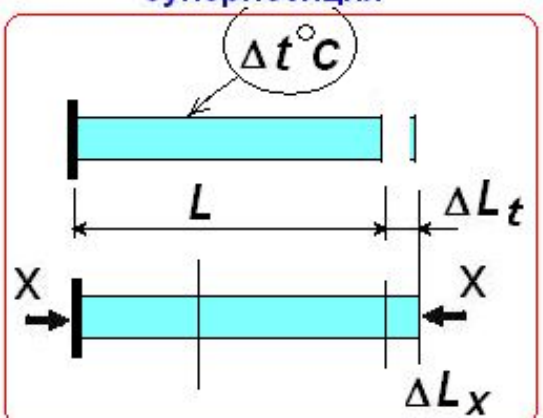


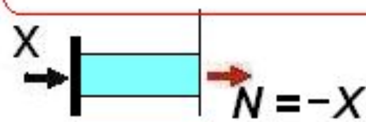
1) $\sum X = R_1 - R_2 = 0$

$R_1 = R_2 = X$

Система 1 раз СН

суперпозиция





$$\Delta L_t - \Delta L_X = 0$$

$$\alpha_t \cdot L \cdot \Delta t = \frac{XL}{EA}$$

$$X = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot EA$$

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} = -\alpha_t \cdot \Delta t \cdot E}$$

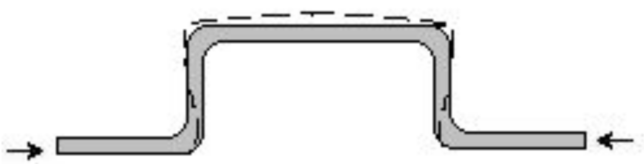
Велики ли эти напряжения?

Летом температура + 30 , зимой - 40
Материал: сталь

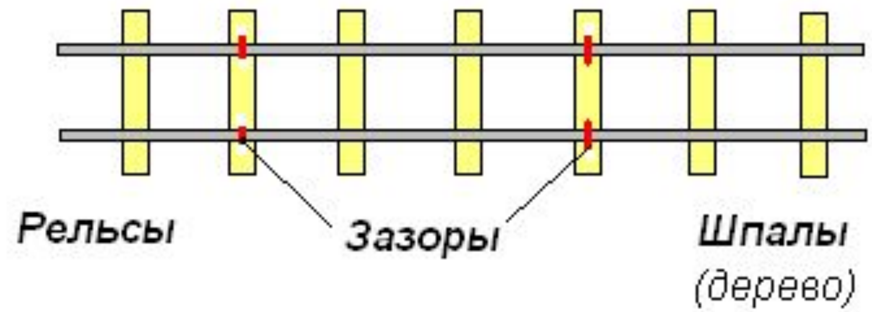
$\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6}\ 1/{}^\circ C$, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа $\qquad \sigma = -12 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 = -176{,}4$ МПа

Температурные напряжения возникают только в СНС.

Температурные компенсаторы

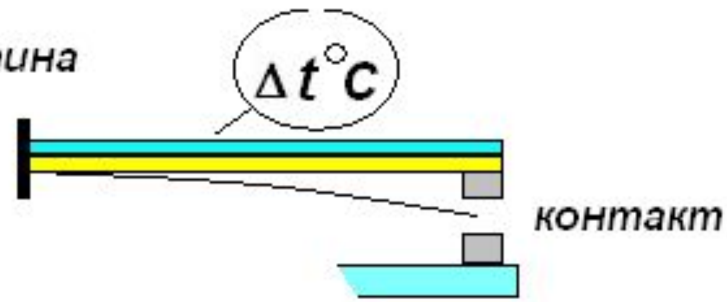


Трубы



На бетонных шпалах рельсы без зазоров.
На таких рельсах колёса стучат.

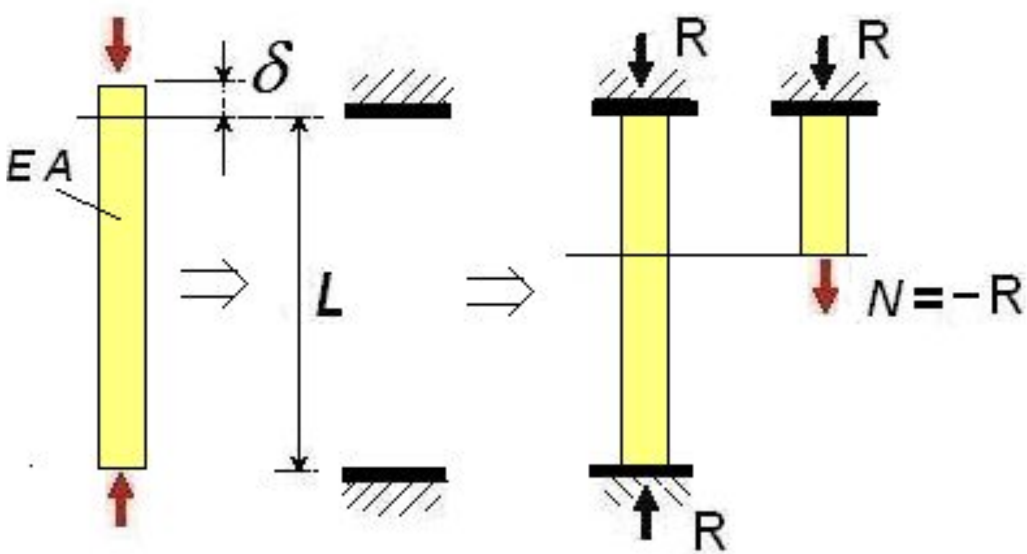
Биметалическая пластина



Монтажные напряжения

возникают только в статически неопределимых системах

Le Montage - Сборка



$$\delta = \frac{R\,L}{E\,A}, \qquad R = \frac{\delta}{L}\,E\,A.$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{\delta}{L}\cdot E.$$

Разновидности расчётов элементов конструкций и конструкций

1. *Проектный расчёт* (определение размеров поперечных сечений стержней)

При растяжении (сжатии): Определяются внутрение усилия в стержнях N_i

Из условия прочности: $\boxed{\sigma = \frac{N}{A} \leqslant [\sigma]}$ находятся площади $A_i \leqslant \frac{N_i}{[\sigma]}$

---

2. *Проверочный расчёт* (уточняющий проектный)

Определяются внутрение усилия в стержнях N_i и напряжения в стержнях $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}$.

Максимальное значение сравнивается $\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$ *с допускаемым напряжением*

или определяется реальный коэффициент запаса $n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}}$. *необходимо обеспечить* $\boxed{n \geqslant [n]}$

Выбором материала и, соответственно, $\sigma_{пред}$ *этим расчётом обеспечивается разработанная конструкция без существенных изменений.*

---

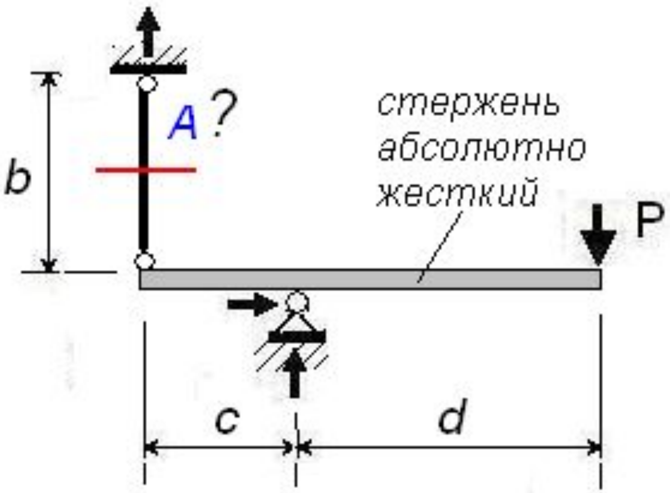
3. *Определение допускаемых нагрузок* *(для готовых конструкций)*

Определяются допускаемые внутренние усилия $N_i \leqslant A_i [\sigma]$

и из условий равновесия устанавливаются допускамые нагрузки $[P] = \cdots$

Аналогичные расчёты производятся и по условию жёсткости $\Delta_{max} \leqslant [\Delta]$

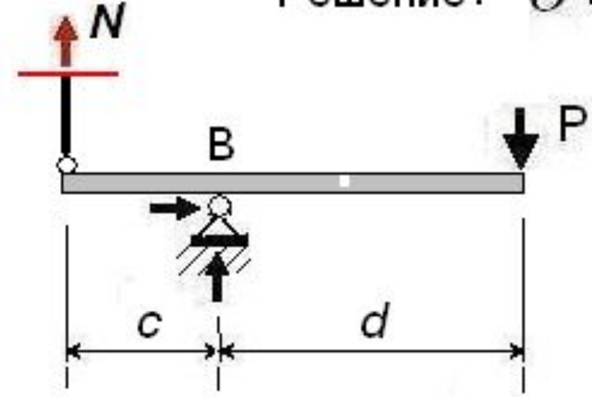
Пример проектного расчёта по условию прочности (система статически определима)



Дано: Материал (E , $[\sigma]$),(b, c, d), P

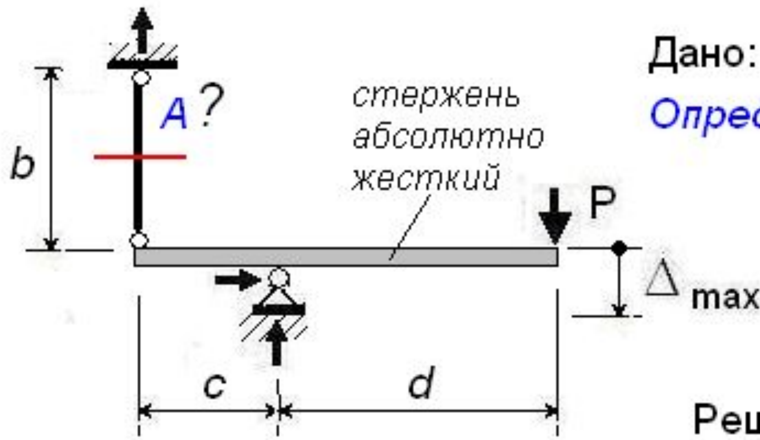
Определить: A (площадь стержня).

