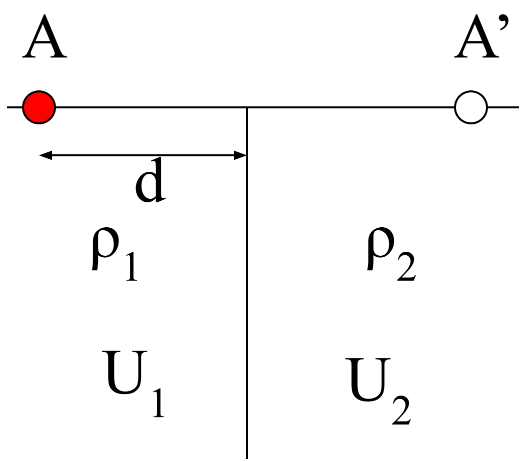
# 3.2 Аномальные поля

# 3.2.1Точечный источник и контакт двух сред

Обозначим: $Q = \dfrac{I\rho_1}{2\pi}$




$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{(x-2d)^2 + y^2 + z^2}$$

Будем искать решение в виде:

$$U_1 = \frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}$$

$$U_2 = \frac{Q + Q''}{r}$$

Г.У.:

$$U_1 = U_2$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial U_2}{\partial x}$$

На границе:

$$U_1(d) = \frac{Q + Q'}{d}$$

$$U_2(d) = \frac{Q + Q''}{d}$$

$$Q'' = Q'$$

$$j_{n1} = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{Qx}{r^3} + \frac{Q'(x-2d)}{r'^3}\right) = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{Qd}{d^3} - \frac{Q'd}{d^3}\right) = \frac{Q-Q'}{\rho_1 d^2}$$

$$j_{n2} = \frac{Q+Q''}{\rho_2 d^2} = \frac{Q+Q'}{\rho_2 d^2} \qquad \frac{Q-Q'}{\rho_1} = \frac{Q+Q''}{\rho_2} \qquad Q(\rho_2-\rho_1) = Q'(\rho_2+\rho_1)$$

$$Q' = Q\,\frac{(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_2+\rho_1)}$$

Коэффициент отражения: $k_{12} = \dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}$

Решение:

$$U_1 = Q\left(\frac{1}{r} + \frac{k_{12}}{r'}\right) \qquad U_2 = Q\left(\frac{1+k_{12}}{r}\right)$$

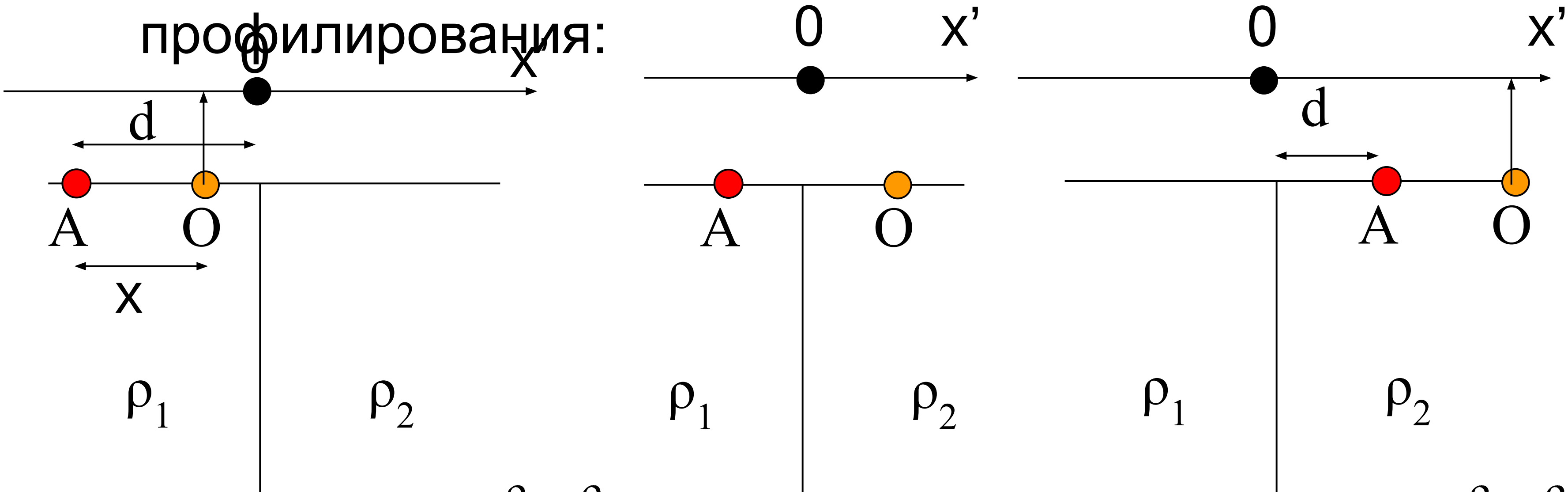
На поверхности
земли:

