Лекция 8

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ -ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Основные характеристики скалярных полей

I. Геометрические характеристики

2. Дифференциальные характеристики

3. Интегральные характеристики

4. Связь характеристик скалярного поля

1. Скалярное поле

Определение.

Если с каждой точкой $P(x,y,z)$ некоторой пространственной области G связана скалярная величина, то в области G задано **скалярное поле**

$$u = f(x,y,z)$$

$f(x,y,z)$ - **функция поля**

Примеры: поле температур, поле давления, поле плотности, поле концентраций, поле электрического заряда.

Геометрические характеристики скалярного поля -

поверхности и линии уровня.

Определение.

Поверхностью уровня скалярного поля

$$u = u(P)$$

называется геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$\boxed{\Sigma : u(P) = const}$$

Поверхность уровня $\equiv$ *эквипотенциальная поверхность*

Линия уровня - геометрическая характеристика плоского поля

$$P(x, y)$$

$$u = u(x, y)$$

$$\boxed{L : u(x, y) = const}$$

При помощи геометрических характеристик скалярные поля можно ***рисовать.***

Пример 2.

$$u = \frac{e}{r} = \frac{e}{|\vec{r}|} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- потенциал точечного заряда.

$$\Sigma : \frac{e}{r} = const \Rightarrow \quad |\vec{r}| = const,$$

$$x^2 + y^2 + y^2 = const$$

- уравнение сферы

$$\Sigma : \frac{e}{r} = c$$

2.

Дифференциальные характеристики скалярного поля -

характеристики *отдельной точки* поля.

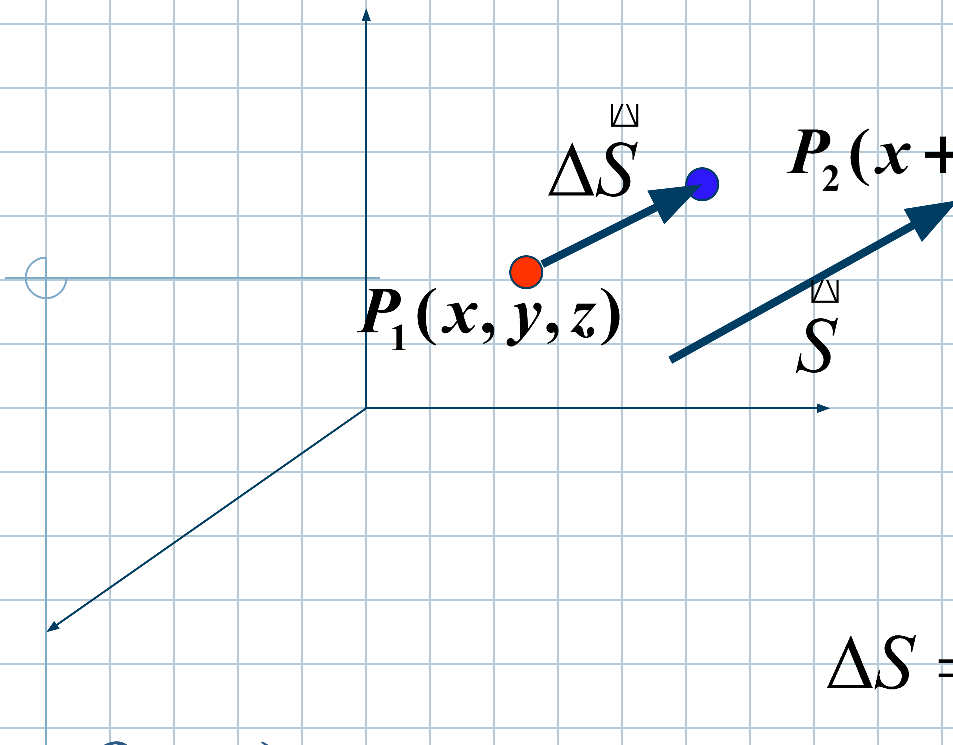
Рассмотрим скалярное поле $u = u(x, y, z)$,

где $u(x, y, z)$ – *дифференцируемая* функция.

1. Производная по направлению

- *скалярная* характеристика.

Найдем, как изменяется поле в некотором направлении.



$$\Delta\vec{S} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\Delta\vec{S} \parallel \vec{S}$$

$$\Delta S = \left|\Delta\vec{S}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Определение.

Производной скалярного поля $u(P)$ ***по направлению*** вектора $\vec{S}$ в точке P называется ***число***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}}$$

где $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x, y, z)$

Смысл производной по направлению

Из определения следует:

$\frac{\partial u}{\partial S}$ – ***скорость изменения*** поля u в точке P в направлении $\vec{S}$.

