



Тема: «Собственные векторы и собственные значения матрицы»

Основные понятия:

1. Определения

2. Нахождение собственных значений матрицы

3. Нахождение собственных векторов матрицы



завершить

1. Определения

Ненулевой вектор x называется *собственным вектором* матрицы A , если найдется такое число λ , что

$$Ax = \lambda x$$

Число λ называется *собственным* (*характеристическим*) *значением* (*числом*) матрицы A , соответствующим вектору x .


далее



Характеристическим уравнением матрицы A называется уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Пример 1.



назад

Пример 1. Составить характеристические уравнения для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Решение (Пример 1):

Составим характеристическое уравнение для матрицы A :

$$|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

далее

Решение (Пример 1):

Составим характеристическое уравнение для матрицы В:

$$|B - \lambda E| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 8 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

назад

2. Нахождение собственных значений матрицы

Для нахождения собственных значений матрицы A
необходимо решить характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Пример 2.

назад

Пример 2. Найти собственные значения матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Решение (Пример 2):

Решим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 - \lambda)(5 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2, \\ \lambda = 5. \end{cases}$$

далее

Решение (Пример 2):

Решим характеристическое уравнение матрицы В:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 8(2-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2, \\ \lambda = 3, \\ \lambda = -3. \end{cases}$$

назад

3. Нахождение собственных векторов матрицы

Для нахождения собственных векторов матрицы A необходимо решить систему линейных однородных уравнений

$$(A - \lambda_0 E) \cdot x = 0$$

Пример 3.

назад

Пример 3. Найти собственные векторы следующих матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Решение (Пример 3) для матрицы A:

- 1) Решив характеристическое уравнение для матрицы A, получили $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.
- 2) Для собственного значения $\lambda_1 = 2$ составим систему линейных однородных уравнений:

$$(A - \lambda_1 E) \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 - \lambda_1 & -4 \\ 0 & 5 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x_2 = 0, \\ 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in R, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_{\lambda=2} = (c_1; 0), \quad c_1 \in R.$$

далее

Решение (Пример 3) для матрицы A:

3) Для собственного значения $\lambda_2 = 5$ составим систему линейных однородных уравнений:

$$(A - \lambda_2 E) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 - \lambda_2 & -4 \\ 0 & 5 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 - 4x_2 = 0, \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = -4x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{\lambda=5} = (-4c_2; 3c_2), \quad c_2 \in R.$$

далее

Решение (Пример 3) для матрицы В:

- 1) Решив характеристическое уравнение для матрицы В, получили $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$.
- 2) Для собственного значения $\lambda_1 = 2$ составим систему линейных однородных уравнений:

$$(A - \lambda_1 E) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 8x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 \in R, \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{\lambda_1=2} = (0; c_1; 0), \quad c_1 \in R.$$

далее

Решение (Пример 3) для матрицы В:

3) Для собственного значения $\lambda_2 = 3$ составим систему линейных однородных уравнений:

$$(A - \lambda_2 E) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 8x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in R, \\ x_2 = x_1, \\ x_3 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{\lambda_2=3} = (c_2; c_2; 2c_2), \quad c_2 \in R.$$

далее

Решение (Пример 3) для матрицы В:

4) Для собственного значения $\lambda_3 = -3$ составим систему линейных однородных уравнений:

$$(A - \lambda_3 E) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 = 0, \\ 8x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{5}x_1, \\ x_3 = -4x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in R, \\ x_2 = -\frac{1}{5}x_1, \\ x_3 = -4x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{\lambda_3=-3} = (5c_3; -c_3; -20c_3), \quad c_3 \in R.$$

назад



Спасибо за внимание!

**Не забывайте готовиться к
лекциям и семинарам!**

**(Тема следующей лекции
«Квадратичные формы»)**

Удачи!