$$U_1 = Q\left(\frac{1}{x} + \frac{k_{12}}{(x-2d)}\right) \qquad U_2 = Q\left(\frac{1+k_{12}}{x}\right)$$

Дифференцирование по направлению x
дает поле, отвечающее идеальной градиент-установке

$$E_1 = Q\left(\frac{1}{x^2} - \frac{k_{12}}{(x-2d)^2}\right) \qquad E_2 = Q\left(\frac{1+k_{12}}{x^2}\right)$$

Проведем преобразования применительно к случаю профилирования:




$x = AO; x' = x - d = AO - d; k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ $\quad x = AO \quad$ $x = AO; x' = AO + d; k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$

1. 2. 3.

1. $E_1 = Q_1\left(\frac{1}{x^2} - \frac{k_{12}}{(2d-x)^2}\right) = Q_1\left(\frac{1}{AO^2} - \frac{k_{12}}{(AO-2x')^2}\right) = \frac{Q_1}{AO^2}\left(1 - \frac{k_{12}}{\left(1-\frac{2x'}{AO}\right)^2}\right)$

2. $E_2 = Q_1\frac{1+k_{12}}{x^2} = Q_1\frac{1+k_{12}}{AO^2}$

3. $E_3 = Q_2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{k_{12}}{(2d+x)^2}\right) = Q_2\left(\frac{1}{AO^2} + \frac{k_{12}}{(2x'+AO)^2}\right) = \frac{Q_2}{AO^2}\left(1 - \frac{k_{12}}{\left(1+\frac{2x'}{AO}\right)^2}\right)$

# Формулы для кажущегося сопротивления идеальной градиент-установки

$$U = E \cdot MN \qquad \rho_k = k\frac{U}{I} = k\frac{E \cdot MN}{I} = \frac{2\pi \cdot AM \cdot AN}{MN}\frac{E \cdot MN}{I} \approx 2\pi AO^2 \frac{E}{I}$$

AMN:

$$\rho_k^1 = \rho_1 \left( 1 - \frac{k_{12}}{\left(1 - \frac{2x'}{AO}\right)^2} \right)$$

$$\rho_k^2 = \rho_1 (1 + k_{12})$$

$$\rho_k^3 = \rho_2 \left( 1 - \frac{k_{12}}{\left(1 - \frac{2x'}{AO}\right)^2} \right)$$

