

3.2 Аномальные поля

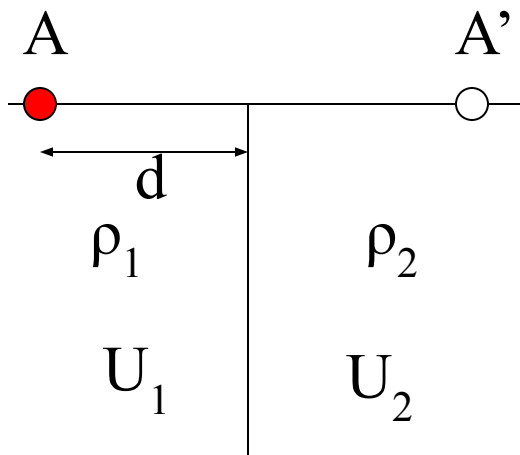
3.2.1 Точечный источник и контакт двух

сред

Обозначим: $Q = \frac{I\rho_1}{2\pi}$

Будем искать решение
в виде:

Г.У.:



$$U_1 = \frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}$$

$$U_2 = \frac{Q + Q''}{r}$$

$$U_1 = U_2$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{(x - 2d)^2 + y^2 + z^2}$$

На

границе: $U_1(d) = \frac{Q + Q'}{d}$

$U_2(d) = \frac{Q + Q''}{d}$

$Q'' = Q'$

$$j_{n1} = \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{Qx}{r^3} + \frac{Q'(x-2d)}{r'^3} \right) = \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{Qd}{d^3} - \frac{Q'd}{d^3} \right) = \frac{Q-Q'}{\rho_1 d^2}$$

$$j_{n2} = \frac{Q+Q''}{\rho_2 d^2} = \frac{Q+Q'}{\rho_2 d^2} \quad \frac{Q-Q'}{\rho_1} = \frac{Q+Q''}{\rho_2} \quad Q(\rho_2 - \rho_1) = Q'(\rho_2 + \rho_1)$$

$$Q' = Q \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)}$$

Коэффициент отражения: $k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$

Решение:

$$U_1 = Q \left(\frac{1}{r} + \frac{k_{12}}{r'} \right) \quad U_2 = Q \left(\frac{1+k_{12}}{r} \right)$$

На поверхности
земли:

$$U_1 = Q \left(\frac{1}{x} + \frac{k_{12}}{(x-2d)} \right)$$

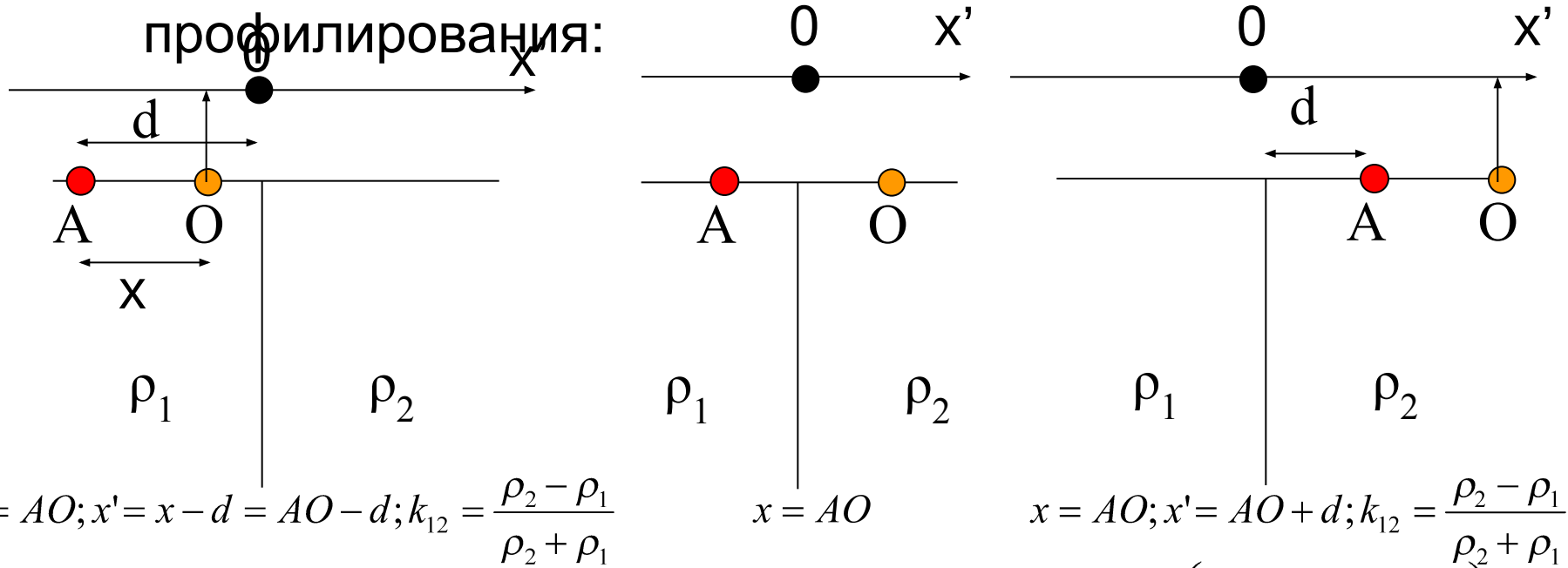
$$U_2 = Q \left(\frac{1+k_{12}}{x} \right)$$