$\frac{\partial u}{\partial S} > 0$ – поле u ***возрастает*** в точке P в направлении $\vec{S}$.

$\frac{\partial u}{\partial S} < 0$ – поле u ***убывает*** в точке P в направлении $\vec{S}$.

Формула для вычисления $\dfrac{\partial u}{\partial S}$

- Рассмотрим

$$\Delta u = u(P_2) - u(P_1) =$$

$$= u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + o(\rho);$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta S$$

Рассмотрим *)

$$\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta S}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta S}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta S}+\frac{o(\rho)}{\Delta S}$$

Устремим $\Delta S\to 0 \quad \left(P_2\to P_1\right)$

$$\cos\alpha \qquad \cos\beta \qquad \cos\gamma \qquad 0$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta S}$$

*) $$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta S} + \frac{o(\rho)}{\Delta S}$$

$$\cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta S}$$

$$\cos\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta S}$$

-направляющие косинусы коллинеарных векторов $\Delta\vec{S} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\vec{S}$

Координаты орта этих векторов:

$$\vec{S}_0 = \frac{\Delta\vec{S}}{\left|\Delta\vec{S}\right|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

Таким образом, при $\Delta S \to 0$ правая часть равенства *) стремится к выражению

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

Следовательно, при $\Delta S \to 0$ существует предел левой части равенства *), совпадающий с пределом правой части.

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_P = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P \cdot \cos\gamma}$$

Формула для вычисления ***производной по направлению***

2. Градиент скалярного поля

\- *векторная* характеристика.

Определение.

Градиентом скалярного поля $u(P)$ в точке P называется ***вектор***

$$\boxed{\operatorname{grad} u \equiv \vec{\nabla} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}}$$

Смысл характеристики - позже.

Формула для вычисления – в определении характеристики.

Обозначим

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}}$$

Формальный дифференциальный векторный оператор Гамильтона (оператор ***“набла”***)

$$\vec{\nabla} u = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

Действие оператора ***“набла”*** на u - результат формального умножения ***“набла”*** на u

Свойства оператора “набла”

1. $\vec{\nabla}(u+v)=\vec{\nabla}u+\vec{\nabla}v;$

2. $\vec{\nabla}(\alpha u)=\alpha\vec{\nabla}u;$

3. $\vec{\nabla}(uv)=v\vec{\nabla}u+u\vec{\nabla}v;$

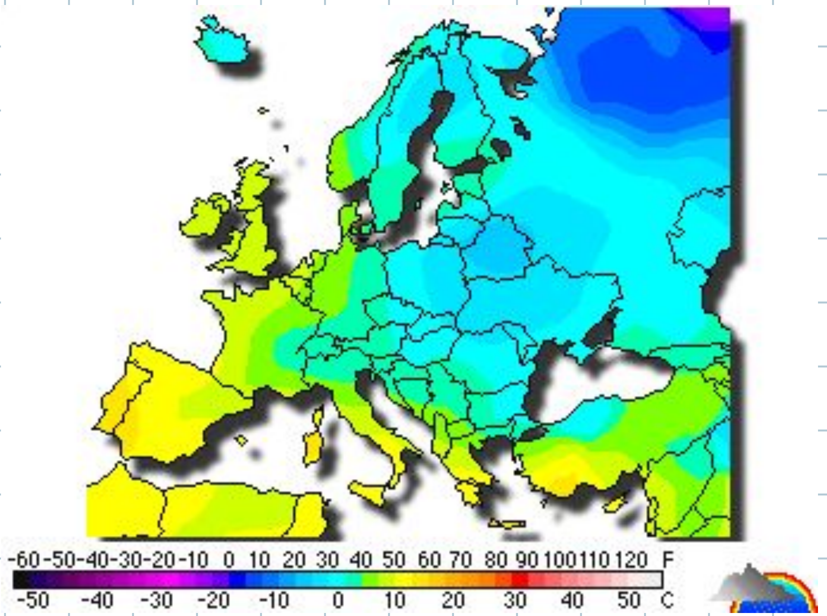
4. $\vec{\nabla}f(u)=f'(u)\vec{\nabla}u;$

3. Интегральные характеристики скалярного поля-

характеристики поля в целом (Integer)

Пример **.** Поле температур:

$$\langle t \rangle_{\Phi} = \frac{\int\limits_{\Phi} t(P)\,d\mu}{\int\limits_{\Phi} d\mu}$$



-средняя температура

в области поля Ф.

4. Связь характеристик скалярного поля

1. Градиент и производная по направлению.