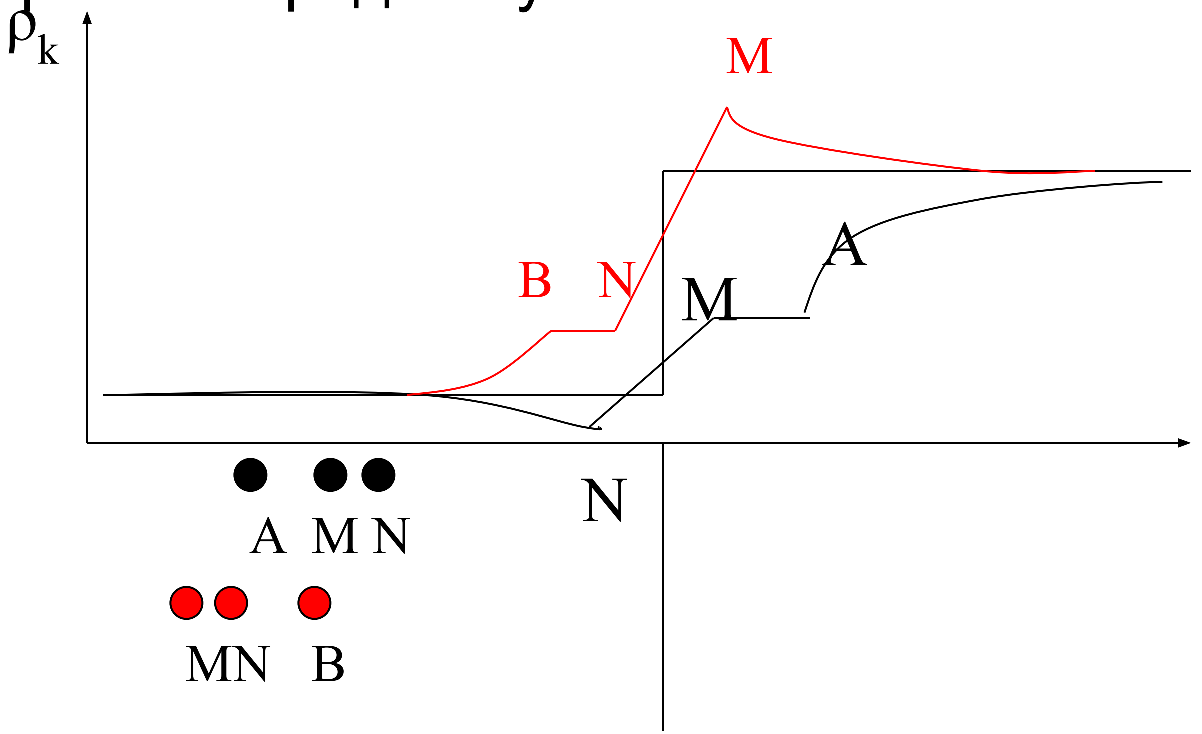
MNB:

$$\rho_k^1 = \rho_1 \left( 1 + \frac{k_{12}}{\left(1 + \frac{2x'}{AO}\right)^2} \right)$$

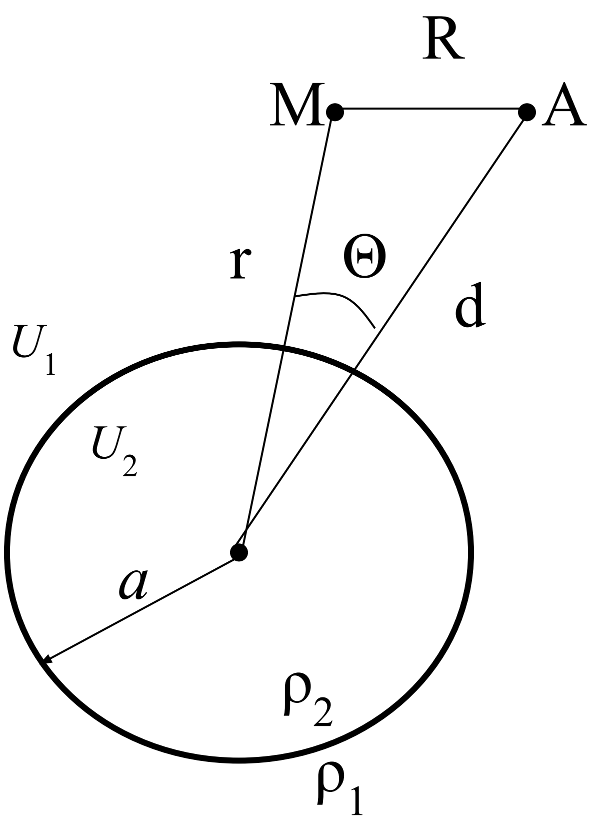
$$\rho_k^2 = \rho_1 (1 + k_{12})$$

$$\rho_k^3 = \rho_2 \left( 1 + \frac{k_{12}}{\left(1 + \frac{2x'}{AO}\right)^2} \right)$$

Графики для реальной установки, факторы, определяющие кажущееся сопротивление,
Взаимосвязь симметричной и трехэлектродной установок



# 3.2.2. Сфера в электрическом поле




Постановка задачи:

$$1)\, U = U_n + U_a = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + U_a(r,\Theta)$$

$$2)\, \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial U_a}{\partial\Theta}\right) = 0$$

$$3a)\, U_1(a) = U_2(a)$$

$$3б)\, \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial U_1}{\partial r}(a) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial U_2}{\partial r}(a)$$