Дифференцирование по направлению x
дает поле, отвечающее идеальной градиент-установке

$$E_1 = Q \left(\frac{1}{x^2} - \frac{k_{12}}{(x-2d)^2} \right)$$

$$E_2 = Q \left(\frac{1+k_{12}}{x^2} \right)$$

Проведем преобразования применительно к случаю профилирования:



$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.} \\
 \mathbf{2.} \\
 \mathbf{3.}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 E_1 = Q_1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{k_{12}}{(2d-x)^2} \right) = Q_1 \left(\frac{1}{AO^2} - \frac{k_{12}}{(AO-2x')^2} \right) = \frac{Q_1}{AO^2} \left(1 - \frac{k_{12}}{\left(1 - \frac{2x'}{AO} \right)^2} \right) \\
 E_2 = Q_1 \frac{1+k_{12}}{x^2} = Q_1 \frac{1+k_{12}}{AO^2} \\
 E_3 = Q_2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{k_{12}}{(2d+x)^2} \right) = Q_2 \left(\frac{1}{AO^2} + \frac{k_{12}}{(2x'+AO)^2} \right) = \frac{Q_2}{AO^2} \left(1 + \frac{k_{12}}{\left(1 + \frac{2x'}{AO} \right)^2} \right)
 \end{array} \right\} \mathbf{3.}$$

Формулы для кажущегося сопротивления идеальной градиент-установки

$$U = E \cdot MN \quad \rho_k = k \frac{U}{I} = k \frac{E \cdot MN}{I} = \frac{2\pi \cdot AM \cdot AN}{MN} \frac{E \cdot MN}{I} \approx 2\pi AO^2 \frac{E}{I}$$

AMN:

$$\rho_k^1 = \rho_1 \left(1 - \frac{k_{12}}{\left(1 - \frac{2x'}{AO}\right)^2} \right)$$

$$\rho_k^2 = \rho_1 (1 + k_{12})$$

$$\rho_k^3 = \rho_2 \left(1 - \frac{k_{12}}{\left(1 - \frac{2x'}{AO}\right)^2} \right)$$