Решение: $\sigma = \dfrac{N}{A} \leqslant [\sigma]$



$$\sum m_B = \boldsymbol{N} \cdot c + P \cdot d = 0, \quad \boldsymbol{N} = -\frac{P \cdot d}{c}, \quad A \geqslant \frac{P \cdot d}{c\,[\sigma]}.$$

Пример проектного расчёта по условию жёсткости



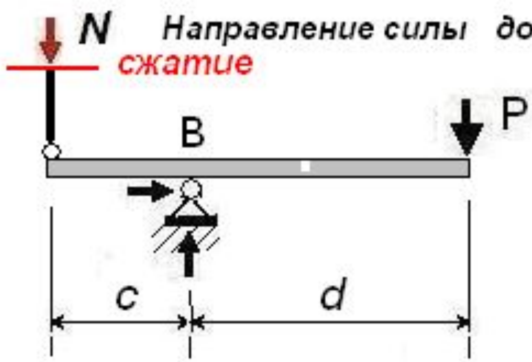
Дано: Материал (E , $[\Delta]$),(b, c, d), P

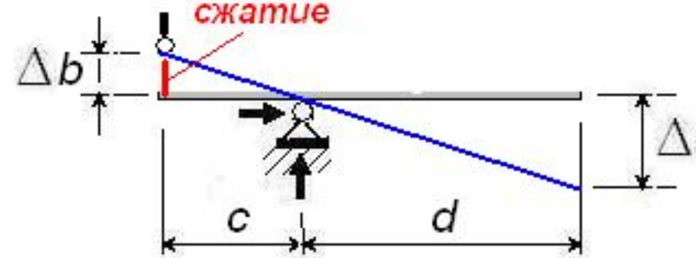
Определить: A (площадь стержня).

Решение: $\Delta_{max} \leqslant [\Delta]$

Схема сил *Геометрия деформирования*

Направление силы должно соответствовать её действию





$$\sum m_B = N \cdot c - P \cdot d = 0, \rightarrow N = \frac{P \cdot d}{c}$$

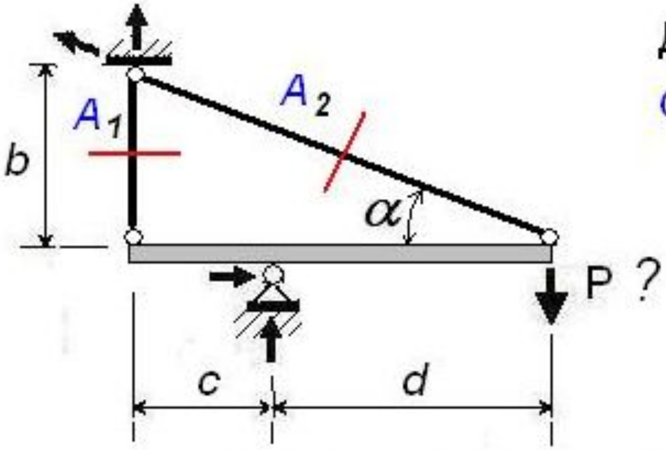
Из подобия треугольников:

$$\frac{\Delta b}{c} = \frac{\Delta}{d}, \rightarrow \Delta = \Delta b \cdot \frac{d}{c},$$

По закону Гука:

$$\Delta b = \frac{N b}{E A} = \frac{P \cdot d \cdot b}{c \cdot E A}, \quad \Delta = \frac{P \cdot d \cdot b}{c \cdot E A} \cdot \frac{d}{c} \leqslant [\Delta] \quad \rightarrow \quad \boxed{A \geqslant \frac{P \cdot d^2 \cdot b}{c^2 \cdot E \cdot [\Delta]}}$$

Пример определения допускаемой нагрузки для СНС по условию прочности



Дано: Материал (E , $[\sigma]$),(b, c, d), A_1, A_2

Определить: [P]

Решение:

Уравненя статики: $\sum X = 0,\ \sum У = 0,\ \sum m_z = 0.$

Неизвестных усилий (реакций): 4

Система 1 раз СН. Необходимо составить одно дополнительное уравнение.

Целесообразно вначале получить дополнительное уравнение.

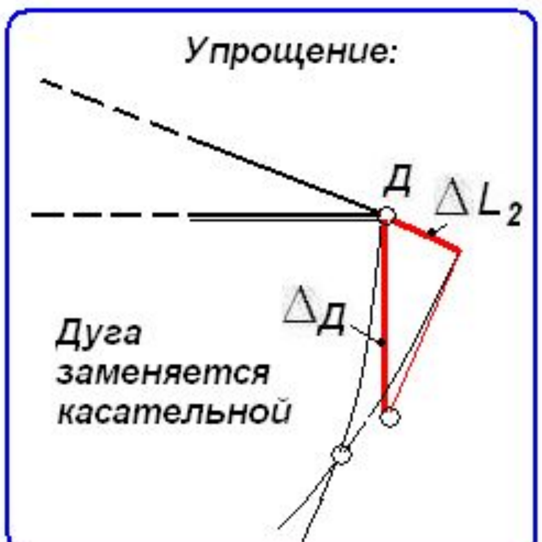
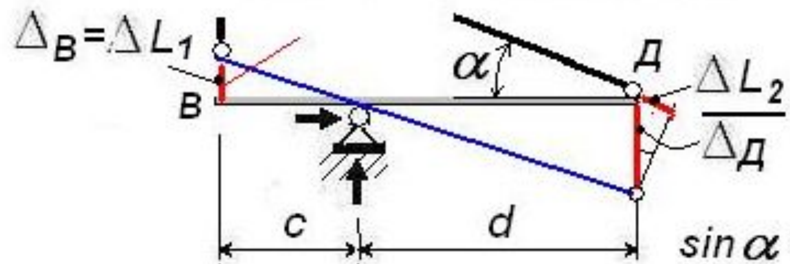


Схема деформирования



$$\frac{\Delta L_2}{\Delta_Д} = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + (c+d)^2}}$$

Дополнительное уравнение

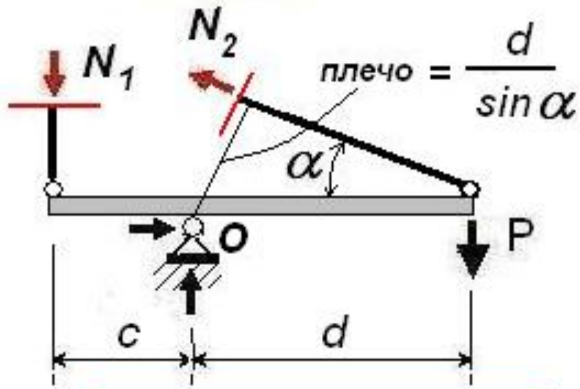
$$\frac{\Delta_B}{\Delta_Д} = \frac{c}{d}, \quad \Delta_B = \Delta L_1, \quad \Delta_Д = \frac{\Delta L_2}{\sin\alpha},$$

$$\boxed{\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{c}{d \sin\alpha}}.$$

Уранение связывающее изменение длин стержня в системе называется уранением совместности деформаций.

Схема сил

Направление внутренних сил должно соответствовать представленной схемой деформирования.



Для достижения цели нет необходимости определять реакции в опорах, поэтому запишем уравнение

$$\Sigma m_O = N_1 \cdot c + N_2 \frac{d}{\sin\alpha} - P \cdot d = 0 \quad (1)$$

Дополнительное уравнение следует из уравнения совместности деформаций (перемещений) при выражении изменений длин стержней по закону Гука:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA_1}, \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA_2}. \quad \frac{N_1 L_1 \; EA_2}{EA_1 \; N_2 L_2} = \frac{c}{d \; \sin\alpha}. \quad \boxed{\frac{N_1}{N_2} = \underbrace{\frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{EA_1}{EA_2} \cdot \frac{c}{d \sin\alpha}}_{K}} \quad (2)$$

Из выражения (2) следует важный вывод: в СНС можно управлять внутренними усилиями, изменяя Жесткости стержней.