Разрыв радиальной компоненты **E**
(при неразрывности тангенциальной)

$$4)\, U_a(r,\Theta) \to 0,\ r \to \infty$$

---

$$R = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta}$$

Используем метод разделения переменных:

Положим, что $U_a(r,\Theta) = V(r)W(\Theta)$

$$W\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{V}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial W}{\partial\Theta}\right)=0$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{W\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial W}{\partial\Theta}\right)=0$$

$$* \quad \frac{1}{W\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial W}{\partial\Theta}\right)=-m \qquad ** \quad \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=m$$

---

$$z=\cos\Theta \qquad \frac{\partial}{\partial\Theta}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\Theta}=-\sin\Theta\frac{\partial}{\partial z} \qquad \frac{\partial W}{\partial\Theta}=\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\Theta}=-\sin\Theta\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sin^2\Theta\frac{\partial W}{\partial z}\right)+mW=0 \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial W}{\partial z}\right)+mW=0$$

Уравнение Лежандра

Уравнение Лежандра имеет нетривиальные решения при: $m = n(n+1)$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial W}{\partial z}\right) + mW = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial W}{\partial z}\right) + n(n+1)W = 0$$

Решения уравнения – полиномы Лежандра, определяемые по формуле Родрига:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^2 - 1\right)^n$$

$$P_0(z) = 1$$

$$P_1(z) = z = \cos\Theta$$

$$P_2(z) = \frac{1}{4}(3\cos(2\Theta) + 1)$$

$W_n = c_n P_n(\cos\Theta)$ -частные решения

Вернемся к уравнению **

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = n(n+1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) - Vn(n+1) = 0$$

Ему удовлетворяют решения: $V_n^{(1)} = r^n; V_n^{(2)} = \dfrac{1}{r^{n+1}}$

Частное решение: $V_n = b_n^{(1)} r^n + b_n^{(2)} \dfrac{1}{r^{n+1}}$

Объединяем решения:
$$U_a(r,\Theta) = \left( b_n^{(1)} r^n + b_n^{(2)} \frac{1}{r^{n+1}} \right) c_n P_n(\cos\Theta) =$$
$$= \left( A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\Theta)$$

Общее решение:
$$U_a(r,\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\Theta)$$

$r > a : A_n = 0 \qquad r < a : B_n = 0$

$$U(r,\Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\Theta) & r > a \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\Theta) & r < a \end{cases}$$

$$3а)\, U_1(a) = U_2(a) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n a^n - B_n \frac{1}{a^{n+1}}\right)P_n(\cos\Theta) = 0 \qquad A_n a^n - B_n \frac{1}{a^{n+1}} = 0$$

Предварительно представим 1/R с помощью полиномов Лежандра

$$3б)\, \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial U_1}{\partial r}(a) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial U_2}{\partial r}(a) \qquad \frac{I\rho_1}{4\pi R} = \frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta}}$$

Для r<d:
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos\Theta)$$

Для r>d:
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\Theta)$$

Для окрестностей шара: r<d

$$U(r,\Theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{r^n}{d^{n+1}} + B_n\frac{1}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\Theta) \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{r^n}{d^{n+1}} + A_n r^n\right)P_n(\cos\Theta) \end{cases} \qquad \frac{\partial U}{\partial r}(r,\Theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{I\rho_1 n}{4\pi}\frac{r^{n-1}}{d^{n+1}} - B_n\frac{n+1}{r^{n+2}}\right)P_n(\cos\Theta) \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{I\rho_1 n}{4\pi}\frac{r^{n-1}}{d^{n+1}} + A_n n r^{n-1}\right)P_n(\cos\Theta) \end{cases}$$

$$3б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{I\rho_1 n}{4\pi}\frac{a^{n-1}}{d^{n+1}}-\frac{(n+1)}{\rho_1}\frac{B_n}{a^{n+2}}-\frac{n}{\rho_2}A_n a^{n-1}\right)P_n(\cos\Theta)=0$$