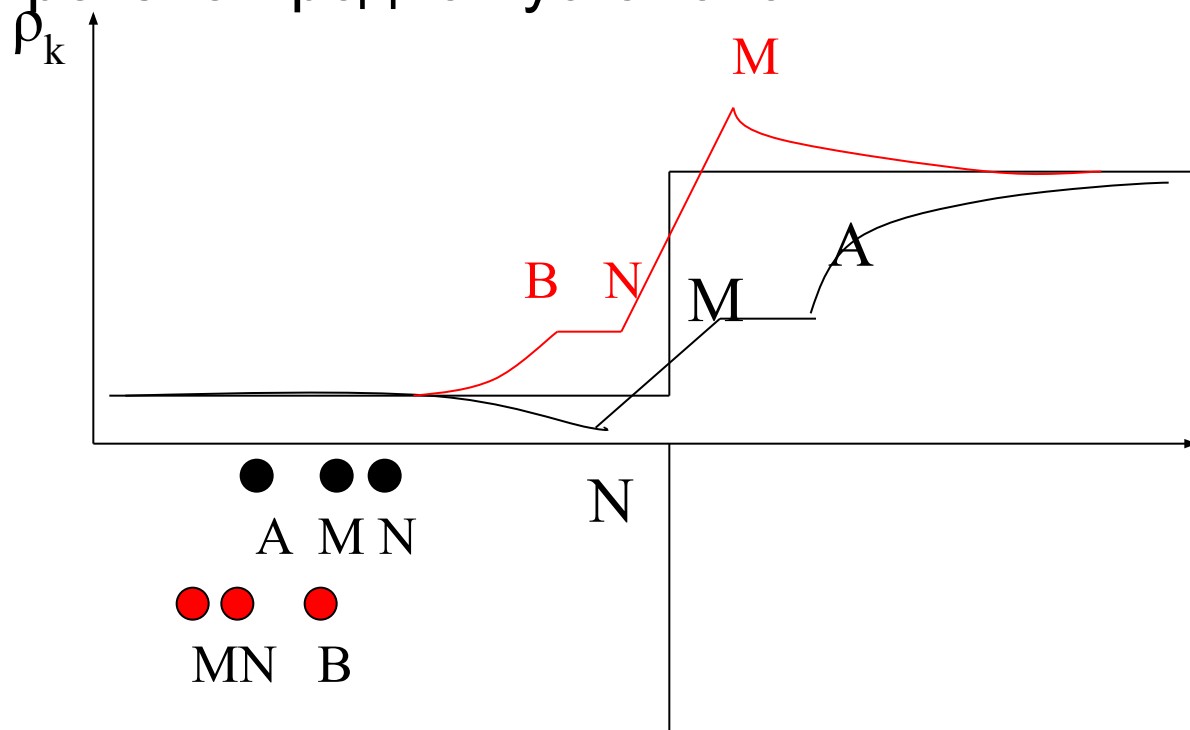
MNB:

$$\rho_k^1 = \rho_1 \left(1 + \frac{k_{12}}{\left(1 + \frac{2x'}{AO}\right)^2} \right)$$

$$\rho_k^2 = \rho_1 (1 + k_{12})$$

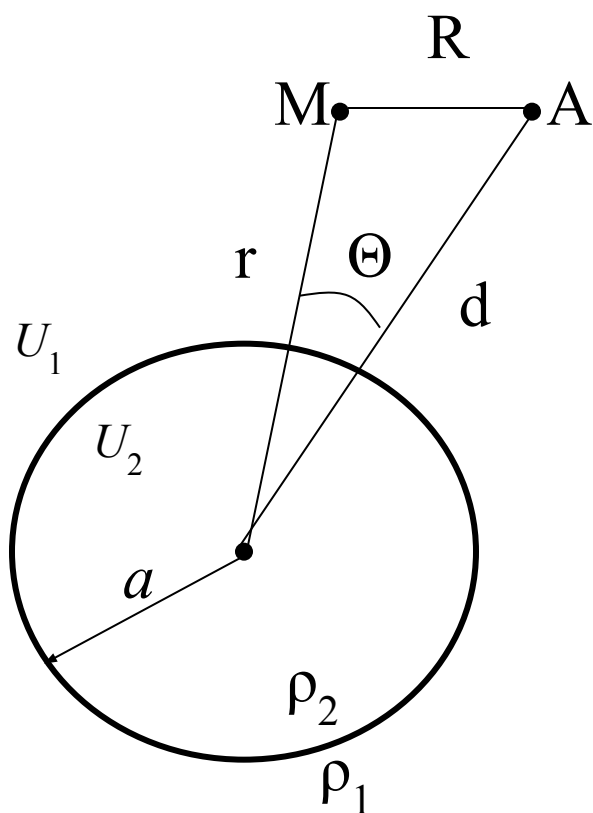
$$\rho_k^3 = \rho_2 \left(1 + \frac{k_{12}}{\left(1 + \frac{2x'}{AO}\right)^2} \right)$$

Графики для реальной установки,
факторы, определяющие кажущееся
сопротивление,
Взаимосвязь симметричной и
трехэлектродной установок