Следуют 2 варианта:

$$N_1 = N_2 \cdot K, \qquad N_2 \cdot K \cdot c + N_2 \frac{d}{\sin\alpha} - P \cdot d = 0 \quad \text{при } N_2 = [\sigma] A_2,$$

Из (1)

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{1}{K}, \qquad N_1 \cdot c + N_1 \cdot \frac{1}{K} \frac{d}{\sin\alpha} - P \cdot d = 0 \quad \text{при } N_1 = [\sigma] A_1$$

1. $[P]_1 = [\sigma] A_2 \left(K \cdot c + \frac{d}{\sin\alpha}\right) \frac{1}{d}$

2. $[P]_2 = [\sigma] A_1 \left(c + \frac{1}{K} \frac{d}{\sin\alpha}\right) \frac{1}{d}$

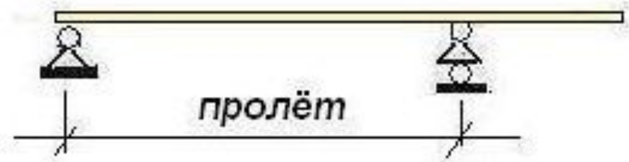
$$[P]_{min} = [P]$$

И З Г И Б **(П Л О С К И Й, П О П Е Р Е Ч Н Ы Й)**

Консоль (консольная балка)

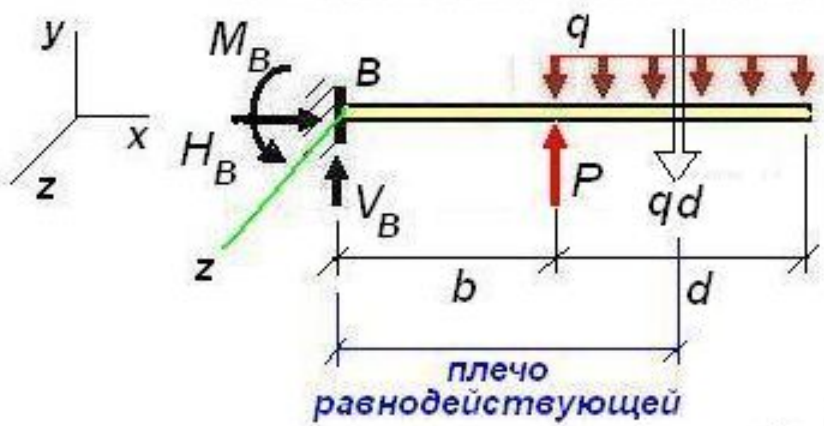
2.

Двухопорная (однопролётная) балка с консолью



1. *Реакции*

Каждая реакция определяется из соответстующего уравнения:



$$\sum X = 0,\ \sum У = 0,\ \sum m_z = 0.$$

1. $\sum X = \underline{H_B = 0}.$

2. $\sum У = V_B + P - qd = 0$

$$\underline{V_B = -P + qd = \dots}$$

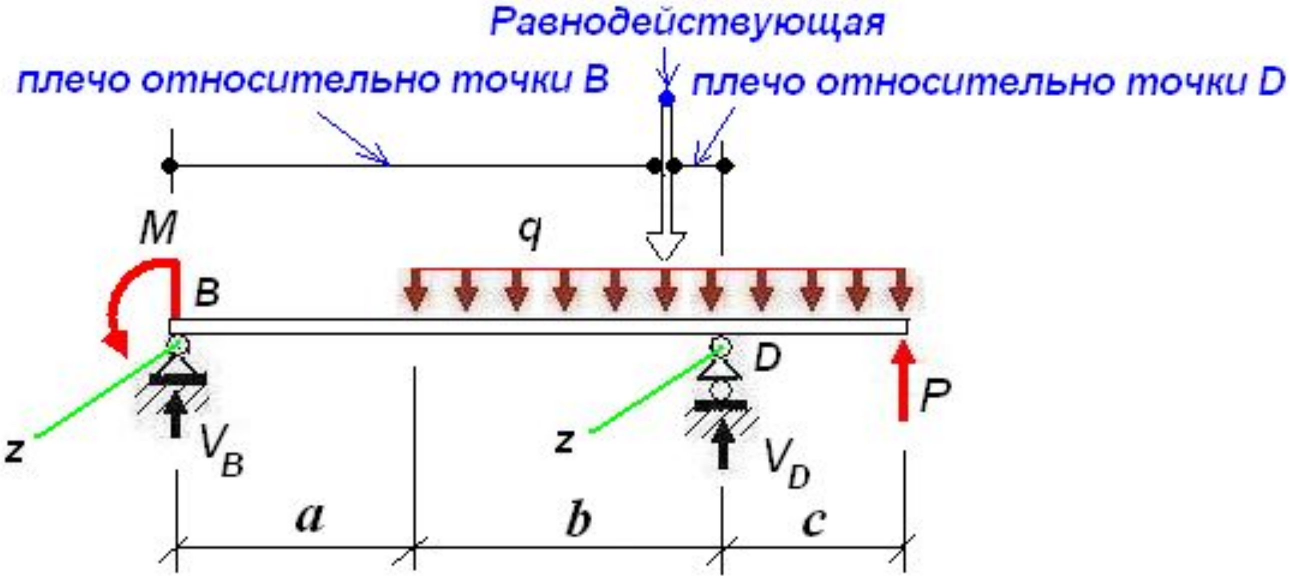
3. $\sum m_B = M_B + P\,b - q(b+d)\,(b+\frac{d}{2}) = 0$

вращение

$$\underline{M_B = -P\,b + q(b+d)\,(b+\frac{d}{2}) = \dots}$$

Балка на двух опорах

При вертикальной нагрузке горизонтальной реакции нет. Можно не изображать.



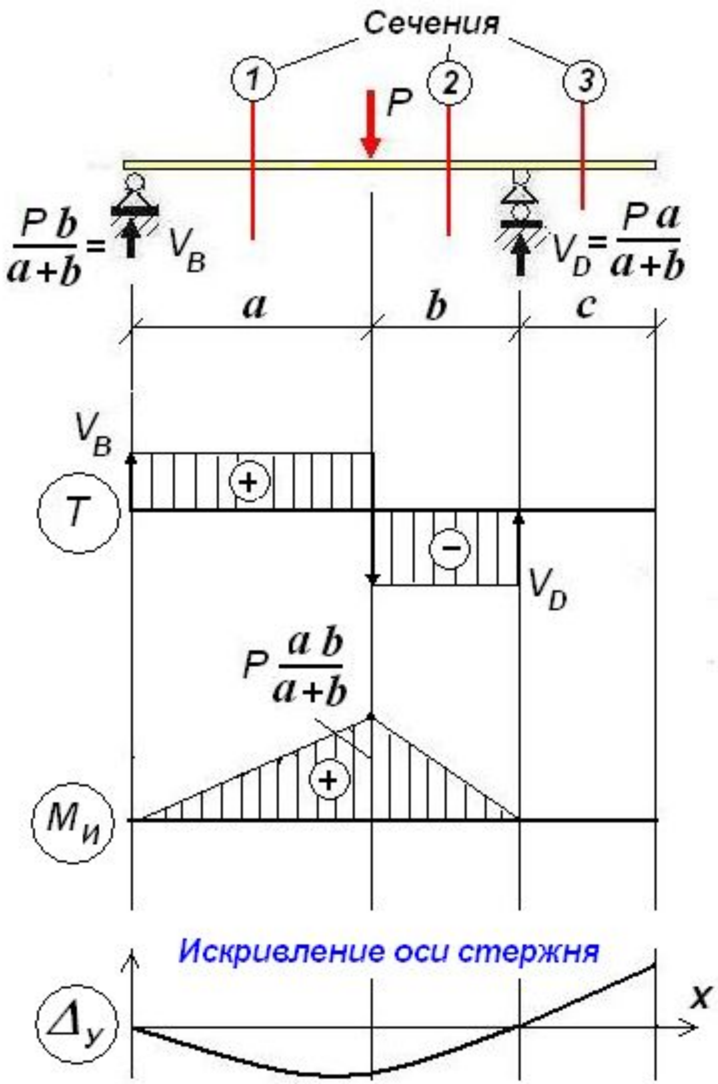
1. $\sum m_B = V_D(a+b) + P(a+b+c) + M - q(b+c)(a+\frac{b+c}{2}) = 0 \rightarrow V_D = \dots$

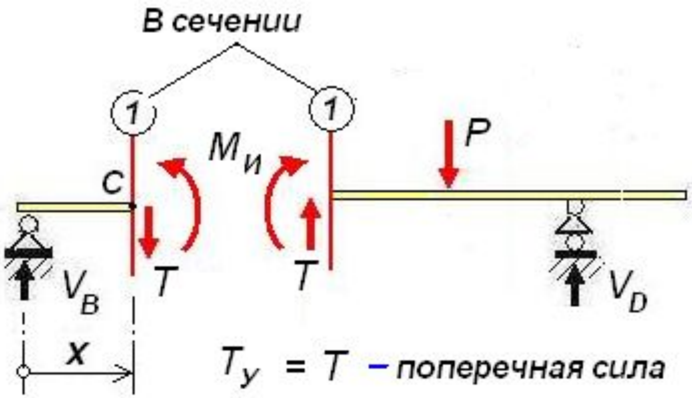
вращение

2. $\sum m_D = V_B(a+b) - Pc - M - q(b+c)(\frac{b+c}{2} - c) = 0 \rightarrow V_B = \dots$

