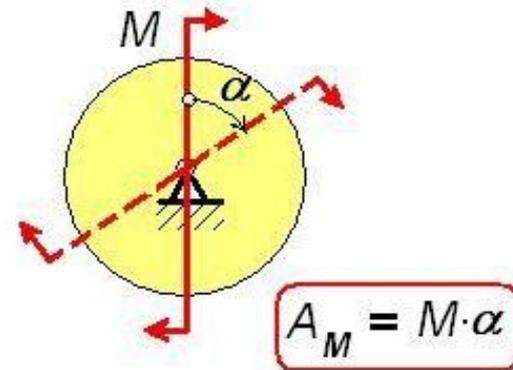
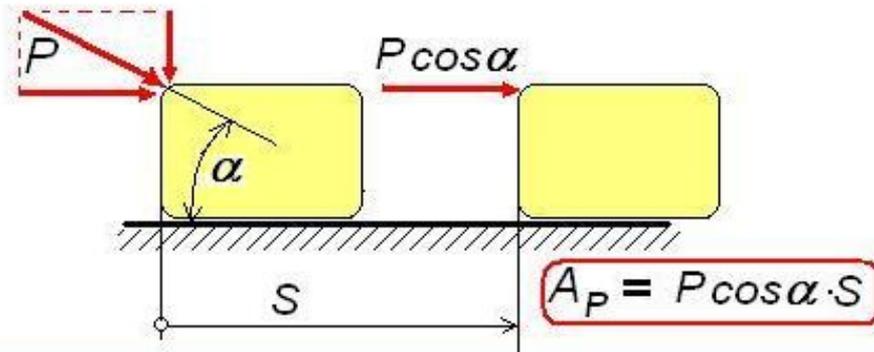
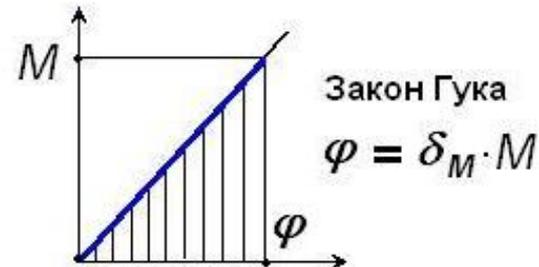
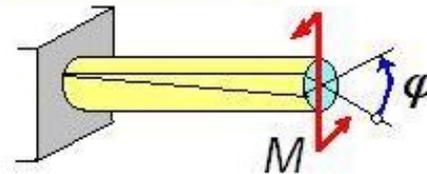
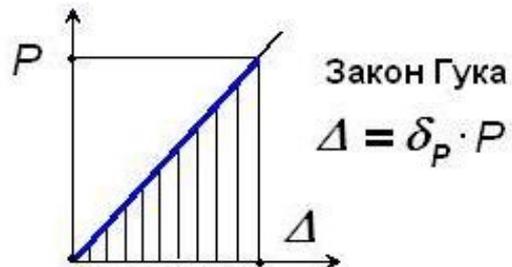
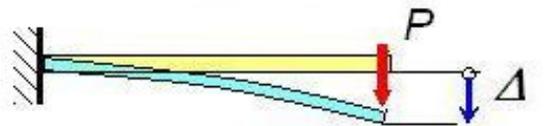
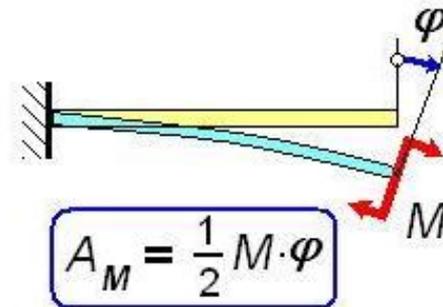
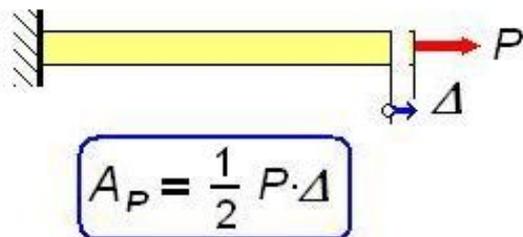


# Работа сил и моментов

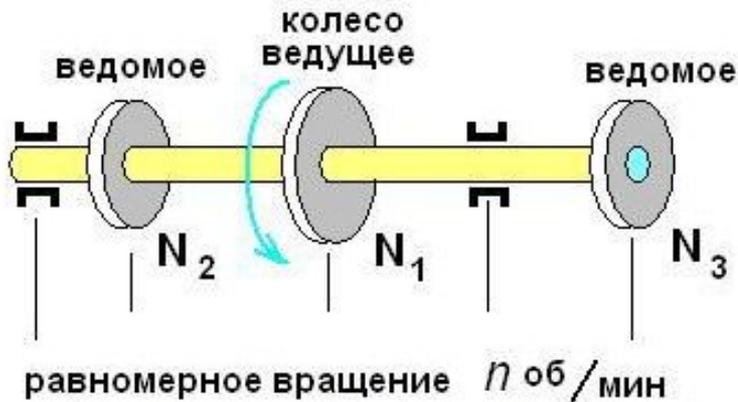
При движении тел



При деформировании тел



# Вращение

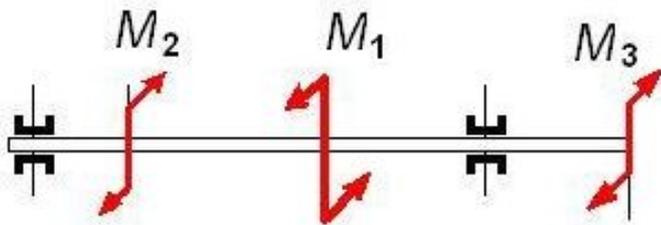


При равномерном вращении инерционные силы на стержень (Вал) не действуют.

## Система в равновесии

Расчётная схема

$$\sum m_x = M_2 - M_1 + M_3 = 0$$



$$\text{Мощность } N = \frac{A}{t} \left[ \frac{\text{работа}}{\text{время}} \right]$$

Определение момента по мощности

$$N = \frac{M \cdot \alpha}{t} = \frac{M (\text{Н}\cdot\text{м}) \cdot 2\pi n (\text{рад})}{60 (\text{сек})} = \frac{M \cdot \pi n}{30} (\text{Ватт})$$

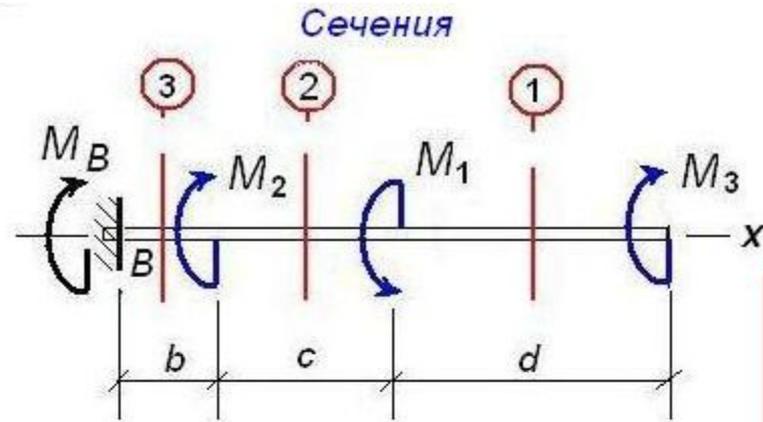
$$\text{Ватт (1 Вт)} = 1 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{сек}}$$

$$M (\text{Н}\cdot\text{м}) = \frac{30 N (\text{Вт})}{\pi n (\text{об/мин})} = 9,55 \frac{N}{n}$$

$$1 \text{ л.с.} = 75 \frac{\text{кГм}}{\text{сек}} \approx 750 \frac{\text{Нм}}{\text{сек}} = 750 \text{ Вт}$$

$$M (\text{кГм}) = 716,2 \frac{N (\text{л.с.})}{n (\text{об/мин})}$$

# Кручение

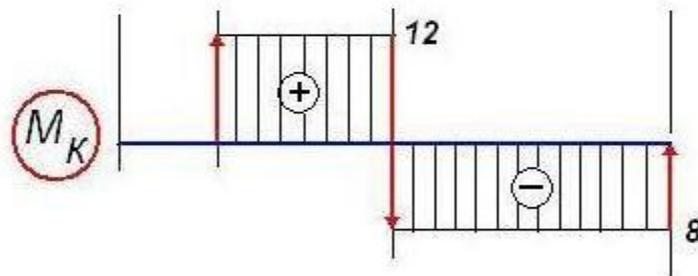


Определение моментов в опорах:

$$\sum m_x = M_B + M_2 - M_1 + M_3 = 0$$

$$M_B = -M_2 + M_1 - M_3 = -8 + 20 - 12 = 0.$$

Диаграмма крутящих моментов



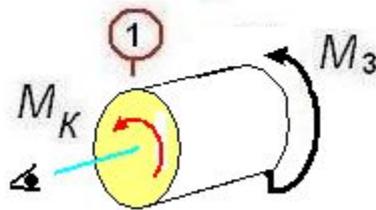
2. Крутящие моменты  $M_K$

Правило знаков  
(в сечениях стержня)



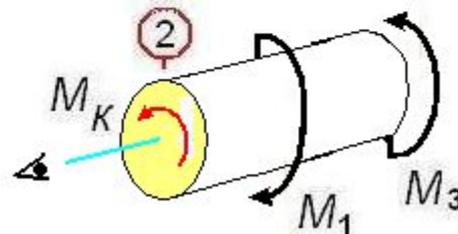
Крутящий момент положителен, если для наблюдателя со стороны внешней нормали он действует против часовой стрелки.