3.2.2. Сфера в электрическом поле

Постановка задачи:



$$1) U = U_n + U_a = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + U_a(r, \Theta)$$

$$2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U_a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial U_a}{\partial \Theta} \right) = 0$$

$$3a) U_1(a) = U_2(a)$$

$$3б) \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial r}(a) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial r}(a)$$

Разрыв радиальной компоненты
E

(при непрерывности
тангенциальной)
4) $U_a(r, \Theta) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$

$$R = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \Theta}$$

Используем метод разделения

переменных:

Положим, что $U_a(r, \Theta) = V(r)W(\Theta)$

$$W \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{V}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial W}{\partial \Theta} \right) = 0$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{W \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial W}{\partial \Theta} \right) = 0$$

$$* \frac{1}{W \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial W}{\partial \Theta} \right) = -m \quad ** \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = m$$

$$z = \cos \Theta \quad \frac{\partial}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \Theta} = -\sin \Theta \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial W}{\partial \Theta} = \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \Theta} = -\sin \Theta \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\sin^2 \Theta \frac{\partial W}{\partial z} \right) + mW = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} \left((1-z^2) \frac{\partial W}{\partial z} \right) + mW = 0 \quad \text{Уравнение Лежандра}$$

Уравнение Лежандра имеет
нетривиальные решения при:

$$m = n(n+1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((1-z^2) \frac{\partial W}{\partial z} \right) + mW = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((1-z^2) \frac{\partial W}{\partial z} \right) + n(n+1)W = 0$$

Решения уравнения – полиномы Лежандра, определяемые по формуле Родрига:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

$$P_0(z) = 1$$

$$P_1(z) = z = \cos \Theta$$

$$P_2(z) = \frac{1}{4} (3 \cos(2\Theta) + 1)$$

$$W_n = c_n P_n(\cos \Theta) \quad \text{-частные решения}$$

Вернемся к уравнению **

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = n(n+1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - Vn(n+1) = 0$$

Ему удовлетворяют решения: $V_n^{(1)} = r^n; V_n^{(2)} = \frac{1}{r^{n+1}}$

Частное решение: $V_n = b_n^{(1)} r^n + b_n^{(2)} \frac{1}{r^{n+1}}$

Объединяем решения: $U_a(r, \Theta) = \left(b_n^{(1)} r^n + b_n^{(2)} \frac{1}{r^{n+1}} \right) c_n P_n(\cos \Theta) =$
 $= \left(A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \Theta)$

Общее решение: $U_a(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \Theta)$

$$r > a : A_n = 0 \quad r < a : B_n = 0$$

$$U(r, \Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \Theta) & r > a \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \Theta) & r < a \end{cases}$$

$$3a) U_1(a) = U_2(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n a^n - B_n \frac{1}{a^{n+1}} \right) P_n(\cos \Theta) = 0 \quad A_n a^n - B_n \frac{1}{a^{n+1}} = 0$$

Предварительно представим $1/R$ с помощью полиномов

$$3б) \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial r}(a) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial r}(a) \quad \frac{I\rho_1}{4\pi R} = \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \Theta}}$$

Для $r < d$:
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d} \right)^n P_n(\cos \Theta)$$

Для $r > d$:
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r} \right)^n P_n(\cos \Theta)$$

Для окрестностей шара: $r < d$

$$U(r, \Theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{r^n}{d^{n+1}} + B_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \Theta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{r^n}{d^{n+1}} + A_n r^n \right) P_n(\cos \Theta) \end{cases} \quad \frac{\partial U}{\partial r}(r, \Theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{I\rho_1 n}{4\pi} \frac{r^{n-1}}{d^{n+1}} - B_n \frac{n+1}{r^{n+2}} \right) P_n(\cos \Theta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{I\rho_1 n}{4\pi} \frac{r^{n-1}}{d^{n+1}} + A_n n r^{n-1} \right) P_n(\cos \Theta) \end{cases}$$

$$3б) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{I\rho_1 n a^{n-1}}{4\pi d^{n+1}} - \frac{(n+1) B_n}{\rho_1 a^{n+2}} - \frac{n}{\rho_2} A_n a^{n-1} \right) P_n(\cos \Theta) = 0$$