3. Проверка: $\sum У = V_B + V_B + P - q(b+c) = ?$

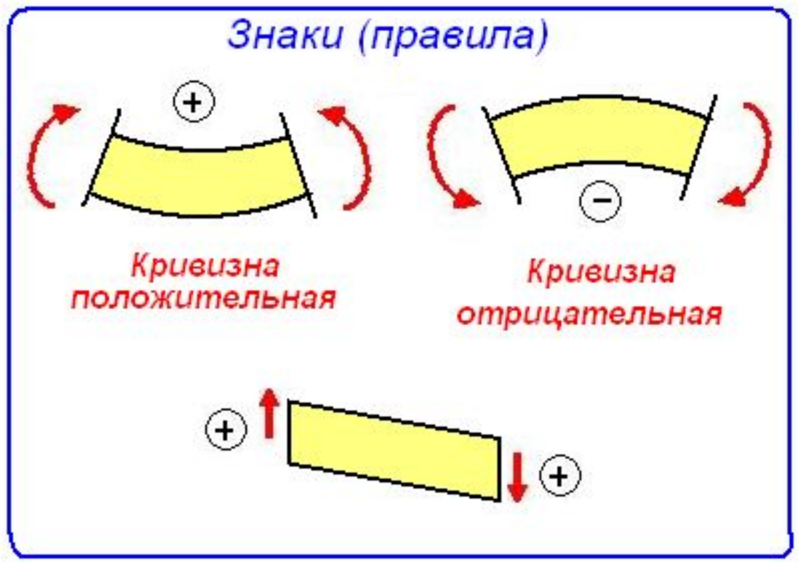
2. Внутренние силовые факторы



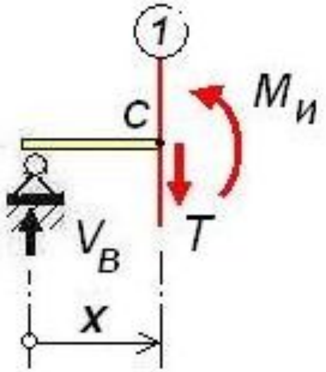


$T_y = T$ – поперечная сила

$M_z = M_и$ – изгибающий момент



В сечениях



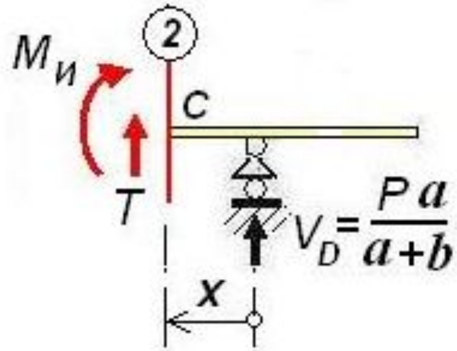
$0 \leqslant x \leqslant a$

1. $\sum У = T - V_B = 0$

$$T = V_B.$$

2. $\sum m_C = M_И - V_Б x = 0$

$$M_И = V_Б x.$$



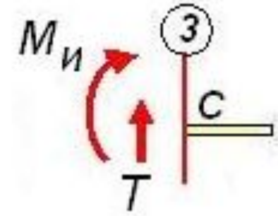
$0 \leqslant x \leqslant b$

1. $\sum У = T + V_D = 0$

$$T = V_D.$$

2. $\sum m_C = M_И - V \; x = 0$

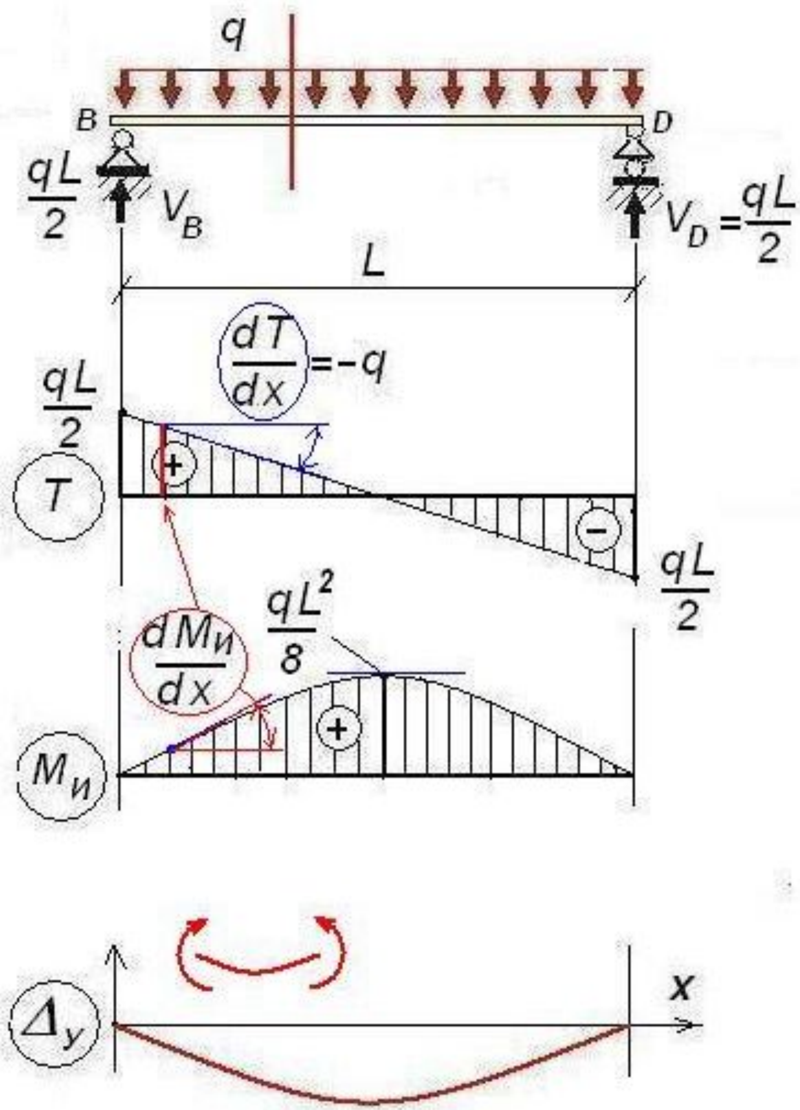
$$M_И = V_D x.$$

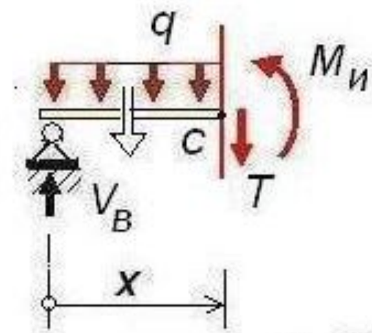


$$T = 0$$

$$M_И = 0$$

Пример 2





$0 \leqslant x \leqslant L$

1. $\sum У = T - V_B + qx = 0,$

$$\boxed{T = \frac{qL}{2} - qx.}$$

2. $\Sigma m_C = M_И - V_Б x + qx \cdot \frac{x}{2} = 0,$

$$\boxed{M_И = \frac{qL}{2} \cdot x - q\frac{x^2}{2}.}$$

Дифференциальные связи

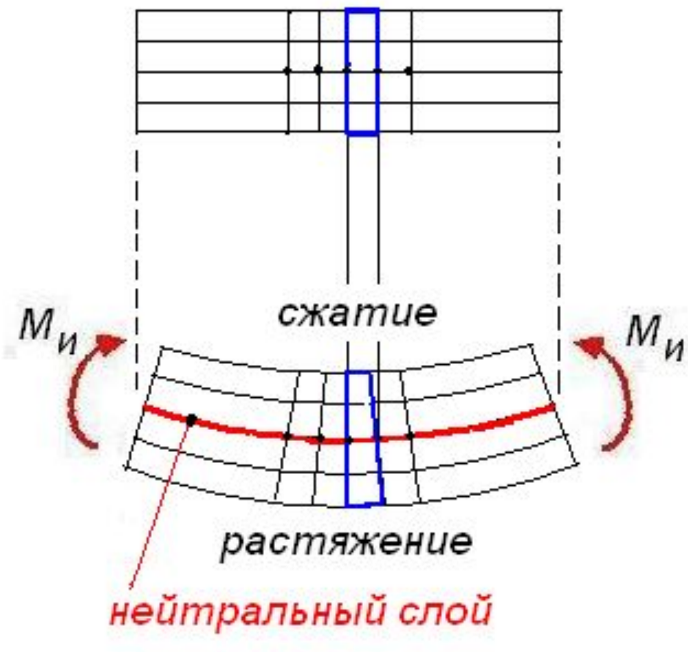
$$\frac{dM_И}{dx} = T, \quad \frac{dT}{dx} = \mp q.$$