В сечениях:

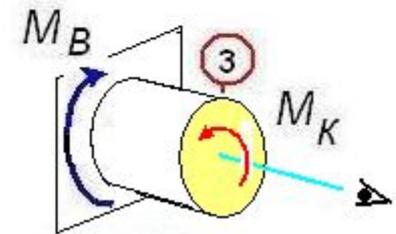


Из уравнений равновесия:

$$M_K = -M_3.$$

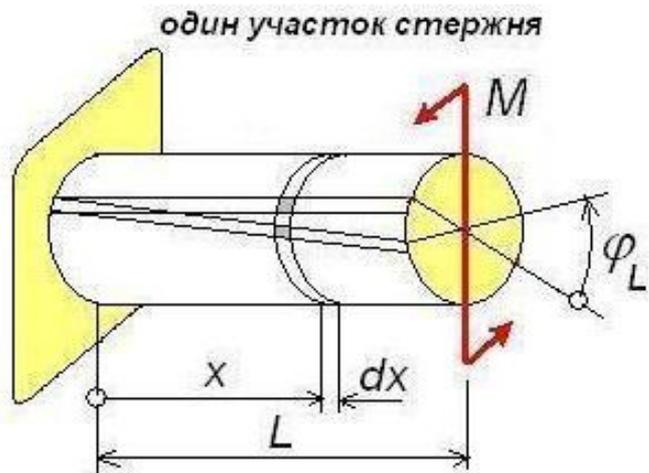


$$M_K = M_1 - M_3.$$



$$M_K = M_B.$$

# Перемещения (углы поворота). Деформации. Напряжения



Закон Гука

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$\tau$  - касательное напряжение,  
 $G$  - Модуль сдвига,  
 $\gamma$  - угол сдвига.

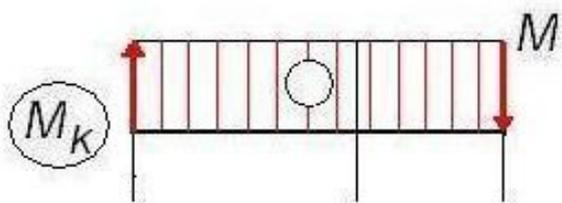
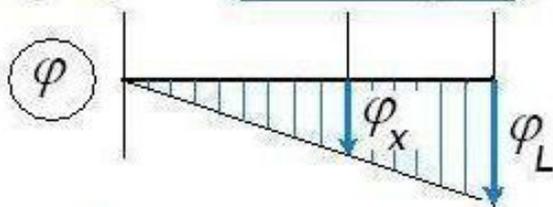


Диаграмма углов поворота сечений



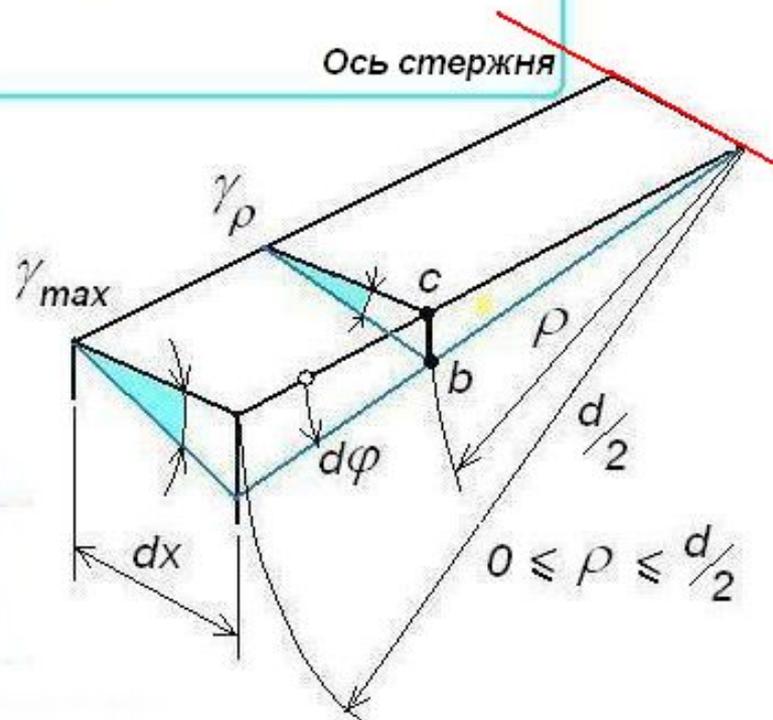
Изменение углов поворота по линейной функции.

$$cb = \rho \cdot d\varphi$$

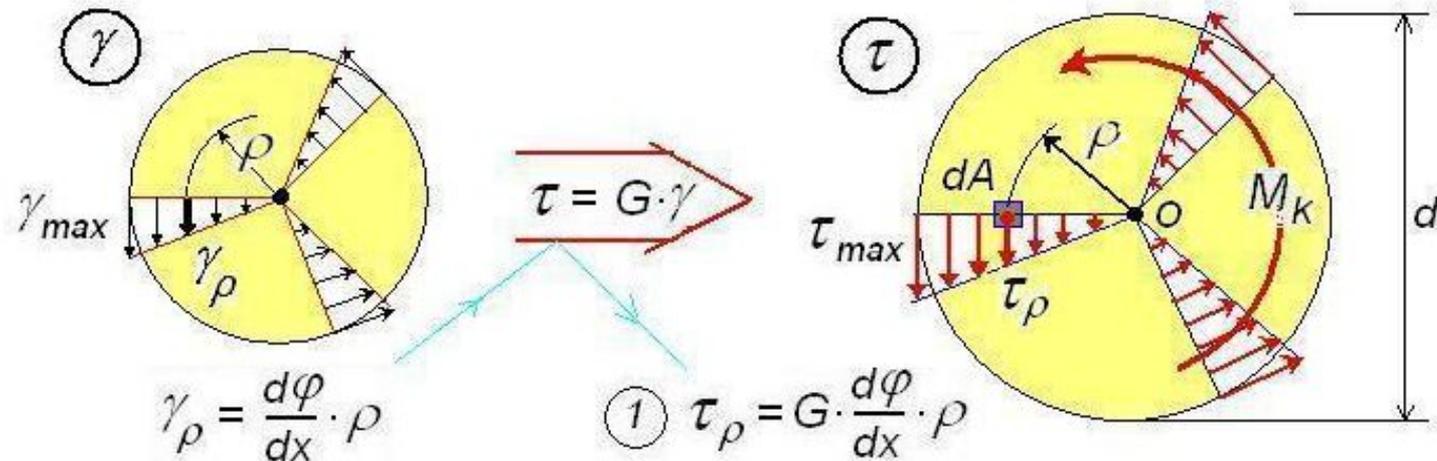
$$cb = dx \cdot \text{tg } \gamma_\rho$$

$$\gamma_\rho \approx \text{tg } \gamma_\rho$$

$$\gamma_\rho = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \rho$$



# Распределение деформаций и напряжений в сечении стержня



*Крутящий момент в сечении есть результирующее действие напряжений*

$$M_K = \int_A \tau_{\rho} \cdot dA \cdot \rho = \int_A G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \rho \cdot dA \cdot \rho = G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 \cdot dA$$

②  $M_K = G J_p \cdot \frac{d\varphi}{dx}$

$J_p$  – Полярный момент инерции сечения.

Из ① и ②:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_K}{J_p} \cdot \rho$$

Из ②:  $d\varphi = \frac{M_K}{G J_p} \cdot dx$ ,  $\varphi_L = \int_0^L \frac{M_K}{G J_p} \cdot dx$ , При  $M_K = \text{const.}$

$$\varphi_L = \frac{M_K \cdot L}{G J_p}$$

$G J_p$  – Жесткость стержня при кручении.