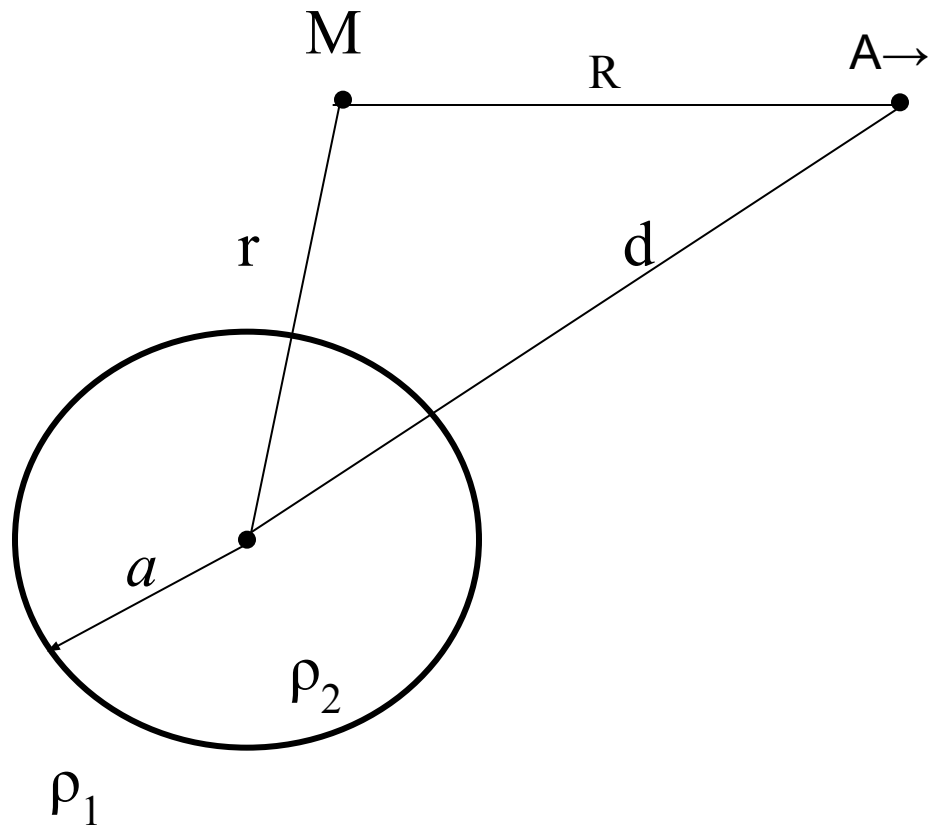
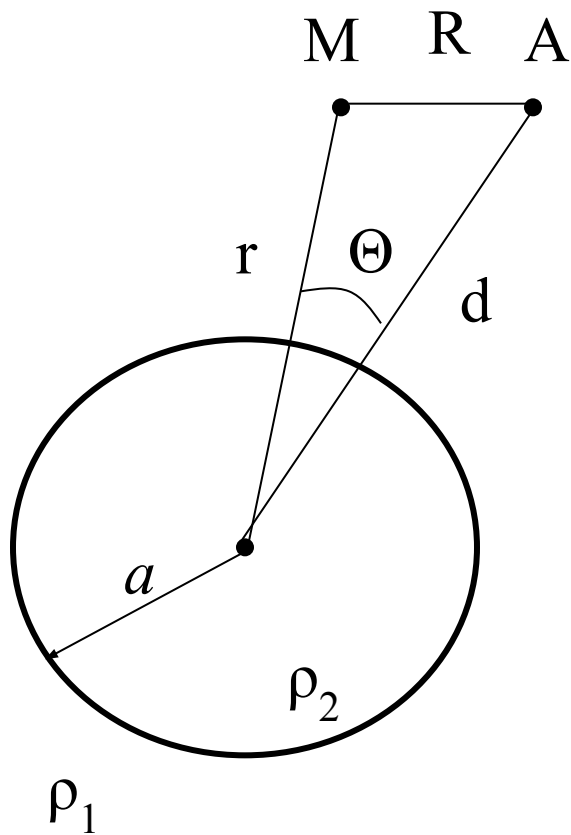
Решение уравнений 3а и 3б:

$$k_n = \frac{n(\rho_2 - \rho_1)}{(n+1)\rho_2 + n\rho_1} \quad - \text{коэффициент отражения}$$

$$A_n = \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{k_n}{d^{n+1}} \quad B_n = \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{k_n a^{2n+1}}{d^{n+1}}$$

$$U(r, \Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \frac{I\rho_1}{4\pi} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n a^{2n+1}}{d^{n+1}} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \Theta) & r > a \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{d^{n+1}} r^n P_n(\cos \Theta) & r < a \end{cases}$$