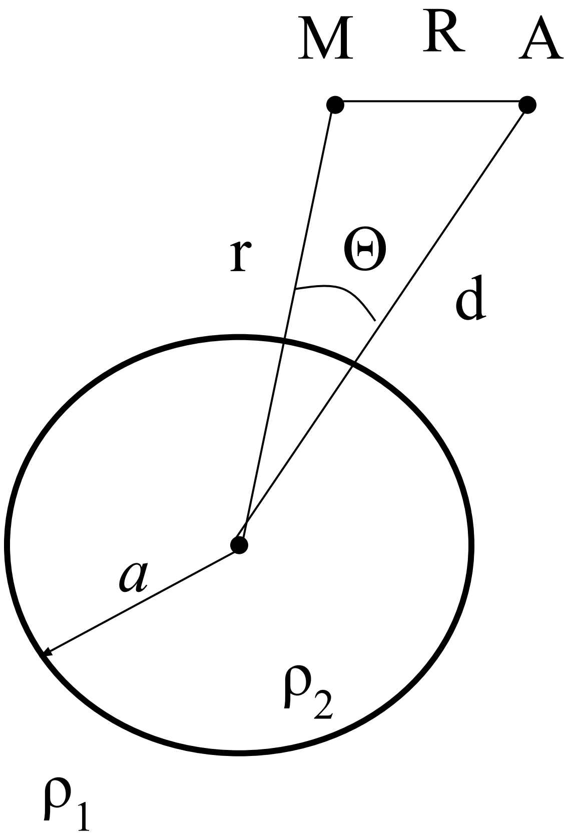
Решение уравнений 3а и 3б:

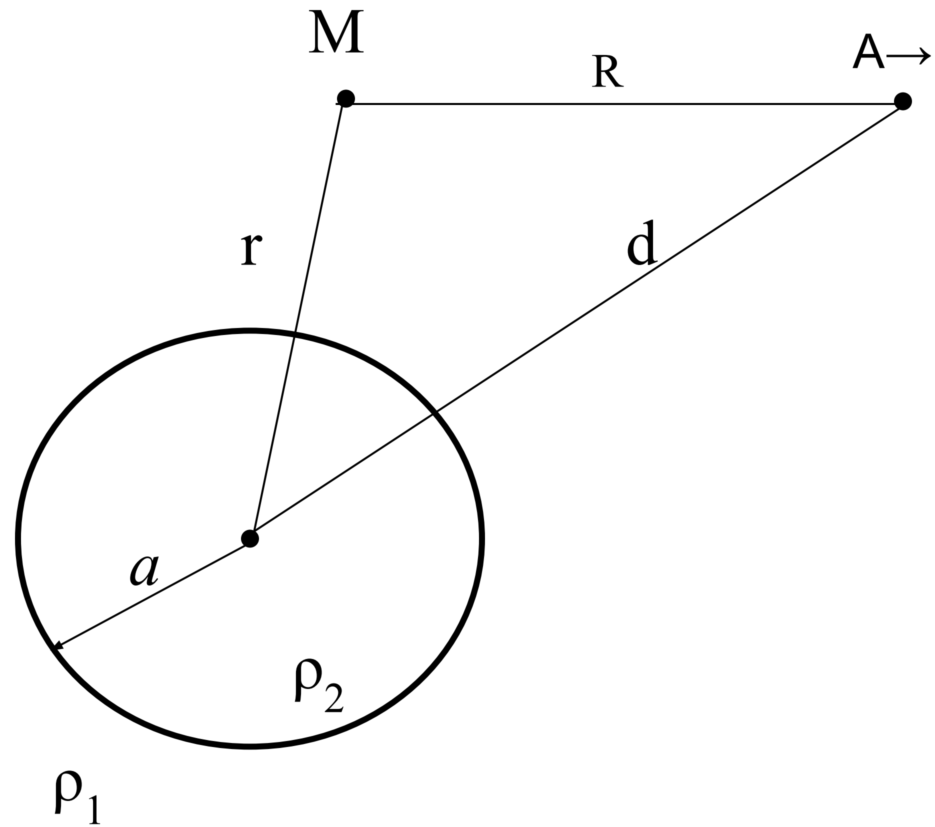
$$k_n=\frac{n(\rho_2-\rho_1)}{(n+1)\rho_2+n\rho_1}$$ - коэффициент отражения

$$A_n=\frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{k_n}{d^{n+1}}\qquad B_n=\frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{k_n a^{2n+1}}{d^{n+1}}$$

$$U(r,\Theta)=\frac{I\rho_1}{4\pi R}+\frac{I\rho_1}{4\pi}\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n a^{2n+1}}{d^{n+1}}\frac{1}{r^{n+1}}P_n(\cos\Theta) & r>a\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{d^{n+1}}r^n P_n(\cos\Theta) & r<a\end{cases}$$