# Построение диаграммы углов поворота сечений стержня

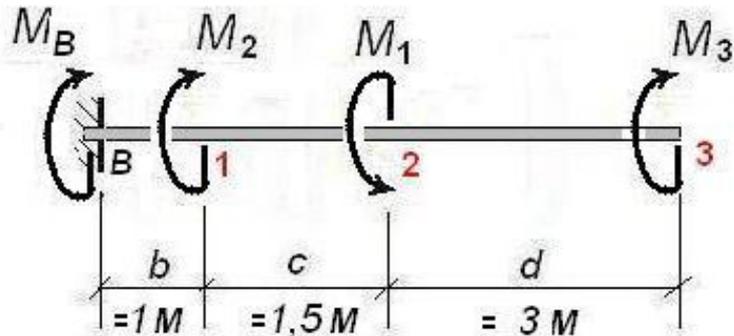


Диаграмма крутящих моментов

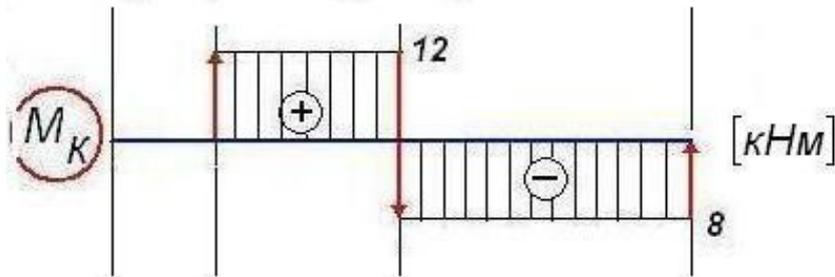
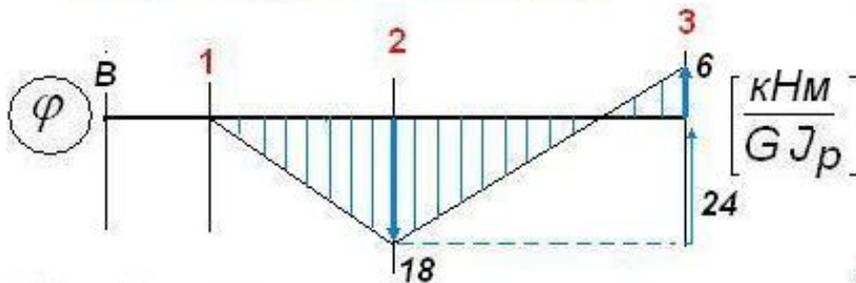


Диаграмма углов поворота сечений стержня (углов закручивания)



на участке b.

Поворот сечения **1** относительно неподвижного сечения В :

$$\varphi_{1/B} = \frac{M_K \cdot b}{GJ_p} = \frac{0 \cdot 1}{GJ_p} = 0.$$

на участке c.

Поворот сечения **2** относительно сечения **1**:

$$\varphi_{2/1} = \frac{M_K \cdot b}{GJ_p} = \frac{12 \cdot 1,5}{GJ_p} = \frac{18}{GJ_p}$$

Поворот сечения **2** относительно неподвижного сечения В :

$$\varphi_{2/B} = \varphi_{1/B} + \varphi_{2/1}$$

на участке d.

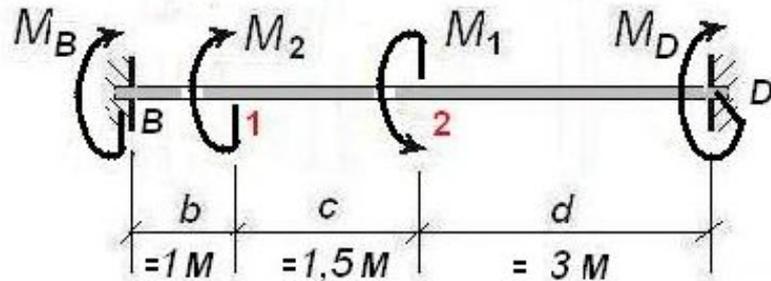
Поворот сечения **3** относительно сечения **2**:

$$\varphi_{3/2} = \frac{M_K \cdot d}{GJ_p} = \frac{-8 \cdot 3}{GJ_p} = \frac{-24}{GJ_p}.$$

Поворот сечения **3** относительно неподвижного сечения В :

$$\varphi_{3/B} = \varphi_{1/B} + \varphi_{2/1} + \varphi_{3/2} = 0 + 18 - 24 = \frac{-6}{GJ_p}.$$

Пример: **Построить диаграммы крутящих моментов и углов поворота** поперечных сечений стержня



$M_1 = 20 \text{ кНм}; M_2 = 12 \text{ кНм}.$

*Принцип суперпозиции:*

1. Уравнение равновесия:

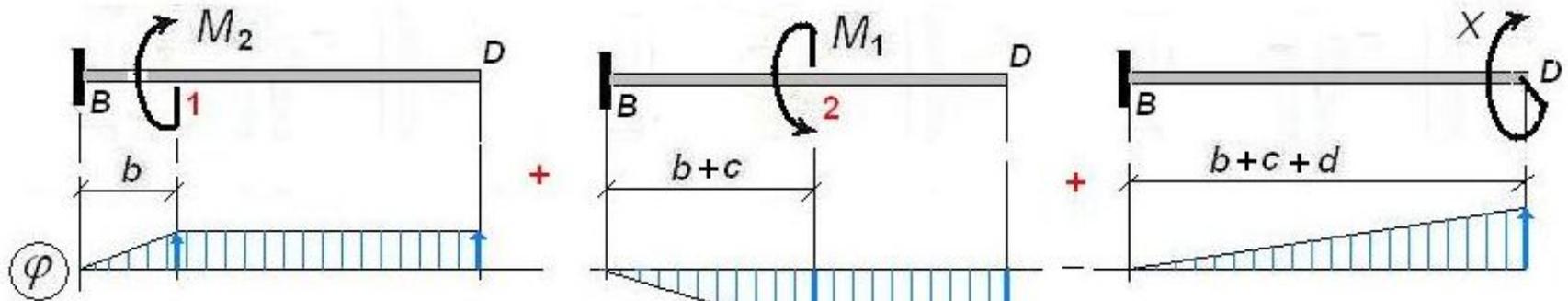
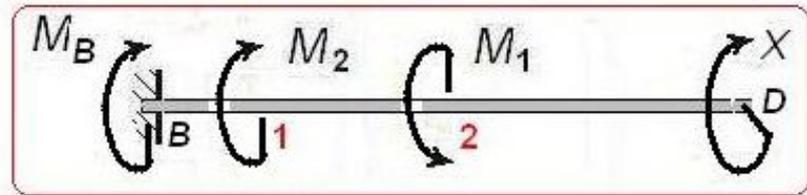
$$\sum m_x = M_B + M_2 - M_1 + M_D = 0. \quad (1)$$

*Вывод: Система 1 раз статически неопределима.*

2. В качестве дополнительного уравнения

можно взять:  $\varphi_B = 0$  или  $\varphi_D = 0. \quad (2)$

*Соответственно изобразим схему.*



$$\varphi_D = \varphi_{1/B} = \frac{M_2 \cdot b}{GJ_p}$$

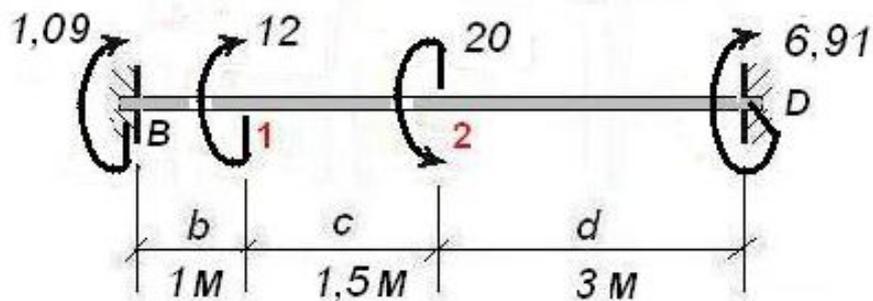
$$\varphi_D = \varphi_{2/B} = -\frac{M_1 \cdot (b+c)}{GJ_p}$$

$$\varphi_D = \frac{X \cdot (b+c+d)}{GJ_p}$$

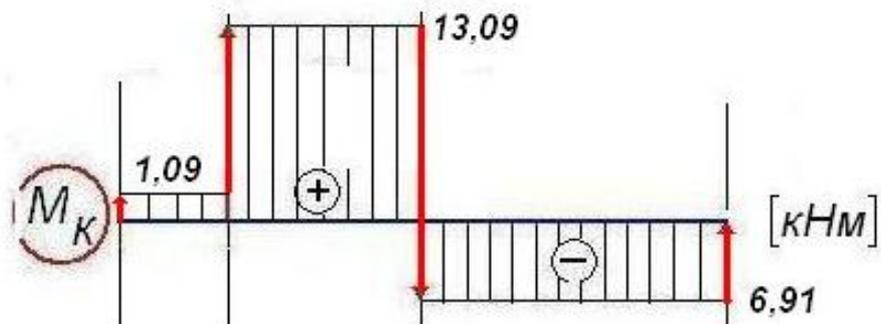
Итого:

$$\varphi_D = \frac{M_2 \cdot b}{GJ_p} - \frac{M_1 \cdot (b+c)}{GJ_p} + \frac{X \cdot (b+c+d)}{GJ_p} = 0 \quad (2)$$

продолжение

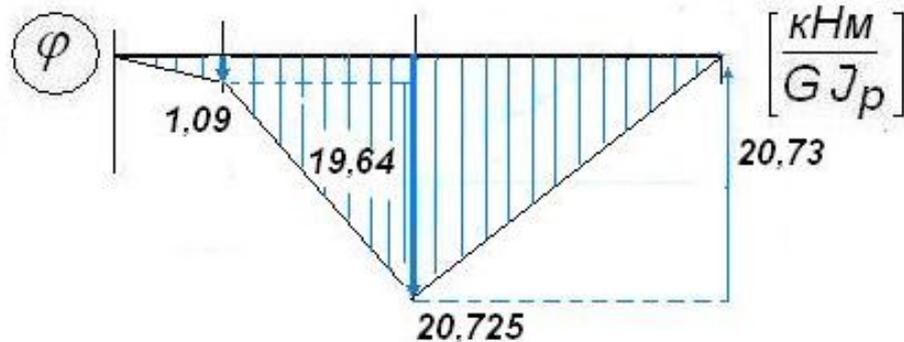


Из ①:  $X = M_D = \frac{-M_2 \cdot b + M_1 \cdot (b+c)}{(b+c+d)} =$   
 $= \frac{-12 \cdot 1 + 20 \cdot 2,5}{5,5} = 6,91 \text{ кНм.}$