Частный случай однородного поля:



$$U(r, \Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \frac{I\rho_1}{4\pi} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n a^{2n+1}}{(dr)^{n+1}} P_n(\cos \Theta) & r > a \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{d^{n+1}} r^n P_n(\cos \Theta) & r < a \end{cases} \quad \begin{matrix} d \gg r & r/d \ll 1 \\ d \gg a & a/d \ll 1 \end{matrix}$$

Ограничимся первым членом ряда, т.к. d – большая величина

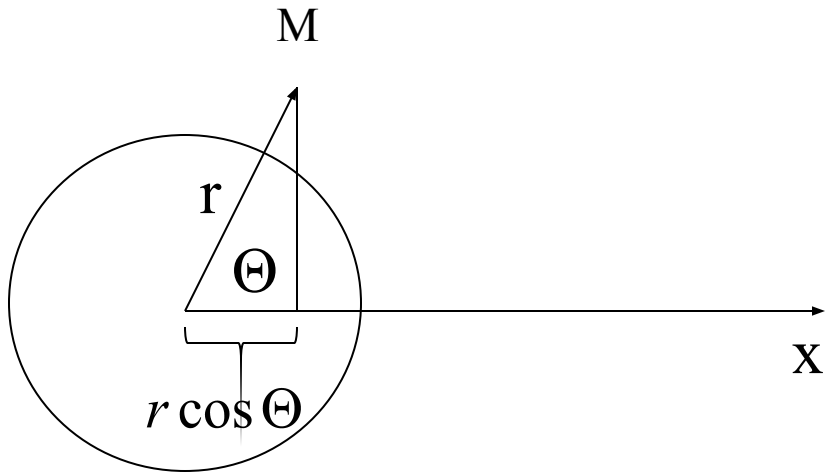
$$k_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1}$$

$$U(r, \Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \frac{I\rho_1}{4\pi} \begin{cases} \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \frac{a^3}{d^2} \frac{1}{r^2} \cos \Theta & r > a \\ \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \frac{r}{d^2} \cos \Theta & r < a \end{cases}$$

$$d \approx R$$

$$U(r, \Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \frac{I\rho_1}{4\pi R^2} \begin{cases} \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \frac{a^3}{r^2} \cos \Theta & r > a \\ \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} r \cos \Theta & r < a \end{cases}$$

$$U(r, \Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \frac{I\rho_1}{4\pi R^2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \cos \Theta \begin{cases} \frac{a^3}{r^2} & r > a \\ r & r < a \end{cases}$$



$$\frac{I\rho_1}{4\pi R^2} = -\frac{\partial U_n}{\partial R} = E_n \approx -\frac{\partial U_n}{\partial x} \quad \text{— нормальное поле}$$

Сопоставление с полем диполя:

$$U_n = -E_n x + const = -E_n r \cos \Theta + const$$

$$U_d(M) = \frac{p\rho}{4\pi r^2} \cos \Theta$$

$$U_a = -E_n \cos \Theta \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \left[\begin{array}{l} a^3 \\ r^2 \\ r \end{array} \right]$$

