

# Лекция 8

## ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ - ТЕОРИЯ ПОЛЯ Основные характеристики скалярных полей

1. Геометрические характеристики

2. Дифференциальные характеристики

3. Интегральные характеристики

4. Связь характеристик скалярного поля

# 1.

## Скалярное поле

### *Определение.*

Если с каждой точкой  $P(x, y, z)$  некоторой пространственной области  $G$  связана скалярная величина, то в области  $G$  задано **скалярное поле**

$$u = f(x, y, z)$$

$f(x, y, z)$  - функция поля

Примеры: поле температур, поле давления, поле плотности, поле концентраций, поле электрического заряда.

# Геометрические характеристики скалярного поля - поверхности и линии уровня.

*Определение.*

*Поверхностью уровня* скалярного поля

$$u = u(P)$$

называется геометрическое место точек,  
удовлетворяющих уравнению

$$\Sigma : u(P) = \text{const}$$

*Поверхность уровня*  $\equiv$  *эквипотенциальная поверхность*

*Линия уровня* - геометрическая характеристика  
плоского поля

$$P(x, y)$$

$$u = u(x, y)$$

$$L : u(x, y) = \text{const}$$

*При помощи геометрических характеристик  
скалярные поля можно **рисовать**.*

## Пример 2.

$$u = \frac{e}{r} = \frac{e}{|\mathbf{r}|} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- потенциал точечного заряда.

$$\Sigma : \frac{e}{r} = \text{const} \Rightarrow |\mathbf{r}| = \text{const},$$

$$x^2 + y^2 + y^2 = \text{const}$$

- уравнение сферы

$$\Sigma : \frac{e}{r} = c$$

2.

## Дифференциальные характеристики скалярного поля -

характеристики *отдельной точки* поля.

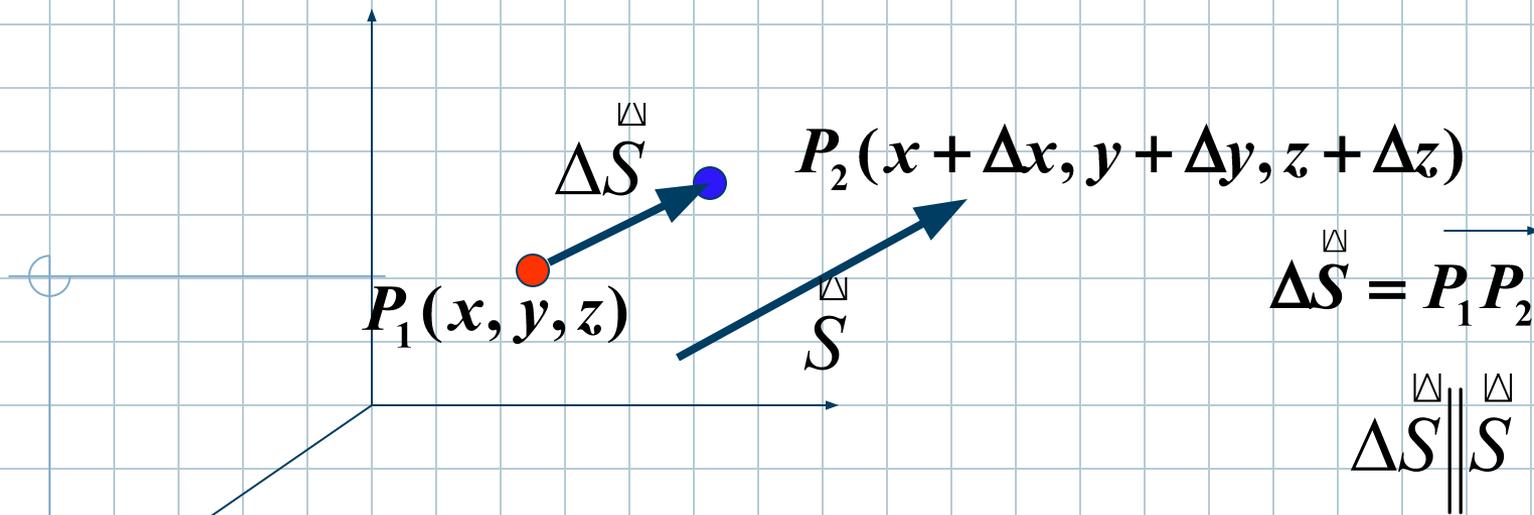
Рассмотрим скалярное поле  $u = u(x, y, z)$ ,

где  $u(x, y, z)$  — дифференцируемая функция.

### 1. Производная по направлению

- *скалярная характеристика.*

Найдем, как изменяется поле в некотором направлении.



$$\Delta S = |\Delta S| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

**Определение.**

**Производной** скалярного поля  $u(P)$  **по направлению** вектора  $S$  в точке  $P$  называется **число**

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}$$

где  $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)$

# Смысл производной по направлению

Из определения следует:

$\frac{\partial u}{\partial S}$  — скорость изменения поля  $u$   
в точке  $P$  в направлении  $\vec{S}$ .