Из ②:  $M_B = -M_2 + M_1 - M_D =$

$= -12 + 20 - 6,91 = 1,09 \text{ кНм.}$



# Условие прочности при кручении

Распределение напряжений в поперечном сечении круглого стержня:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_K}{J_p} \cdot \rho$$

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{J_p} \cdot \rho_{\max} \leq [\tau]$$

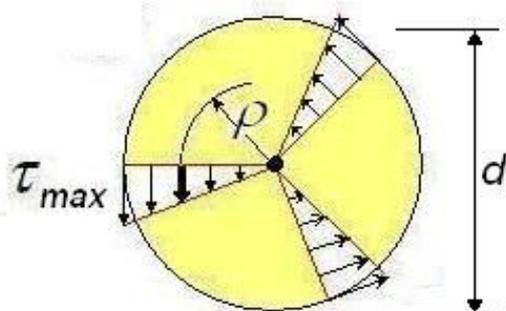
Вводится геометрическая характеристика сечения:

$$\frac{J_p}{\rho_{\max}} = W_p$$

- полярный момент сопротивления сечения стержня.

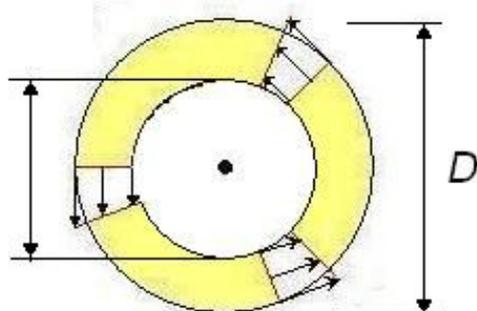
Условие прочности принимает вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau]$$



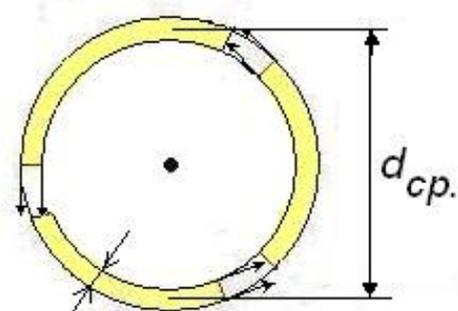
$$\rho_{\max} = d/2$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$



$$\rho_{\max} = D/2$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[ 1 - (d/D)^4 \right]$$

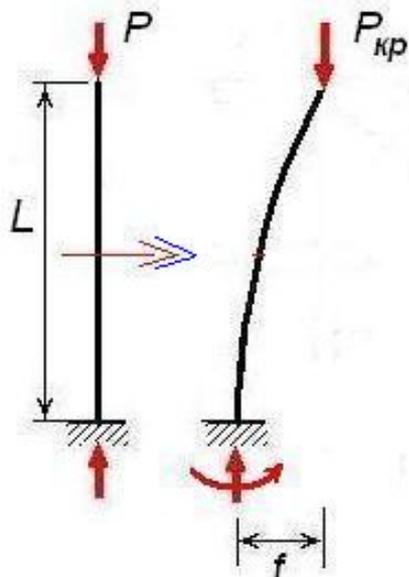


$$\rho_{\max} = d_{cp}/2$$

$$W_p = \frac{\pi d_{cp}^2 t}{2}$$

# Сжатие длинных (гибких) стержней

Устойчивость - сохранение заданной формы деформирования.  
Потеря устойчивости - переход к продольному изгибу.



Допускаемая нагрузка

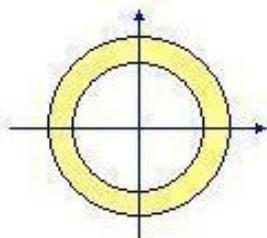
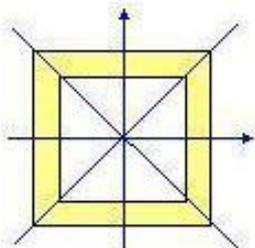
$$[P] = \frac{P_{кр}}{n_y}$$

коэффициент запаса по устойчивости

$$n_y \approx (1,5 \div 2,0) [n]$$

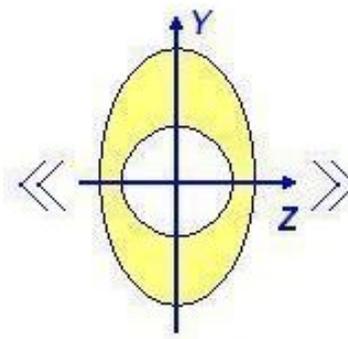
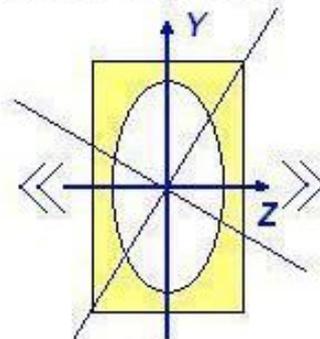
## Влияние формы сечения

В какую сторону изогнётся стержень?



Все оси центральные и главные.

Равновероятны все направления!



Для всех пар центральных осей:

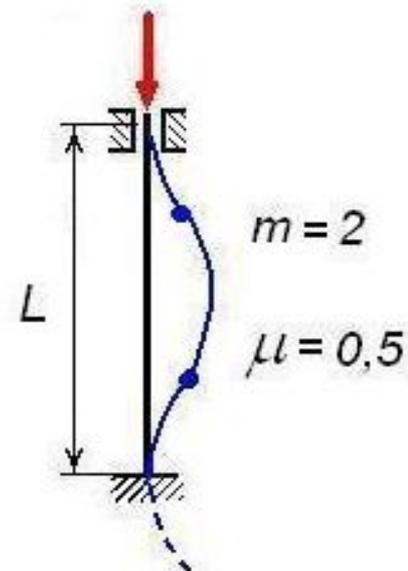
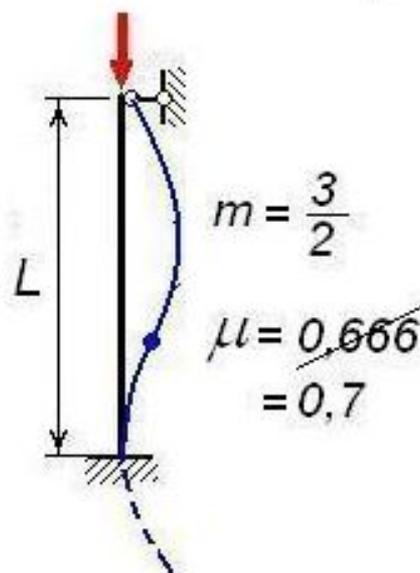
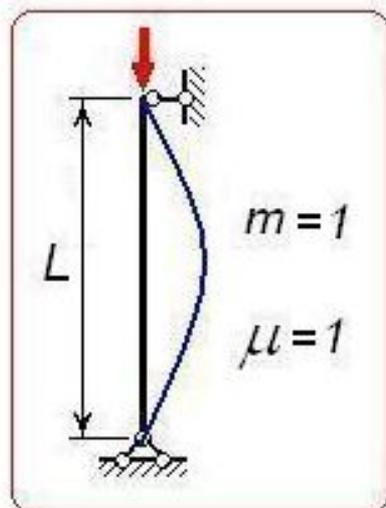
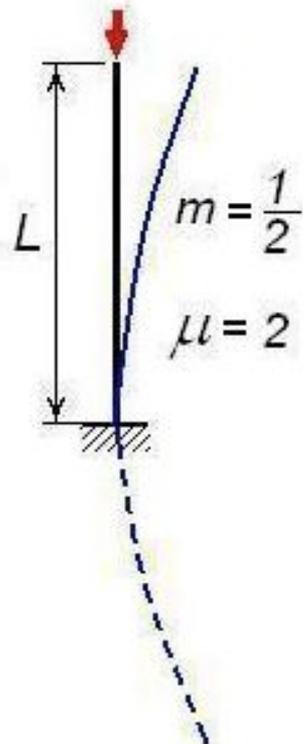
$$J_z + J_y = Const.$$

Здесь для главных центральных осей:

$$J_z = J_{max} \quad J_y = J_{min}$$

## Влияние опорных устройств

Кривая продольного изгиба стержня - практически синусоида.



$m$  - число полуволн искривлённой оси стержня.

$\mu = \frac{1}{m}$  - коэффициент приведения длины стержня к длине стержня с шарнирными опорами.

$\mu L$  - приведённая длина стержня.