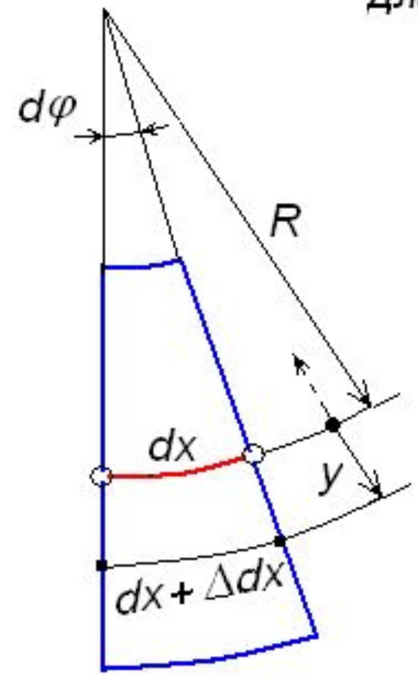
Эти связи служат для контороля правильности построения диаграмм $M_И$

При $\frac{dM_И}{dx} = 0$ *на диаграмме* $M_И$ *экстремум.*

При $\frac{dT}{dx} = 0$ *диаграмма* T *очерчена линиями параллельными оси, диаграмма* $M_И$ *прямыми линиями.*

Продольные деформации при изгибе стержня





Длина искривлённых отрезков:

$$dx = R \cdot d\varphi,$$

$$dx + \Delta dx = (R + y) \cdot d\varphi,$$

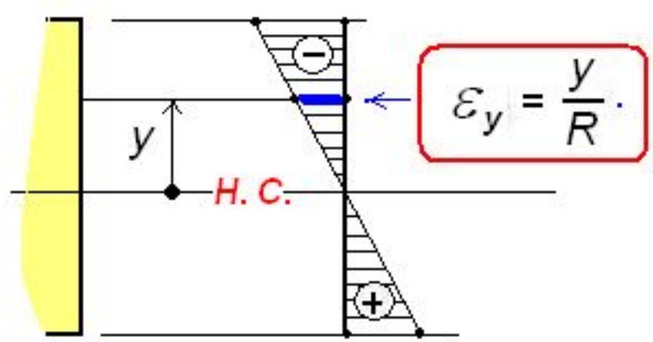
$$\frac{dx + \Delta dx}{dx} = \frac{(R + y) \cdot d\varphi}{R \cdot d\varphi},$$

$$1 + \frac{\Delta dx}{dx} = 1 + \frac{y}{R}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{y}{R}.$$

y отсчитывается от нейтрального слоя в обе стороны

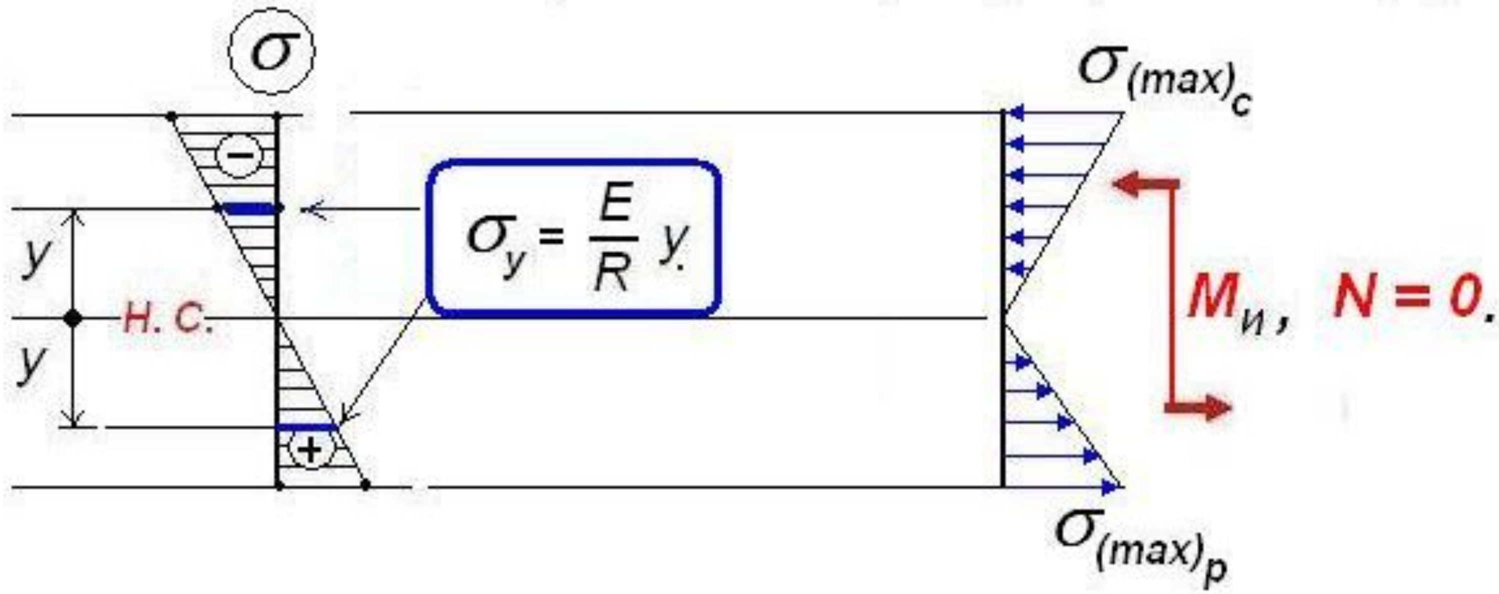
Распределение продольных деформаций по высоте поперечного сечения стержня



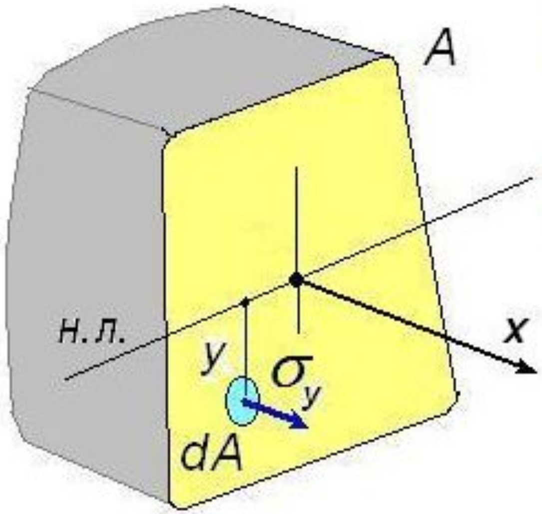
Распределение нормальных напряжений по высоте сечения стержня

По закону Гука $\sigma_y = E \cdot \varepsilon_y$

распределение нормальных напряжений повторяет распределение деформаций



Где находится Нейтральная Линия?



По определению: $\sigma_y \, dA = dN$.

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma_y \, dA = \frac{E}{R} \int_A y \cdot dA = 0.$$

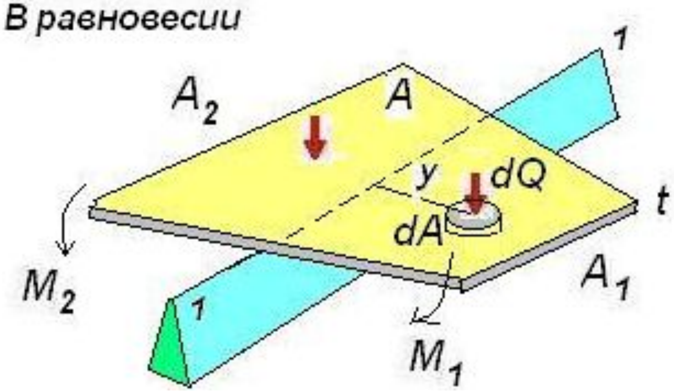
$$\boxed{\int_A y \cdot dA = S_{н.л.} = 0.}$$

ОТВЕТ: Нейтральная линия в сечении проходит через центр тяжести сечения (нейтральный слой для стержня проходит через ось стержня).

Оси, относительно которых Статический момент равен нулю называются ЦЕНТРАЛЬНЫМИ.

Используется для определения положения центра тяжести фигур.

В равновесии

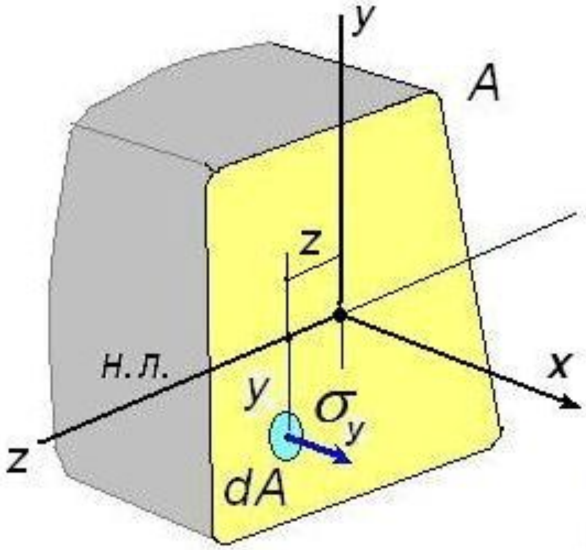


$$dQ = \gamma \cdot dA \cdot t$$

$$\sum m_{1\text{-}1} = M_1 - M_2 = \int_{A_1} y \cdot dQ - \int_{A_2} y \cdot dQ =$$

$$= \int_A y \cdot dQ = \gamma \cdot t \int_A y \cdot dA = \gamma \cdot t \boxed{S_{1\text{-}1} = 0.}$$

Какой паре осей сечения принадлежит Нейтральная Линия?