Другая запись формулы для вычисления $\dfrac{\partial u}{\partial S}$

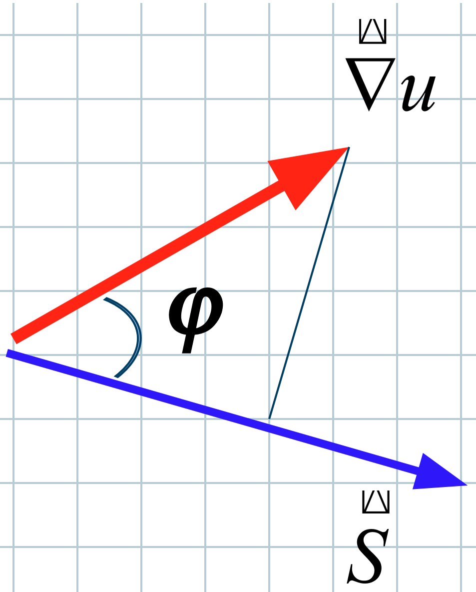
$$\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_P=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P\cdot\cos\gamma$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_P=\left(\left.\vec{\nabla}u\right|_P\cdot\vec{S}_0\right)}$$

2. Смысл градиента.

Из формулы вычисления градиента следует

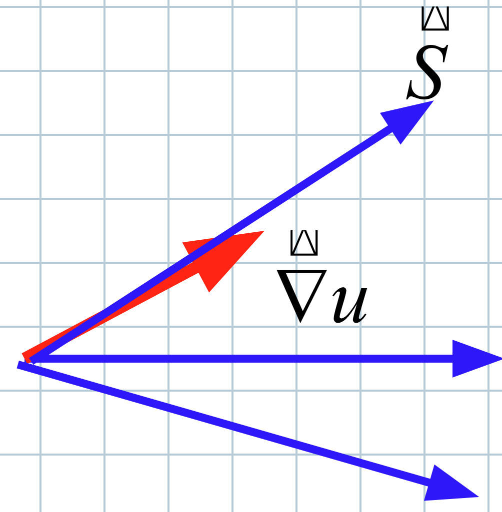
$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_P = \left. np_{\vec{S}} \vec{\nabla} u \right|_P = \left|\vec{\nabla} u\right| \cdot \cos\varphi}$$



Если направление $\vec{S}$ совпадает с направлением $\vec{\nabla} u$ в точке P ,

то ***значение*** $\left.\dfrac{\partial u}{\partial S}\right|_P$ ***будет наибольшим !***

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{S}}\right|_P = np_{\vec{S}} \left.\vec{\nabla} u\right|_P$$



$$\Downarrow$$

а) $\vec{\nabla} u$ - ***направлен*** в сторону наибыстрейшего возрастания поля *u*.

б) $\left|\vec{\nabla} u\right| = \max \dfrac{\partial u}{\partial \vec{S}}$

Длина градиента численно равна максимальной скорости возрастания скалярного поля ***u*** .

3. Градиент и поверхности уровня.

Рассмотрим

$\Sigma : u(x, y, z) = c$ - уравнение поверхности уровня

Через точку $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \Sigma$ проведем касательную плоскость:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x-\overline{x}) + \frac{\partial u}{\partial y}(y-\overline{y}) + \frac{\partial u}{\partial z}(z-\overline{z}) = 0$$

$\vec{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ - вектор нормали к касательной плоскости или к поверхности уровня

$$grad u \equiv \vec{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} u = \vec{n}}$$

Выводы.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня.

2. Направление нормали к поверхности уровня есть направление наибыстрейшего изменения скалярного поля.

Понятие градиента может быть использовано для отыскания экстремума функции нескольких переменных численными методами.

Пример.

$$u = x^2 + y^2 + z^2; \qquad P(1,1,1); \qquad \vec{S} = (1,1,1);$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_P = ?$$

Решение.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_P = \left(\left.\vec{\nabla} u\right|_P, \vec{S}_0\right) = \left|\begin{array}{l} \vec{\nabla} u = (2x, 2y, 2z) \\ \left.\vec{\nabla} u\right|_P = (2,2,2) \\ \vec{S}_0 = \dfrac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}; \end{array}\right| = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$$

В точке P в направлении $\vec{S}$ ***поле возрастает с максимальной скоростью*** $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$.

Основные характеристики скалярных полей

I. Геометрические характеристики

Линии, поверхности уровня

2. Дифференциальные характеристики

Скалярная

$$\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_P$$

Векторная

$$\left.\vec{\nabla} u\right|_P$$

3. Интегральные характеристики

$$\langle u \rangle_\Phi$$

4. Связь характеристик скалярного поля