Критическая нагрузка (сила):

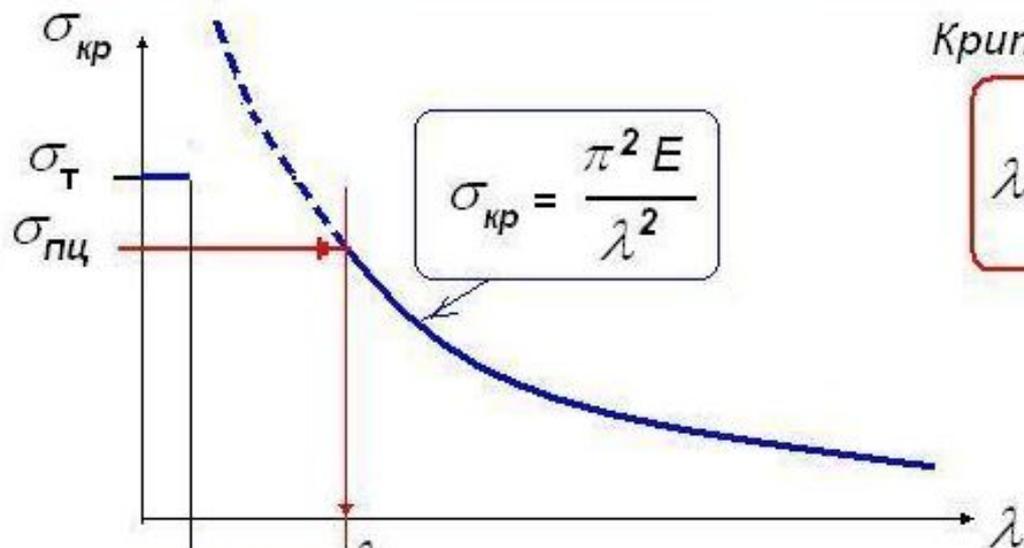
$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu L)^2} \quad \text{Формула Эйлера.}$$

Критическое напряжение:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu L)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Заинтересовались этим напряжением после того, как расчёты по формуле Эйлера привели к неожиданным результатам: стержни теряли устойчивость

$$\frac{J_{min}}{A} = i_{min}^2, \quad (i - \text{радиус инерции}); \quad \frac{\mu L}{i_{min}} = \lambda \quad \text{Гибкость стержня.}$$



Критическая гибкость:

$$\lambda_{кр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}.$$

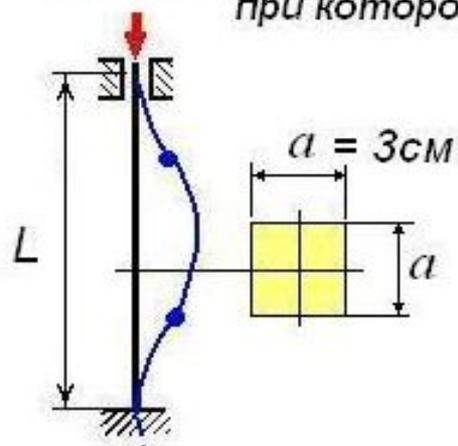
стержни малой и средней гибкости

Формула Эйлера действительна.  
→  
стержни большой гибкости

Пример: Для стали при  $\sigma_{пц} = 210$  МПа,  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа.

$$= \sqrt{\frac{3.14^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5}{210}} = 100.$$

Пример: Определить длину стержня с заземлёнными концами, при которой он будет иметь критическую гибкость 100.



$$m = 2 \quad \mu = 0,5$$

Решение:

По определению:  $\lambda = \frac{\mu L}{i_{min}} \rightarrow L_{кр} = \frac{\lambda_{кр} \cdot i_{min}}{\mu}$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}, \quad J_{min} = \frac{a \cdot a^3}{12}, \quad A = a^2,$$

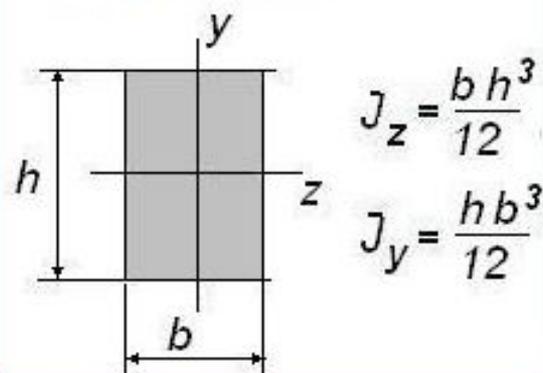
$$i_{min} = \sqrt{\frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{3^2}{12}} = 0,866 \text{ см.}$$

$$L_{кр} = \frac{100 \cdot 0,866}{0,5} = 173 \text{ см} = 1,73 \text{ м.}$$

Для стержня с шарнирными опорами  $\mu = 1$ :

$$L_{кр} = 0,865 \text{ м}$$

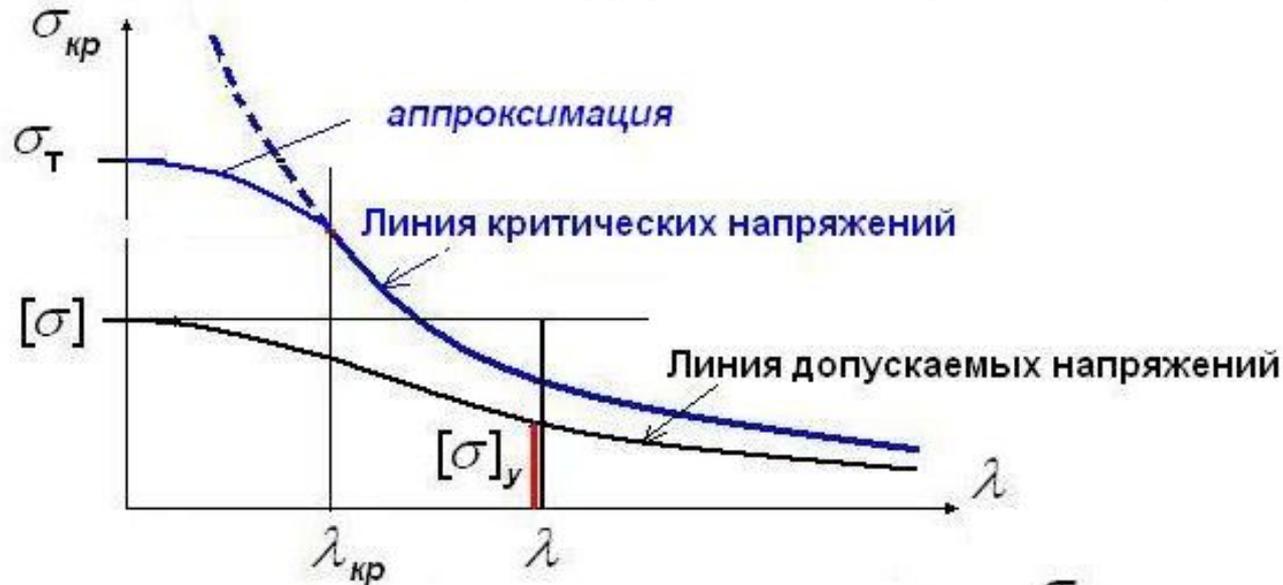
Из справочника:



В конструкциях довольно часто используются стержни с гибкостью меньше критической, для которых формула Эйлера не действительна.

Как следует поступать в таких случаях?

# Инженерный способ (метод) расчёта стержней на устойчивость



Допускаемое напряжение на устойчивость:  $[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}$ .

Для материалов составляются таблицы коэффициентов уменьшения основного допускаемого напряжения:

$$\varphi(\lambda) = \frac{[\sigma]_y}{[\sigma]}$$

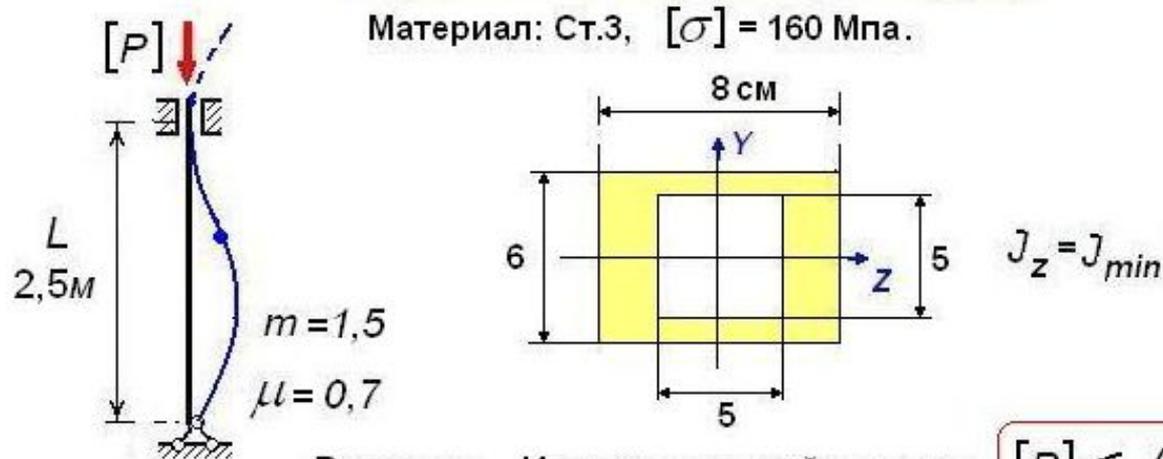
Например: Ст.3

$\lambda$	10	20	30	70	80	90	100	110	120	180	190	200
$\varphi$	0,99	0,96	0,94	0,81	0,75	0,69	0,60	0,52	0,45	0,23	0,21	0,19

Условие прочности и обеспечения устойчивости принимает вид:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma] \varphi(\lambda)$$

## Пример: Определить допускаемую нагрузку



Решение: Из условия устойчивости:  $[P] \leq A [\sigma] \varphi$

1. Найдём гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{min}}, \quad i_{min} = \sqrt{\frac{J_z}{A}}, \quad J_z = \frac{8 \cdot 6^3}{12} - \frac{5 \cdot 5^3}{12} = 92 \text{ см}^4, \quad A = 8 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 23 \text{ см}^2$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{92}{23}} = 2,0 \text{ см}, \quad \lambda = \frac{0,7 \cdot 250}{2,0} = 87,5.$$

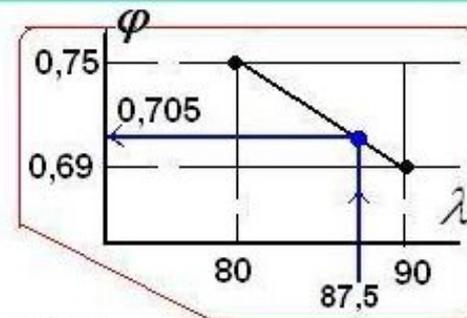
2. Определим  $\varphi$  для  $\lambda = 87,5$ .