Частный случай однородного поля:




$$U(r,\Theta)=\frac{I\rho_1}{4\pi R}+\frac{I\rho_1}{4\pi}\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n a^{2n+1}}{(dr)^{n+1}}P_n(\cos\Theta) & r>a\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{d^{n+1}}r^n P_n(\cos\Theta) & r<a\end{cases}$$

$d>>r \quad r/d<<1$

$d>>a \quad a/d<<1$

Ограничимся первым членом ряда, т.к. d – большая величина

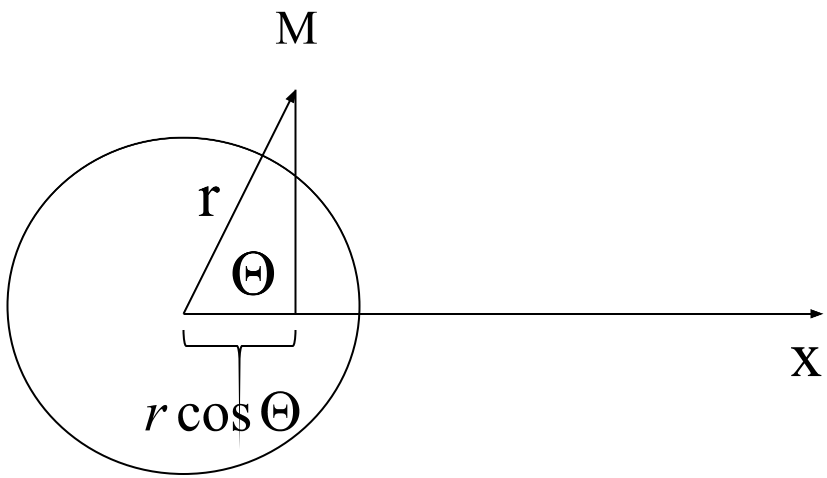
$$k_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1}$$

$$U(r,\Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \frac{I\rho_1}{4\pi}\begin{cases} \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1}\dfrac{a^3}{d^2}\dfrac{1}{r^2}\cos\Theta & r > a \\ \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1}\dfrac{r}{d^2}\cos\Theta & r < a \end{cases}$$

$$d \approx R$$

$$U(r,\Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \frac{I\rho_1}{4\pi R^2}\begin{cases} \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1}\dfrac{a^3}{r^2}\cos\Theta & r > a \\ \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} r\cos\Theta & r < a \end{cases}$$

$$U(r,\Theta) = \frac{I\rho_1}{4\pi R} + \frac{I\rho_1}{4\pi R^2}\frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1}\cos\Theta\begin{cases} \dfrac{a^3}{r^2} & r > a \\ r & r < a \end{cases}$$




$$\frac{I\rho_1}{4\pi R^2} = -\frac{\partial U_n}{\partial R} = E_n \approx -\frac{\partial U_n}{\partial x}$$ – нормальное поле

Сопоставление с полем диполя:

$$U_n = -E_n x + const = -E_n r\cos\Theta + const$$

$$U_d(M) = \frac{p\rho}{4\pi r^2}\cos\Theta$$

$$U_a = -E_n \cos\Theta\,\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\begin{cases}\dfrac{a^3}{r^2}\\ r\end{cases}$$