Составим уравнение моментов относительно оси У, нейтральную линию совместим с осью Z.

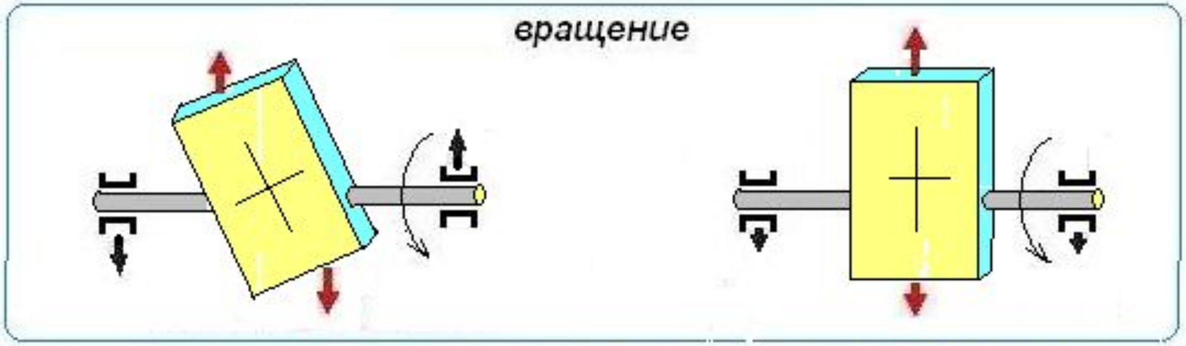
$$\sigma_y = \frac{E}{R} y.$$

$$M_y = \int_A \sigma_y \, dA \cdot z = \frac{E}{R} \boxed{\int_A y \cdot z \cdot dA = 0.}$$

$\int_A y \cdot z \cdot dA = J_{yz}$ - Центробежный момент инерции

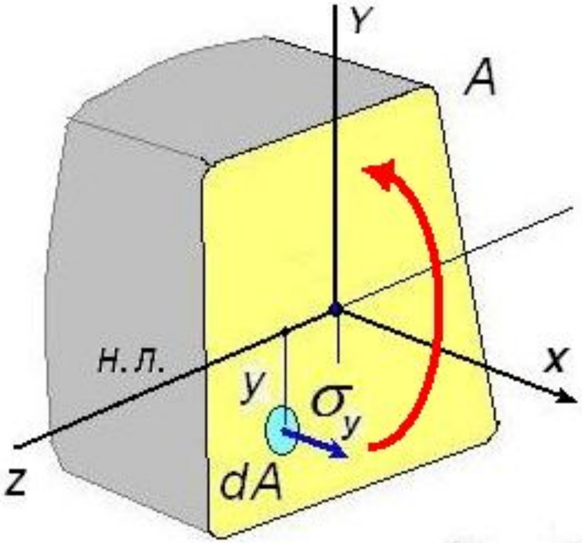
ОТВЕТ: Нейтральная линия принадлежит паре осей, относительно которых центробежный момент инерции сечения равен нулю.

Оси, относительно которых $J_{yz} = 0$ называются ГЛАВНЫМИ.



Ось симметрии всегда является ГЛАВНОЙ.

Связь изгибающего момента с напряжениями



ZY - главные центральные оси.

(Природа работает в этих осях!)

Изгибающий Момент:

$$M_Z = M_И = \int_A \sigma_y \, dA \cdot y = \frac{E}{R} \int_A y^2 \, dA = \frac{1}{R} E J_z .$$

1) $\boxed{\sigma_y = \frac{E}{R} y.}$

$$\int_A y^2 \, dA = J_z$$ – Осевой момент инерции

Момент инерции фигуры (сечения) относительно оси Z

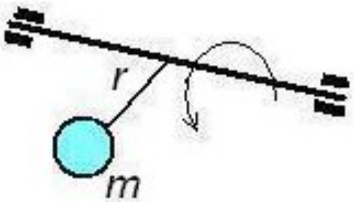
2) $\boxed{K = \frac{1}{R} = \frac{M_И}{E J_z}.}$

К - кривизна

$E J_z$ - жесткость стержня при изгибе

Из 1) и 2) следует формула вычисления напряжений: $\boxed{\sigma_y = \frac{M_И}{J_z} \cdot y.}$

Моменты инерции тела и плоских фигур (поперечных сечений стержня)



масса сосредоточенная

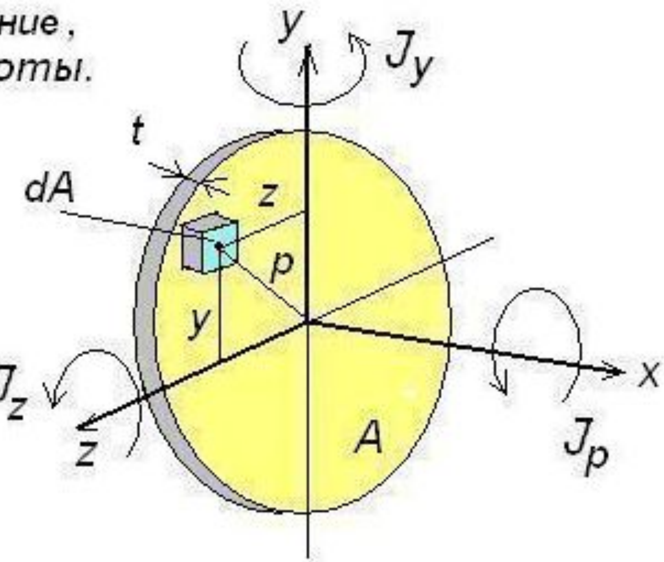
$$J_m = m \cdot r^2$$

масса распределённая

$$J_m = \int_V dm \cdot r^2$$

V - объём

вращение, повороты.



$$dm = \rho\, dV = \rho\, dA\, t$$

ρ -плотность материала

$$\boxed{p^2 = z^2 + y^2}$$

$$J_p = \rho t \int_A p^2\, dA$$

$$J_z = \rho t \int_A y^2\, dA$$

$$J_y = \rho t \int_A z^2\, dA$$

$$\boxed{J_p = J_z + J_y}$$

Для поперечных сечений стержня:

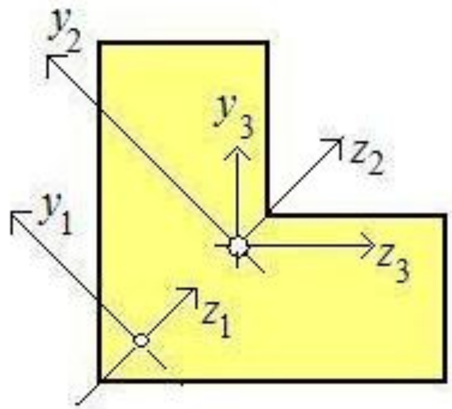
$$J_p = \int_A p^2\, dA$$ – Полярный момент инерции сечения.

$$J_z = \int_A y^2\, dA$$

$$J_y = \int_A z^2\, dA$$

Осевые моменты инерции сечения

Оси

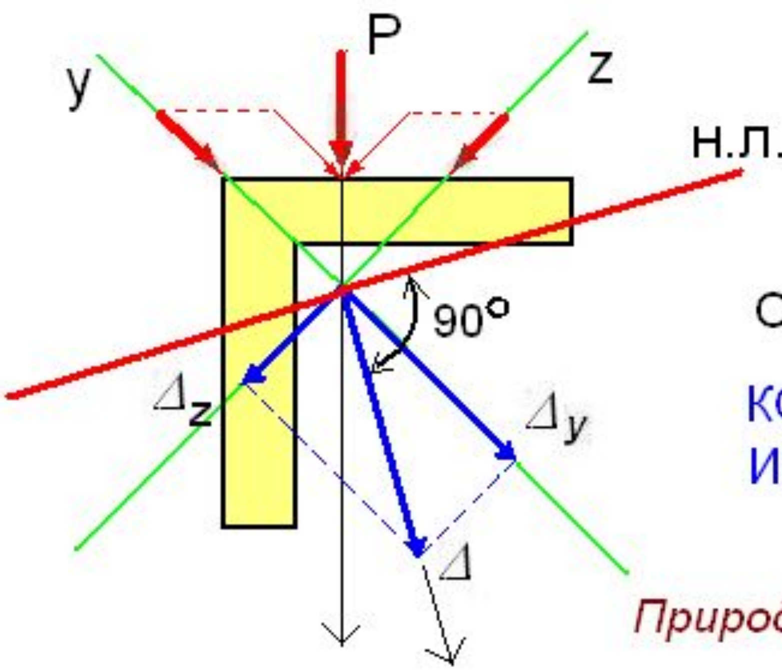


$y_1\ z_1$ – Главные

$y_2\ z_2$ – Главные Центральные

$y_3\ z_3$ – Центральные

Что получится, если нагрузка действует не по главным осям?