Из таблицы:

$\lambda$	80	90
$\varphi$	0,75	0,69

$\varphi$  находим интерполяцией

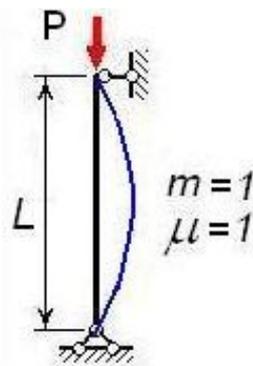
$$\varphi_{87,5} = \varphi_{80} - \frac{\varphi_{80} - \varphi_{90}}{10} 7,5 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} 7,5 = 0,705.$$



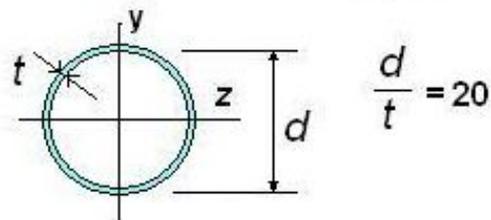
3. Допускаемая нагрузка:  $[P] \leq 23 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0,705 = 259 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .



## Пример: Определить размеры поперечного сечения стержня



Дано:  $P = 32 \text{ кН}$ ,  $L = 1,5 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .



Решение: Геометрические характеристики сечения:

$$J_{min} = \frac{\pi d^3 t}{8}, \quad A = \pi d t = \frac{\pi d^2}{20}, \quad d = \sqrt{\frac{20 A}{\pi}}, \quad i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \frac{d}{2\sqrt{2}}$$

$$1) \text{ Принимаем } \varphi_1 = \underline{0,5}: \quad A \geq \frac{P}{[\sigma] \varphi_1} = \frac{32 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0,5} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$d = \sqrt{\frac{20 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 5,046 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad i_{min} = \frac{5,046 \cdot 10^{-2}}{2\sqrt{2}} = 1,784 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \lambda = \frac{\mu L}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 1,5}{1,784 \cdot 10^{-2}} = 84.$$

$$\text{Для } \lambda = 84: \quad \varphi_1^* = \varphi_{80} - \frac{\varphi_{80} - \varphi_{90}}{10} 4 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} 4 = \underline{0,726}.$$

$$2) \quad \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,726}{2} = \underline{0,613}, \quad A \geq \frac{32 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0,613} = 3,26 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$d = \sqrt{\frac{20 \cdot 3,26 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 4,56 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad i_{min} = \frac{4,56 \cdot 10^{-2}}{2\sqrt{2}} = 1,612 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \lambda = \frac{1 \cdot 1,5}{1,612 \cdot 10^{-2}} = 93.$$

$$\text{Для } \lambda = 93: \quad \varphi_2^* = \varphi_{90} - \frac{\varphi_{90} - \varphi_{100}}{10} 3 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} 3 = \underline{0,663}.$$

продолжение

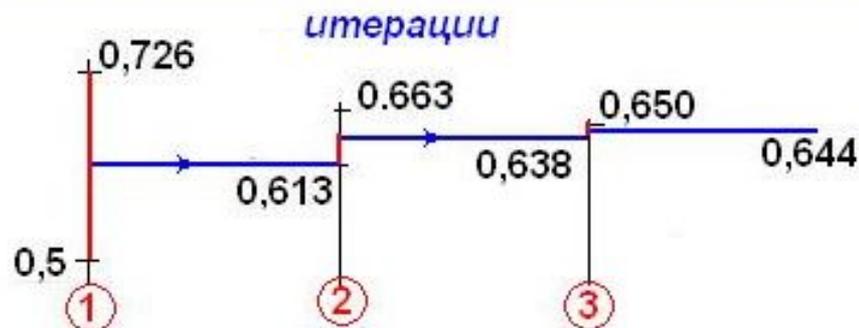
$$3) \varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,613 + 0,663}{2} = \underline{0,638}, \quad A \geq \frac{32 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0,638} = 3,135 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$d = \sqrt{\frac{20 \cdot 3,135 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 4,467 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad i_{\min} = \frac{4,467 \cdot 10^{-2}}{2\sqrt{2}} = 1,589 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \lambda = \frac{1 \cdot 1,5}{1,589 \cdot 10^{-2}} = 94,4.$$

$$\text{Для } \lambda = 94,4: \varphi_3^* = \varphi_{90} - \frac{\varphi_{90} - \varphi_{100}}{10} \lambda = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 94,4 = \underline{0,650}.$$

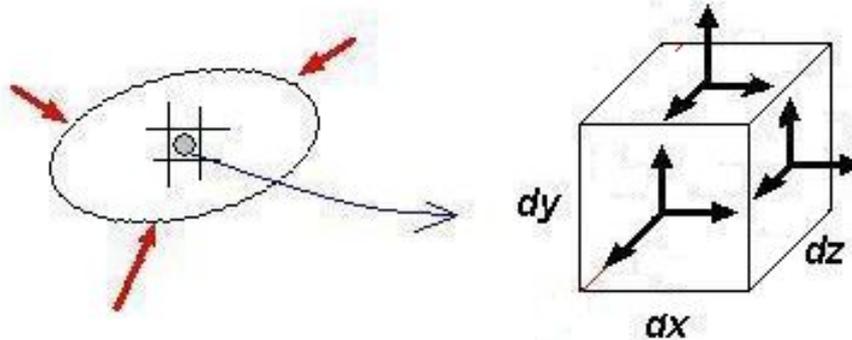
$$\text{Проверим: } \sigma = \frac{P}{A \varphi_3^*} = \frac{32 \cdot 10^3}{3,135 \cdot 10^{-4} \cdot 0,650} = 157 \text{ МПа}, \quad \left( \frac{160 - 157}{160} \cdot 100 = 1,875\% \right)$$

Примем:  $d = 4,7 \text{ см}, t = 0,235 \text{ см}$

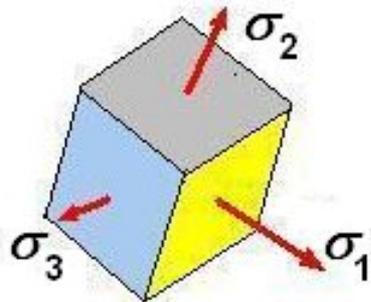


## Напряжённое состояние в «точке»

Под напряжённым состоянием в "точке" понимается совокупность напряжений на множестве секущих площадок, проходящих через неё. Характеризуют его напряжения на гранях элементарного объёма.



С изменением ориентации секущих плоскостей меняются напряжения на гранях элемента. Имеется единственная ориентация, при которой на гранях элемента (площадках) не будет касательных напряжений. Такие площадки называются **ГЛАВНЫМИ**. Нормальные напряжения на них называют **ГЛАВНЫМИ**.

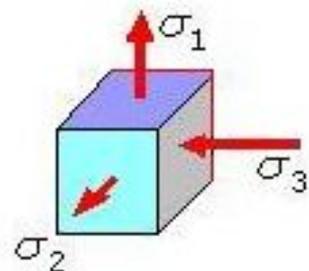


Цель исследования напряжённого состояния - определение направлений и величин главных напряжений

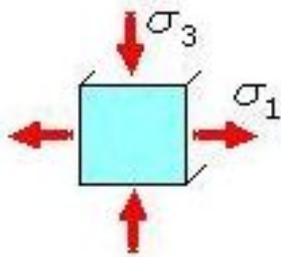
Обозначаются **ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ** в порядке возрастания:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