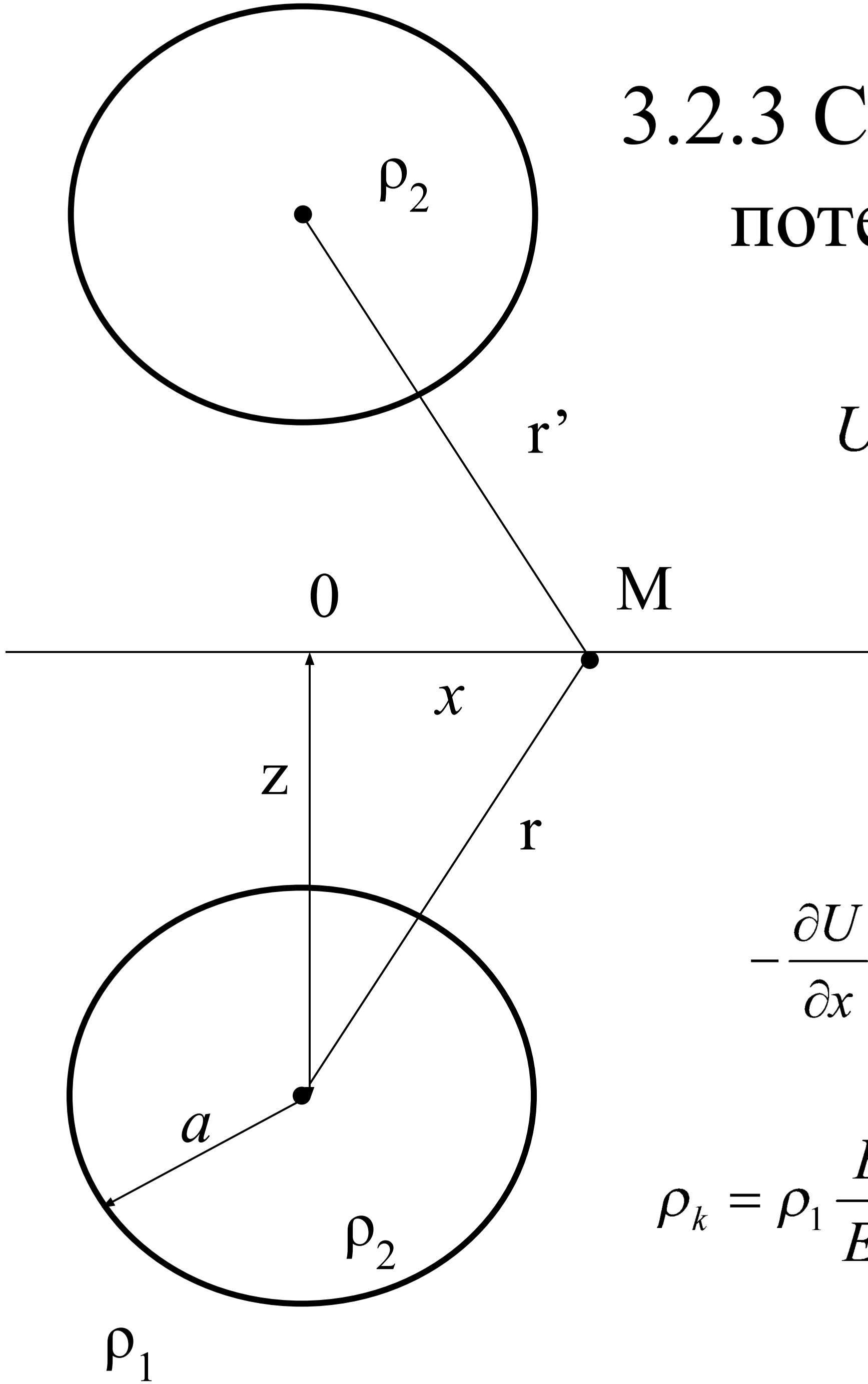
$$\vec{p} = -4\pi E_n\,\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\,\frac{1}{\rho_1 a^3}\,\vec{i}$$

$$U = -E_n r\cos\Theta - E_n r\cos\Theta\,\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\begin{cases}\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\\ 1\end{cases}$$

# Выводы:

- Сферическое включение в однородном поле эквивалентно электрическому диполю, помещенному в центре сферы.
- Физическими источниками аномального поля являются индуцированные источники, расположенные на поверхности включения.
- Для шар-проводника внутреннее поле направлено как нормальное поле, для шара-изолятора – направлено противоположно нормальному полю.

# 3.2.3 Сфера в полупространстве, потенциал на поверхности




$$U = -E_n r\cos\Theta - E_n \cos\Theta k_1 \frac{a^3}{r^2}$$

$$U = -E_n x - E_n x k_1 \frac{a^3}{r^3} =$$

$$= -E_n x\left(1 + k_1 \frac{a^3}{r^3}\right)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = E = E_n\left(1 + 2k_1 a^3 \frac{z^2 - 2x^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}}\right)$$

$$\rho_k = \rho_1 \frac{E}{E_n} = \rho_1\left(1 + 2k_1 a^3 \frac{z^2 - 2x^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}}\right)$$