Ответ:

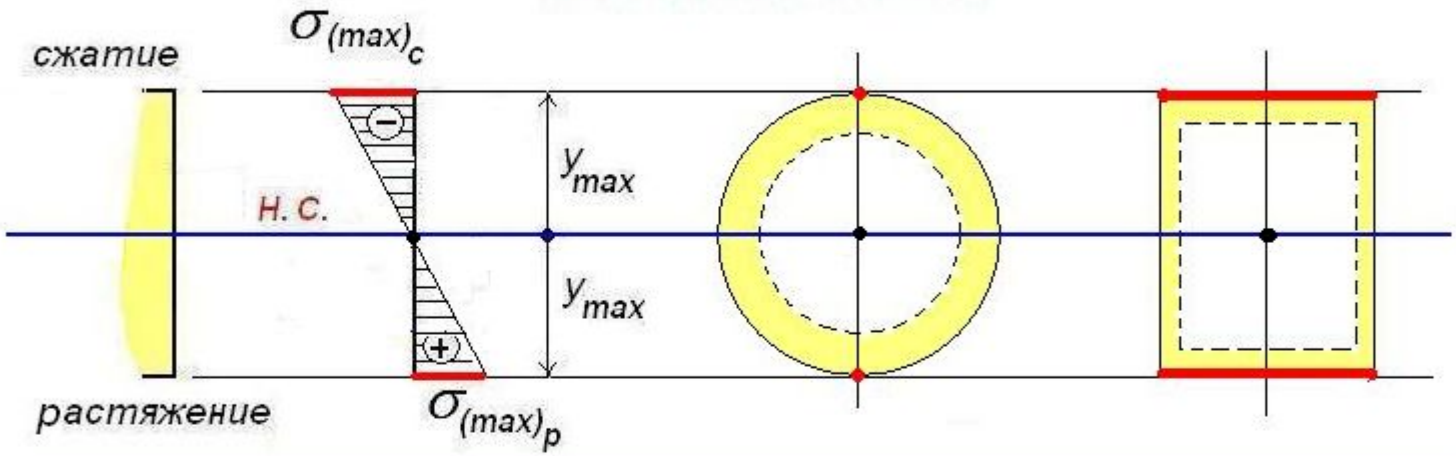
КОСОЙ ИЗГИБ.

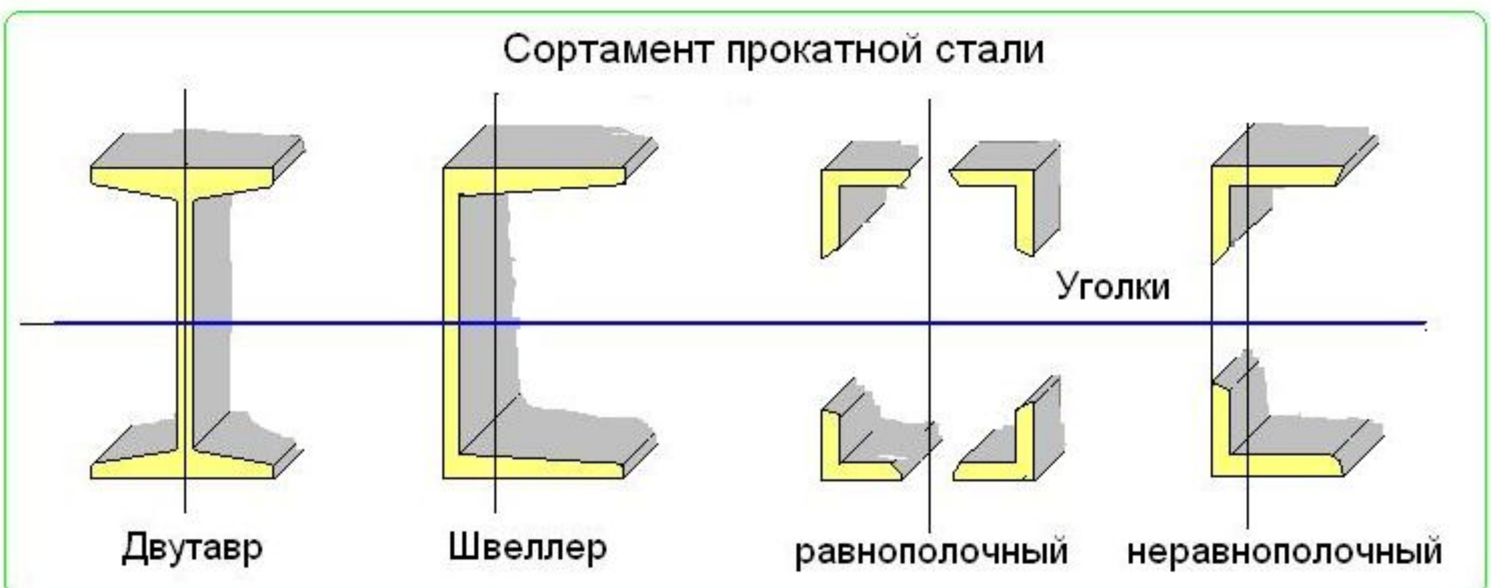
Природу не обманешь!

Закон природы: ***Материя, которая не работает, должна исчезнуть.***

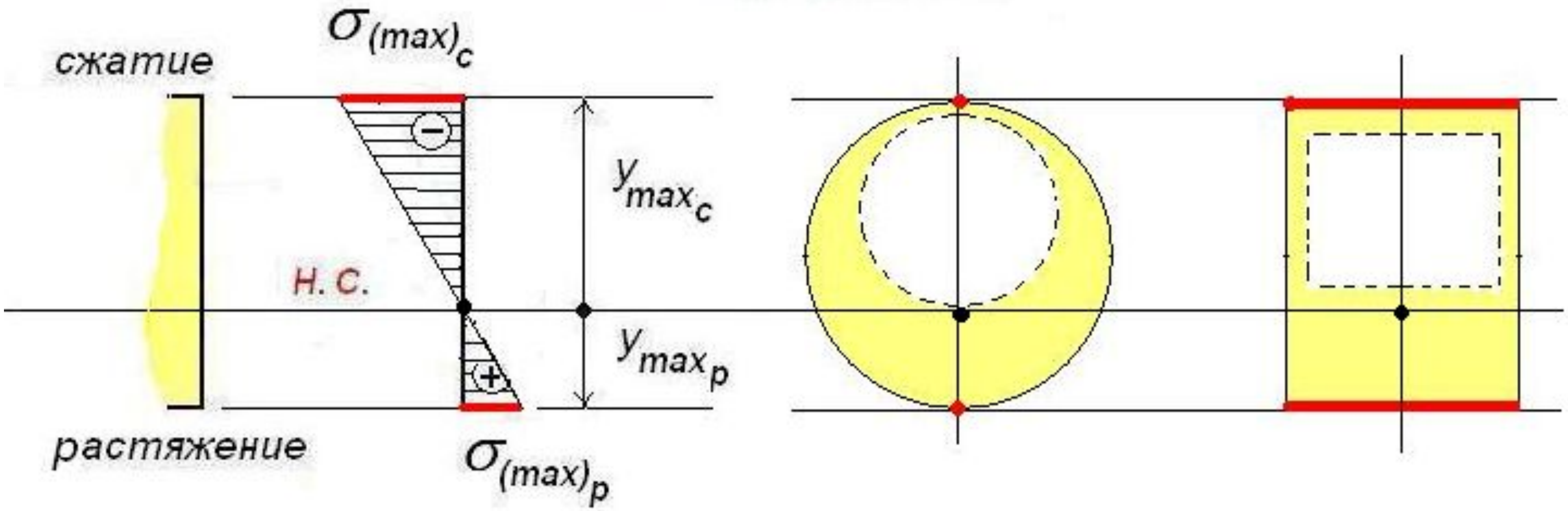
Рациональные формы поперечных сечений стержней в сопротивлении изгибу

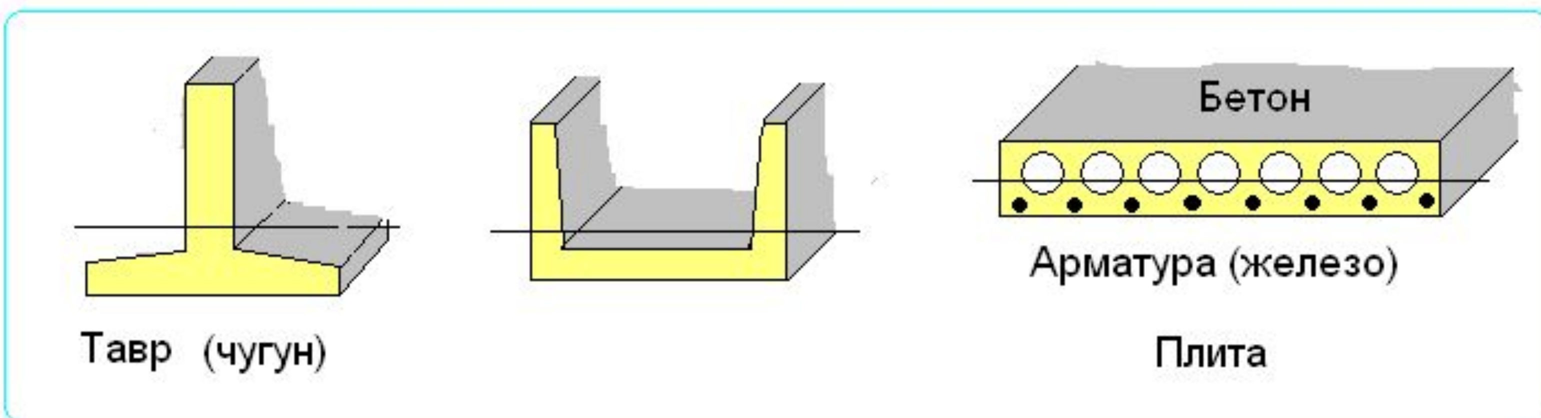
Материал пластичный *(практически одинаково сопротивляется растяжению и сжатию)*