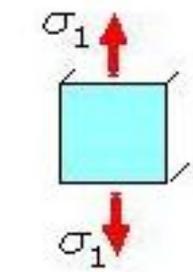
**Названия напряжённых состояний:**



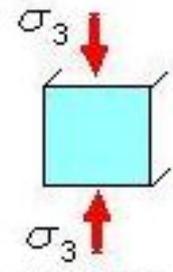
**Объёмное  
или  
Трёхосное**



$\sigma_2 = 0$   
**Плоское  
или  
Двухосное**



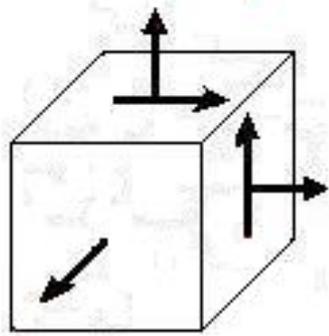
$\sigma_2 = 0$   
 $\sigma_3 = 0$



$\sigma_2 = 0$   
 $\sigma_1 = 0$

**Одноосное**

**Установить вид напряжённого состояния можно только по числу Главных напряжений**



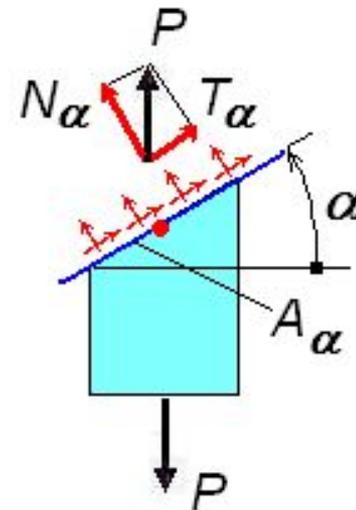
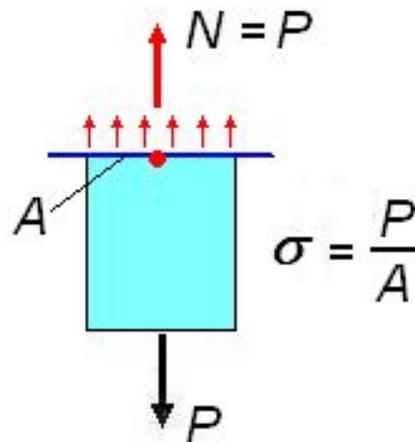
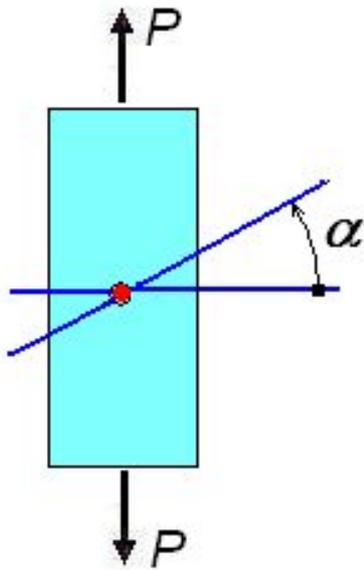
**Это может быть объёмное или плоское напряжённое состояние.**

# Напряжённое состояние при растяжении (сжатии)

## Напряжения

в поперечном сечении

в наклонном сечении



$$N_\alpha = P \cos \alpha,$$

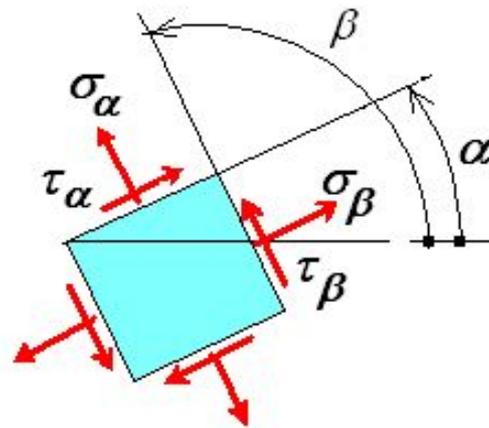
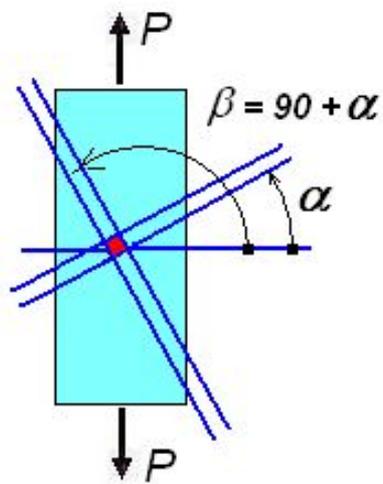
$$T_\alpha = P \sin \alpha,$$

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

$$\alpha = 0 \div 360^\circ$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{P \cos \alpha}{A / \cos \alpha} = \sigma \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{A_\alpha} = \frac{P \sin \alpha}{A / \cos \alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$



$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma \cos^2 \beta = \sigma \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\beta = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

$$\cos(90 + \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(180 + 2\alpha) = -\sin 2\alpha.$$

Выводы: 1)  $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma$ .

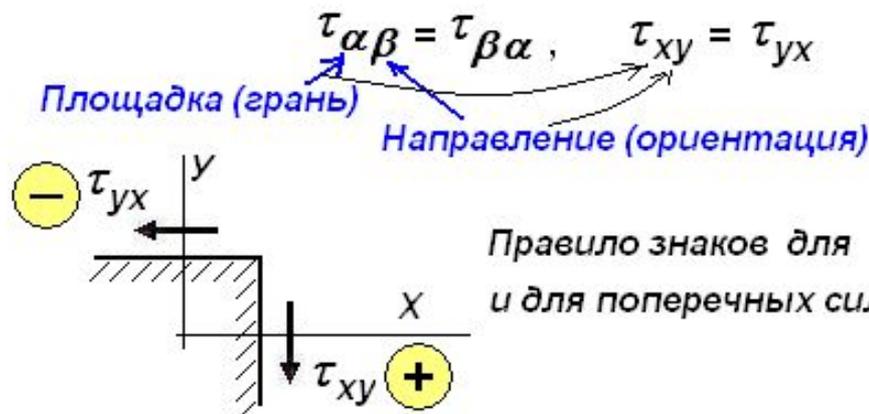
Сумма нормальных напряжений на гранях элемента при его вращении не изменяется (является инвариантом).

2)  $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$  (Закон парности касательных напряжений).

Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных гранях равны.

Знак минус означает, что они направлены к линии сопряжения граней или от неё.

Принято опускать знак (-) и снабжать касательные напряжения двумя индексами:



Правило знаков для  $\tau$  такое же как и для поперечных сил  $T$  при изгибе.

# Графическое представление напряжённого состояния

С математической точки зрения

уравнения  $\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$  представляют функцию в параметрической форме. Параметром является угол  $\alpha$ .

Чтобы установить эту функцию, исключим параметр:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\alpha - \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Возведём в квадрат и сложим.

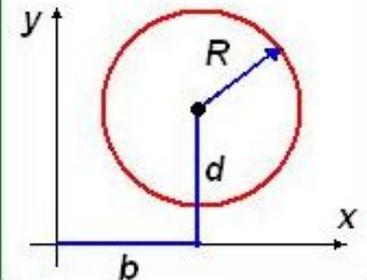
$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$$

Это уравнение окружности.

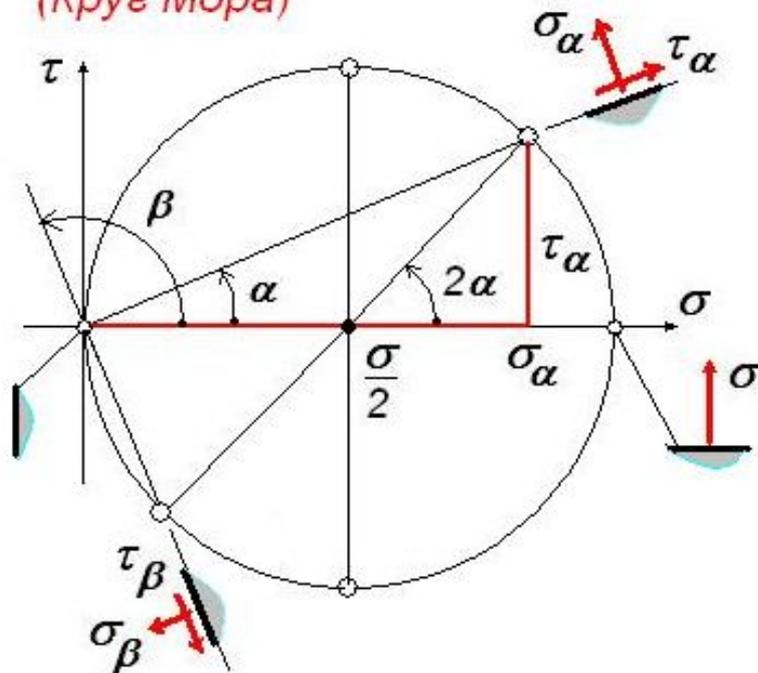
из Математики:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$(x-b)^2 + (y-d)^2 = R^2$$



