# <u>Тема:</u> «Собственные векторы и собственные значения матрицы»

***Основные понятия:***

1. **<u>Определения</u>**
2. **Нахождение собственных <u>значений</u> матрицы**
3. **Нахождение собственных <u>векторов</u> матрицы**

**<u>завершить</u>**

## *1. **Определения***

Ненулевой вектор *x* называется ***собственным вектором*** матрицы А, если найдется такое число $\lambda$ , что

$$Ax = \lambda x$$

Число $\lambda$ называется ***собственным*** (***характеристическим***) ***значением*** (***числом***) матрицы А, соответствующим вектору *x*.

далее

***Характеристическим уравнением*** матрицы А называется уравнение:

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

**<u>Пример</u> 1.**

<u>назад</u>

**Пример 1**. Составить характеристические уравнения для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Решение**:

**Решение** **(Пример 1)**:

Составим характеристическое уравнение для матрицы А:

$$|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

далее

**<u>Решение</u> (Пример 1)**:

Составим характеристическое уравнение для матрицы B:

$$|B-\lambda E|=0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

назад

## ***2. Нахождение собственных значений матрицы***

Для нахождения собственных значений матрицы А **необходимо** решить характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

**Пример** 2.

назад

**Пример 2**. Найти собственные значения матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Решение**:

**Решение** **(Пример 2)**:

Решим характеристическое уравнение матрицы А:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(5-\lambda) = 0 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda = 2, \\ \lambda = 5. \end{array} \right.$$

далее

**<u>Решение</u> (Пример 2)**:

Решим характеристическое уравнение матрицы B:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 8(2-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 9) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2, \\ \lambda = 3, \\ \lambda = -3. \end{array}\right.$$

назад

## ***3. Нахождение собственных векторов матрицы***

Для нахождения собственных векторов матрицы А **необходимо** решить систему линейных однородных уравнений

$$\left(A-\lambda_0 E\right)\cdot x=0$$

**Пример 3.**

назад

**Пример 3**. Найти собственные векторы следующих матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Решение**:

**<u>Решение</u> (Пример 3) для матрицы А**:

1) Решив характеристическое уравнение для матрицы А, получили $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5.$

2) Для собственного значения $\lambda_1 = 2$ составим систему линейный однородных уравнений:

$$(A - \lambda_1 E) \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -4 \\ 0 & 5-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x_2 = 0, \\ 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in R, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_{\lambda=2} = (c_1; 0), \quad c_1 \in R.$$

<u>далее</u>

**<u>Решение</u> (Пример 3) для матрицы А**:

3) Для собственного значения $\lambda_2 = 5$ составим систему линейный однородных уравнений:

$$(A-\lambda_2 E)\cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & -4 \\ 0 & 5-\lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 - 4x_2 = 0, \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = -4x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{\lambda=5} = (-4c_2; 3c_2), \quad c_2 \in R.$$

<u>далее</u>

**<u>Решение</u> (Пример 3) для матрицы В**:

1) Решив характеристическое уравнение для матрицы В, получили $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3.$

2) Для собственного значения $\lambda_1 = 2$ составим систему линейный однородных уравнений:

$$(A - \lambda_1 E) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 8x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 \in R, \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{\lambda_1 = 2} = (0; c_1; 0), \quad c_1 \in R.$$

<u>далее</u>

**<u>Решение</u> (Пример 3) для матрицы В**:

3) Для собственного значения $\lambda_2 = 3$ составим систему линейный однородных уравнений:

$$\left(A-\lambda_2 E\right)\cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 8x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in R, \\ x_2 = x_1, \\ x_3 = 2x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{\lambda_2=3} = \left(c_2; c_2; 2c_2\right), \quad c_2 \in R.$$

<u>далее</u>

**<u>Решение</u> (Пример 3) для матрицы В**:

4) Для собственного значения $\lambda_3 = -3$ составим систему линейный однородных уравнений:

$$\left(A-\lambda_3 E\right)\cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 = 0, \\ 8x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{5}x_1, \\ x_3 = -4x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in R, \\ x_2 = -\dfrac{1}{5}x_1, \\ x_3 = -4x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{\lambda_3=-3} = \left(5c_3; -c_3; -20c_3\right), \quad c_3 \in R.$$

назад

# Спасибо за внимание!

# Не забывайте готовиться к лекциям и семинарам!

**(Тема следующей лекции «Квадратичные формы»)**

# Удачи!