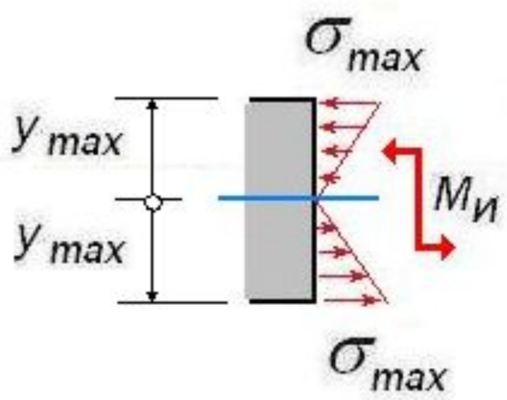
Материал хрупкий (хорошо сопротивляется сжатию, плохо растяжению)





Условия прочности при изгибе

Пластичный материал



$$\sigma_{max} = \frac{M_И}{J_z} \cdot y_{max} \leqslant [\sigma].$$

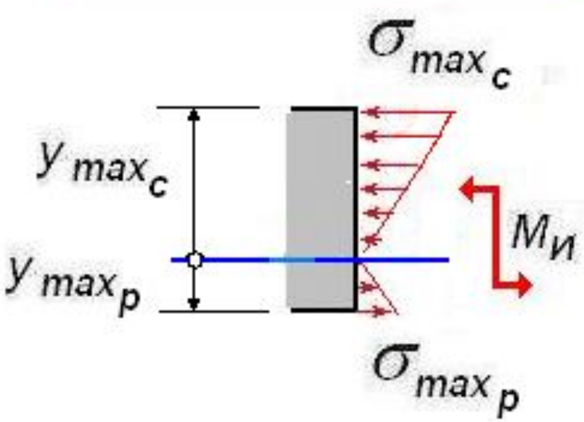
Вводится геометрическая характеристика сечения:

$$\frac{J_z}{y_{max}} = W_z \text{ - осевой момент сопротивления.}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_И}{W_z} \leqslant [\sigma].}$$

Хрупкий материал

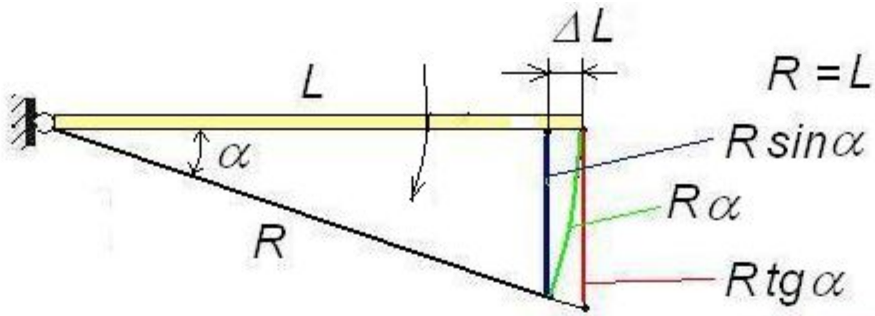
Необходимо удовлетворить 2 условия прочности:



$$\sigma_{max_c} = \frac{M_И}{J_z} \cdot y_{max_c} \leqslant [\sigma]_c$$

$$\sigma_{max_p} = \frac{M_И}{J_z} \cdot y_{max_p} \leqslant [\sigma]_p.$$

Упрощения (допущения) в анализе геометрии деформирования стержневых систем



$$R = L + \Delta L.$$

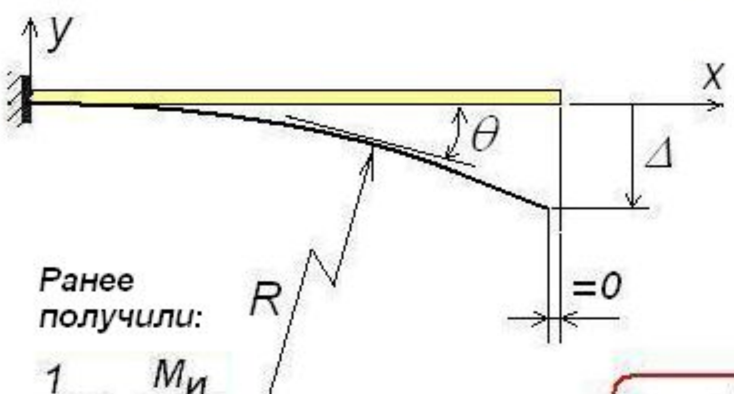
$$\sin\alpha = 0{,}1763.$$

Если $= 10^\circ$, α (рад) $= 0{,}1736.$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}1745.$$

Дуга заменяется касательной.

Стержень в изгибе



Ранее получили:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_и}{EJ_z}.$$

Из математики:

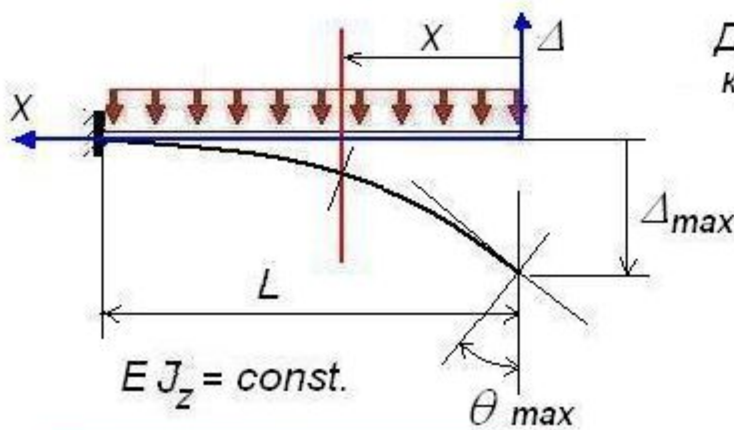
$$\frac{1}{R} = K = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\theta.$$

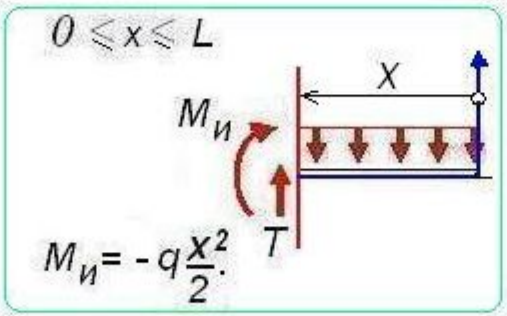
Если $\theta = 5^\circ$, $\left[1+\mathrm{tg}^2\theta\right]^{3/2} = 1{,}0115.$

$$\boxed{K = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ - Упрощенное выражение кривизны.}}$$

Определение геометрии деформирования ведётся в допущении "МАЛЫХ" поворотов поперечных сечений стержней.

Определение искривлённой оси изгибаемых стержней





Дифференциальное уравнение из 2-х выражений кривизны:

$$\frac{1}{R}=K=\boxed{\frac{d^2\Delta}{dx^2}=\frac{M_и}{EJ_z}}.$$

$$\frac{d^2\Delta}{dx^2}=-\frac{q\,x^2}{2EJ_z}.$$

Первое интегрирование:

$$d\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)=-\frac{q\,x^2}{2EJ_z}\cdot dx,\quad \frac{d\Delta}{dx}=tg\theta=\boxed{\theta=-\frac{q\,x^3}{6EJ_z}+C.\quad (1)}$$

Второе интегрирование:

$$d\Delta=\left(-\frac{q\,x^3}{6EJ_z}+C\right)dx,\qquad \boxed{\Delta=-\frac{q\,x^4}{24EJ_z}+Cx+D.\quad (2)}$$

C и D - постоянные интегрирования. Находятся из граничных условий:

Известно, что при $x=L$: 1) $\theta_L=0$, 2) $\Delta_L=0$.

Подставляя их в (1) и (2), находим: $C=\frac{qL^3}{6EJ_z}$, $D=\frac{qL^4}{24EJ_z}-\frac{qL^3}{6EJ_z}\cdot L=-\frac{qL^4}{8EJ_z}$.

(1) Уравнение углов поворота сечений стержня: $EJ_z\theta=-\frac{q\,x^3}{6}+\frac{qL^3}{6}.$

(2) Уравнение линейных перемещений (прогибов): $EJ_z\Delta=-\frac{q\,x^4}{24}+\frac{qL^3}{6}x-\frac{qL^4}{8}.$