$\frac{\partial u}{\partial S} > 0$  поле *возрастает*  
в точке  $P$  в направлении  $\vec{S}$ .

$\frac{\partial u}{\partial S} < 0$  поле *убывает*  
в точке  $P$  в направлении  $\vec{S}$ .

## Формула для вычисления

$$\frac{\partial u}{\partial S}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(P_2) - u(P_1) = \\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + o(\rho); \end{aligned}$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta S$$

Рассмотрим \*)

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta S} + \frac{o(\rho)}{\Delta S}$$

Устремим

$$\Delta S \rightarrow 0 \quad (P_2 \rightarrow P_1)$$

$\cos \alpha$

$\cos \beta$

$\cos \gamma$

0

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta S}$$

$$\cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta S}$$

$$\cos \gamma = \frac{\Delta z}{\Delta S}$$

\*)

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta S} + \frac{o(\rho)}{\Delta S}$$

-направляющие косинусы коллинеарных векторов  $\overset{\vee}{\Delta S} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ,  $\overset{\vee}{S}$

*Координаты орта* этих векторов:

$$\overset{\vee}{S}_0 = \frac{\overset{\vee}{\Delta S}}{|\overset{\vee}{\Delta S}|} = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$$

Таким образом, при  $\Delta S \rightarrow 0$  правая часть равенства \*) стремится к выражению

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos \gamma$$

Следовательно, при  $\Delta S \rightarrow 0$  существует предел левой части равенства **\***), совпадающий с пределом правой части.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial S} \right|_P = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P \cdot \cos \gamma$$



Формула для вычисления *производной по направлению*

## 2. Градиент скалярного поля

○ - *векторная характеристика.*

★ *Определение.*

*Градиентом* скалярного поля  $u(P)$  в точке  $P$  называется *вектор*

$$\mathit{grad} u \equiv \nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

*Смысл* характеристики - позже.

*Формула для вычисления* – в определении характеристики.

Обозначим

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Формальный дифференциальный векторный оператор Гамильтона ( оператор *“набла”* )

$$\nabla u = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

Действие оператора *“набла”* на  $u$  - результат формального умножения *“набла”* на  $u$

## Свойства оператора “набла”

1.  $\overset{\Delta}{\nabla}(u + v) = \overset{\Delta}{\nabla}u + \overset{\Delta}{\nabla}v;$

2.  $\overset{\Delta}{\nabla}(\alpha u) = \alpha \overset{\Delta}{\nabla}u;$

3.  $\overset{\Delta}{\nabla}(uv) = v \overset{\Delta}{\nabla}u + u \overset{\Delta}{\nabla}v;$

4.  $\overset{\Delta}{\nabla}f(u) = f'(u) \overset{\Delta}{\nabla}u;$

3.

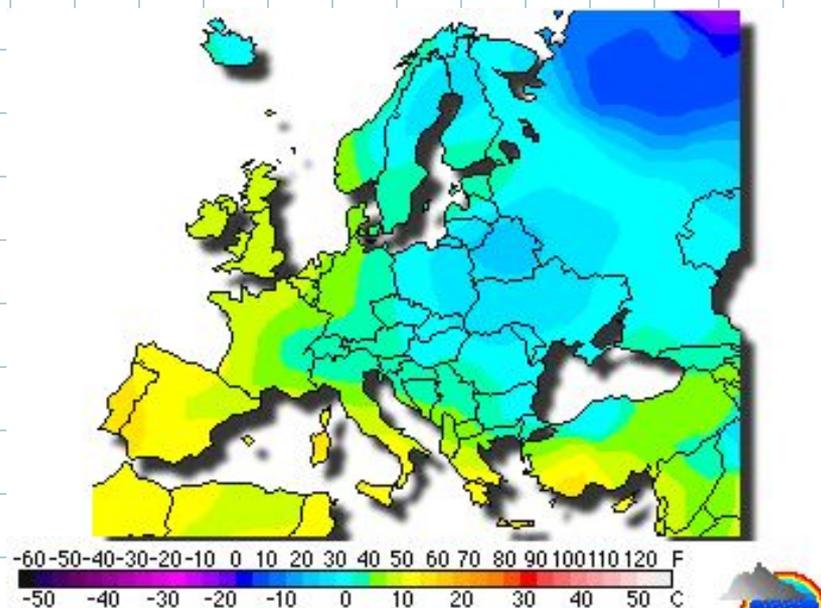
## Интегральные характеристики скалярного поля-

характеристики поля в целом (Integer)

*Пример*. Поле температур:

$$\langle t \rangle_{\Phi} = \frac{\int_{\Phi} t(P) d\mu}{\int_{\Phi} d\mu}$$

*-средняя температура*  
в области поля  $\Phi$ .