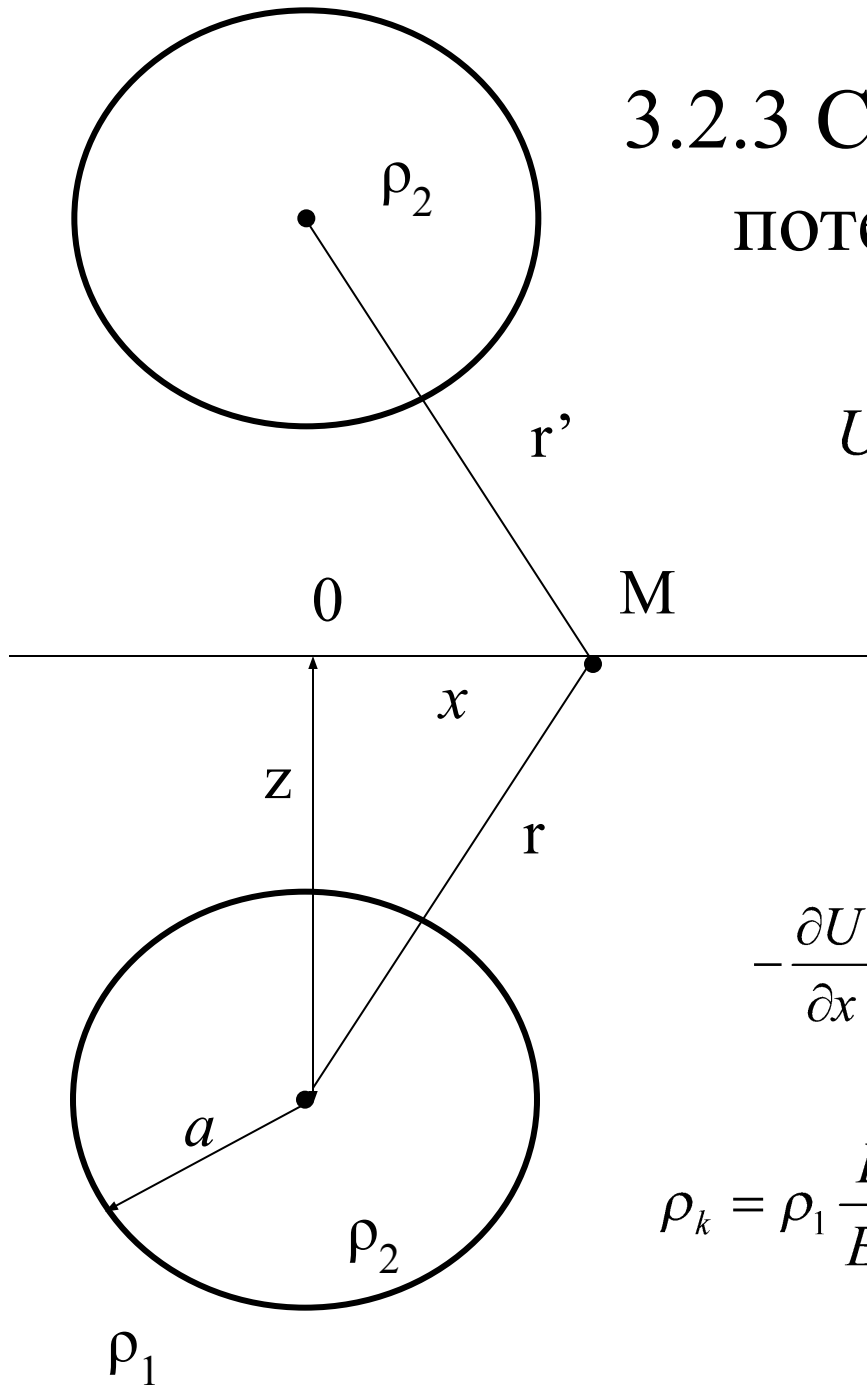
$$\boxed{p} = -4\pi E_n \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \frac{1}{\rho_1 a^3} \boxed{i}$$

$$U = -E_n r \cos \Theta - E_n r \cos \Theta \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \\ 1 \end{array} \right]$$

Выводы:

- Сферическое включение в однородном поле эквивалентно электрическому диполю, помещенному в центре сферы.
- Физическими источниками аномального поля являются индуцированные источники, расположенные на поверхности включения.
- Для шар-проводника внутреннее поле направлено как нормальное поле, для шара-изолятора – направлено противоположно нормальному полю.

3.2.3 Сфера в полупространстве, потенциал на поверхности



$$U = -E_n r \cos \Theta - E_n \cos \Theta k_1 \frac{a^3}{r^2}$$

$$U = -E_n x - E_n x k_1 \frac{a^3}{r^3} =$$

$$= -E_n x \left(1 + k_1 \frac{a^3}{r^3} \right)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = E = E_n \left(1 + 2k_1 a^3 \frac{z^2 - 2x^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \right)$$

$$\rho_k = \rho_1 \frac{E}{E_n} = \rho_1 \left(1 + 2k_1 a^3 \frac{z^2 - 2x^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \right)$$