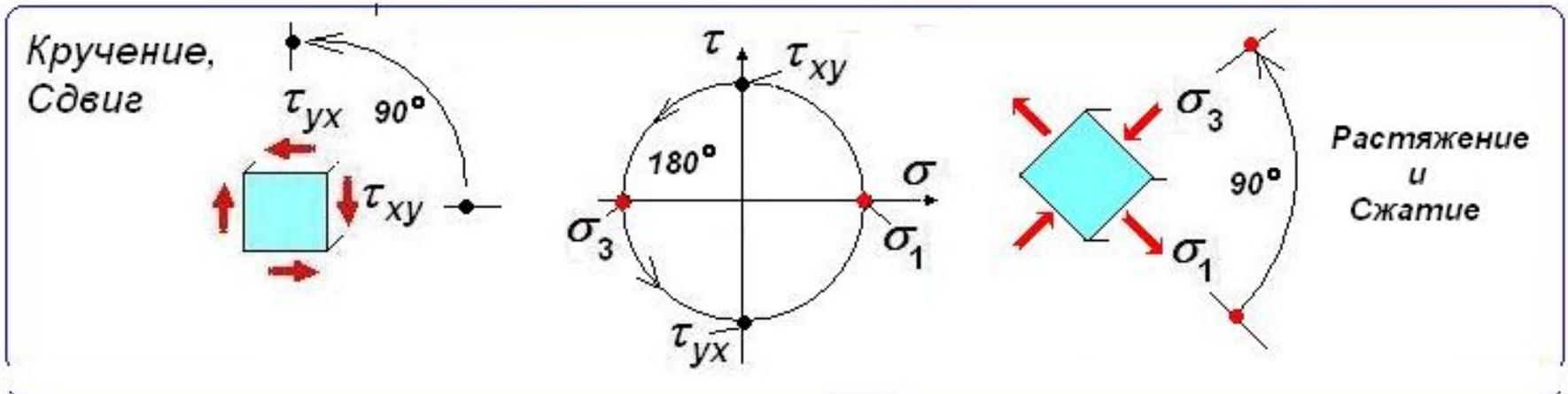
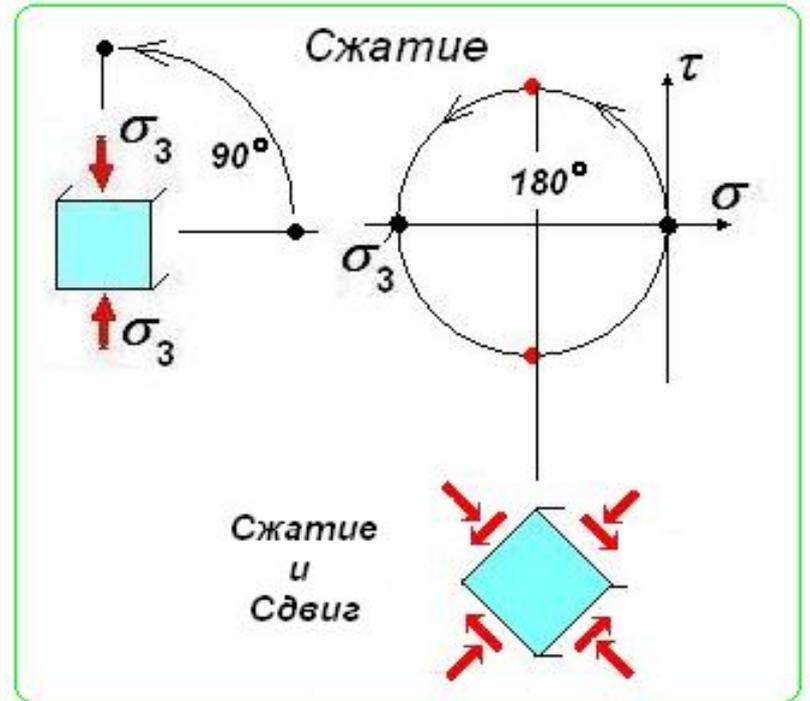
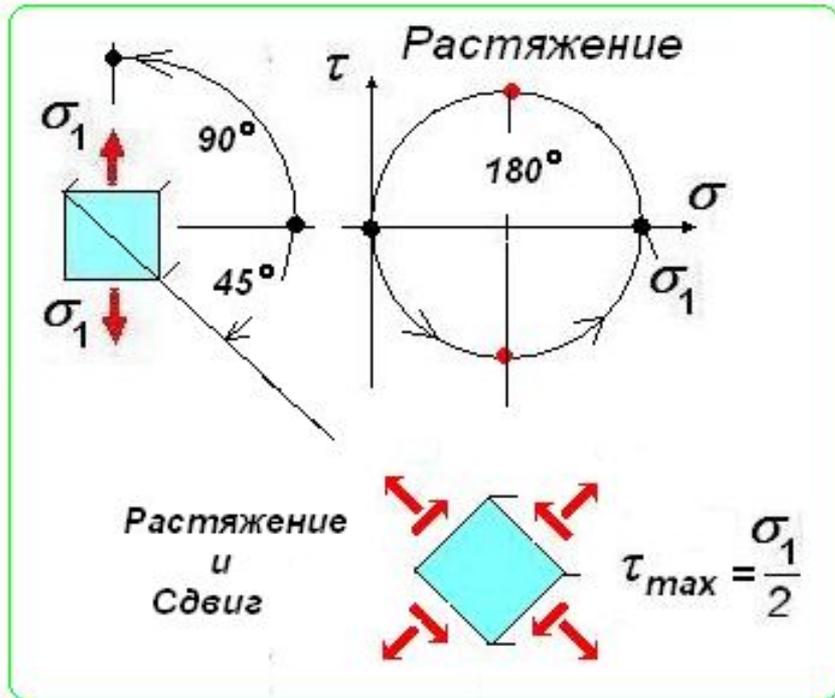
(Круг Мора)

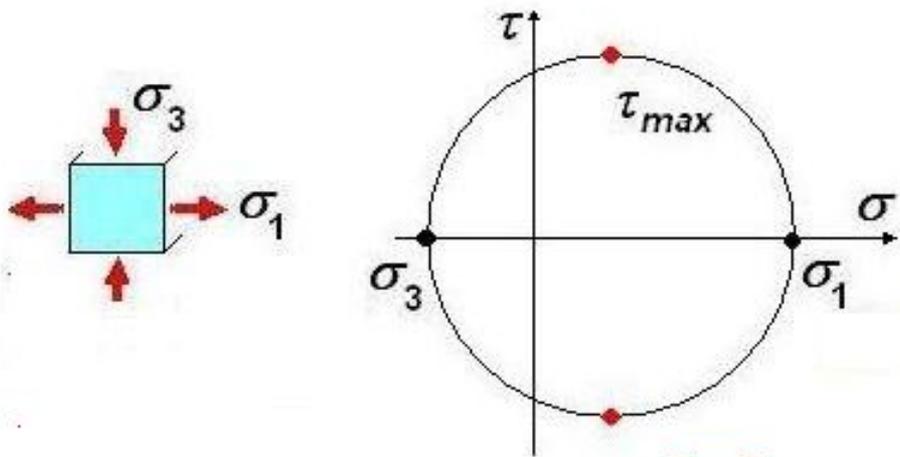


Выводы:

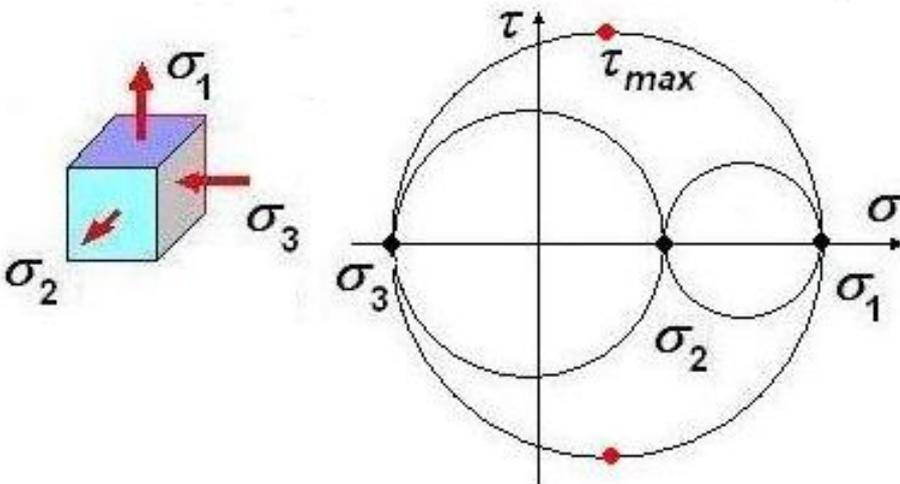
1. В координатных осях  $\sigma, \tau$  напряжения на грани (площадке) выделенного элемента являются координатами точки окружности.
2. Две взаимно перпендикулярные грани представлены на ней точками, которые принадлежат диаметру окружности.
3. Движение от одной точки к другой по дуге окружности на угол  $2\alpha$  соответствует вращению элемента в том же направлении на угол  $\alpha$ .

# Графическое исследование напряжённого состояния

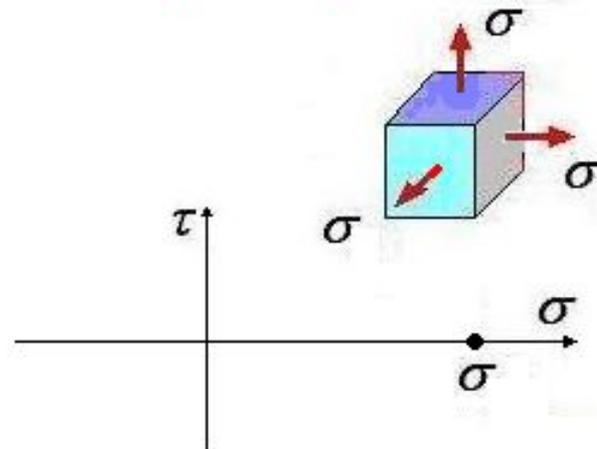




$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



### Всестороннее растяжение



### Всестороннее (гидростатическое) сжатие