# 4.

## Связь характеристик скалярного поля

### 1. Градиент и производная по направлению.

Другая запись формулы для вычисления  $\frac{\partial u}{\partial S}$

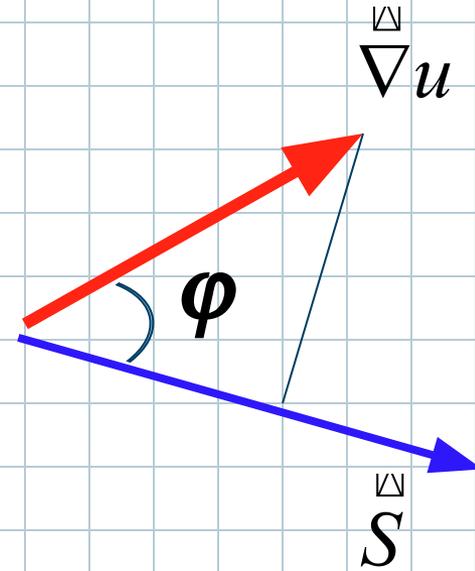
$$\frac{\partial u}{\partial S} \Big|_P = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_P \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} \Big|_P = \left( \nabla u \Big|_P \cdot S_0 \right)$$

## 2. Смысл градиента.

Из формулы вычисления градиента следует

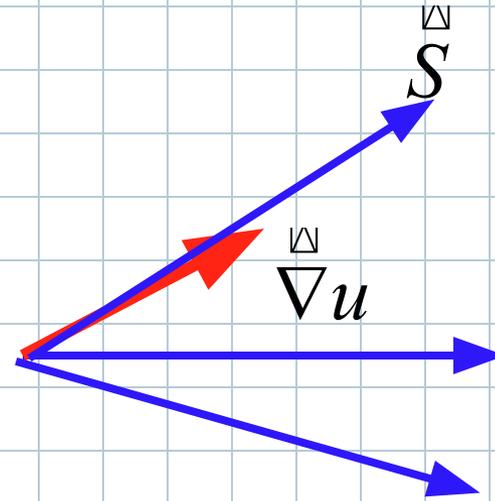
$$\left. \frac{\partial u}{\partial S} \right|_P = \text{пр}_{\vec{S}} \vec{\nabla} u \Big|_P = |\vec{\nabla} u| \cdot \cos \varphi$$



Если направление  $\vec{S}$  совпадает с направлением  $\vec{\nabla} u$  в точке  $P$ ,

то значение  $\left. \frac{\partial u}{\partial S} \right|_P$  будет наибольшим!

$$\left. \frac{\partial u}{\partial S} \right|_P = \text{pr}_S^{\perp} \nabla u \Big|_P$$



- а)  $\nabla u$  - *направлен* в сторону  
наибыстрейшего возрастания поля  $u$ .
- б)  $|\nabla u| = \max \frac{\partial u}{\partial S}$   
*Длина* градиента численно равна  
максимальной скорости возрастания  
скалярного поля  $u$ .

### 3. Градиент и поверхности уровня.

Рассмотрим

$$\Sigma : u(x, y, z) = c \quad \text{- уравнение поверхности уровня}$$

Через точку  $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \Sigma$  проведем касательную плоскость:

$$\frac{\partial u}{\partial x} (x - \bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial y} (y - \bar{y}) + \frac{\partial u}{\partial z} (z - \bar{z}) = 0$$

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{- вектор нормали к касательной плоскости или к поверхности уровня}$$

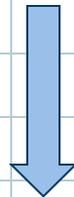
$$\text{gradu} \equiv \vec{\nabla} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} u = \vec{n}$$

## *Выводы.*

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня.

2. Направление нормали к поверхности уровня есть направление **наибыстрейшего изменения скалярного поля.**



Понятие градиента может быть использовано для отыскания экстремума функции нескольких переменных численными методами.

**Пример.**

$$u = x^2 + y^2 + z^2; \quad P(1,1,1); \quad \vec{S} = (1,1,1);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial S} \right|_P = ?$$

**Решение.**

$$\left. \frac{\partial u}{\partial S} \right|_P = \left( \left. \vec{\nabla} u \right|_P, \vec{S}_0 \right) = \left. \vec{\nabla} u \right|_P = (2, 2, 2) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$$
$$\vec{S}_0 = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}};$$

В точке P в направлении  $\vec{S}$  поле возрастает с максимальной скоростью  $\frac{6}{\sqrt{3}}$ .

# Основные характеристики скалярных полей

## 1. Геометрические характеристики

Линии, поверхности уровня

## 2. Дифференциальные характеристики

Скалярная

$$\left. \frac{\partial u}{\partial S} \right|_P$$

Векторная

$$\left. \overset{\Delta}{\nabla} u \right|_P$$

## 3. Интегральные характеристики

$$\langle u \rangle_{\Phi}$$

## 4. Связь характеристик скалярного поля