ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- **Теория вероятностей** – раздел математики, изучающий закономерности, присущие массовым случайным явлениям.
- **Предметом** теории вероятностей являются математические модели случайных явлений.
- **Цель** – осуществление прогноза в области случайных явлений.
- **Возникновение** – середина XVII века

МАТЕМАТИКИ, СЫГРАВШИЕ ВЫДАЮЩУЮСЯ РОЛЬ В РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

- Б. Паскаль (1623-1662); П. Ферма (1601- 1665)
- Х. Гюйгенс (1629-1695); Я. Бернулли (1654-1705)
- А. Муавр (1667-1754); П.Лаплас (1749-1827)
- К. Гаусс (1777-1855); С. Пуассон (1781-1840)
- В.Я. Буняковский (1821-1894);
- П.Л. Чебышев (1821-1894); А.М. Ляпунов (1857-1918);
- А. Марков (1856-1918); Е. Слуцкий (1880-1948);
- А. Хинчин (1894-1959); А. Колмогоров (1903-1987)
- Б. Гнеденко (1912-1995) и другие.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- **Опыт или испытание** - совокупность условий, при которых данное событие может произойти.

  Пример: нагревание воды до 100 градусов, подбрасывание монеты или игральной кости, извлечение шара из урны с шарами и т.д.

- **События** могут быть:

  а) **случайное** – может произойти, а может и не произойти;

  б) **достоверное** – произойдёт обязательно при данном испытании;

  в) **невозможное** - никогда не произойдёт при данном испытании.

  Пример: «выпало число 6 на игральной кости» - случайное событие; «извлекли белый шар из урны с белыми шарами»- достоверное событие; «извлекли белый шар из урны с синими шарами» - невозможное событие.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- **Совместные** события могут произойти вместе при одном испытании, **несовместные** – не могут произойти вместе. **Пример**: события А = «попал по мишени 1-й стрелок» и В = «попал по мишени 2-й стрелок» при одновременной стрельбе двух стрелков – совместные события; а события Е = «выпало 5 очков» и М= «выпало 6 очков» при одном подбрасывании игральной кости – несовместное событие.
- **Равновозможные события** – события, для которых нет оснований полагать, что одно из них более возможно, чем другое.

Пример: события «на игральной кости выпало число 6» и «на игральной кости выпало число 1» - равновозможные события (исходя из предположения о симметричности кости).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- **Элементарное событие –** нельзя представить в виде суммы двух или нескольких событий.

Пример: D= «на игральной кости выпало 3 очка» - элементарное событие; F= «на игральной кости выпало более 3-х очков» можно представить в виде суммы трёх событий: «выпало 4 очка», «выпало 5 очков», «выпало 6 очков» - F не является элементарным событием.

- . **Событие А благоприятно событию В,** если всегда, когда произойдёт А, произойдёт В.

Пример: событие «выпало 6 очков на игральной кости» благоприятно событию «выпало чётное число очков».

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- **Полная группа событий** – совокупность несовместных событий, которые могут произойти при данном испытании (обязательно произойдёт только одно из этих событий).
  Пример: если на заочном отделении факультета учатся студены только из трёх городов, то события А= «контрольная работа пришла из 1-го города», В= «контрольная работа пришла из 2-го города», С = «контрольная работа пришла из 3-го города» образуют полную группу.
- **Противоположные события** $A \; и \; \overline{A}$ - несовместные события, такие, что если одно из них не произошло, то обязательно произойдёт другое.
  $A \; и \; \overline{A}$ **образуют полную группу событий**.
  Пример: А = «хотя бы один спортсмен команды занял призовое место», тогда $\overline{A}$ **= «**ни один спортсмен команды не занял призовое место».

Определения вероятности событий

- **Классическое определение вероятности события**

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

где $P(A)$ - классическая вероятность события А,

n – число равновозможных, элементарных, несовместных событий (исходов), которые могут произойти при данном испытании;

m – число событий, благоприятных событию А (из n)

$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(U)=1 \qquad U - \textit{достоверное событие}$$

$$P(V)=0 \qquad V - \textit{невозможное событие}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

- **Статистическое определение вероятности события.**

Пусть производится **n** одинаковых независимых испытаний, событие А появилось в них **m** раз.

Тогда отношение - $\frac{m}{n}$ частота события А.

При увеличении количества испытаний n , $\frac{m}{n}$ стремится к числу р,

где р – статистическая вероятность события А

$$\textit{При } n \to \infty, \quad \frac{m}{n} \to p$$

ДЕЙСТВИЯ НАД СОБЫТИЯМИ

- **Сумма** двух или нескольких событий- это событие, которое заключается в появлении хотя бы одного из этих событий.

  Пример. Суммой событий A= «на игральной кости выпало меньше 3 очков» и B= «на игральной кости выпало 2 или 3 очка» будет событие «на игральной кости выпало меньше 4 очков»

- **Произведение** двух или нескольких событий- это событие, которое заключается в появлении всех данных событий вместе.

  Пример. Призведением событий A= «на игральной кости выпало меньше 3 очков» и B= «на игральной кости выпало 2 или 3 очка» будет событие «на игральной кости выпало 2 очка»

ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОБЫТИЙ

- Т1.1. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$
$$\textit{если } A \textit{ и } B - \underline{\textit{совместные}}$$

- Т1.2. Если А и В – <u>несовместные</u>, то $P(A\cdot B)=0$

  Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$
$$\textit{если } A \textit{ и } B - \textit{несовместные}$$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

- ***Следствие 1*** *Пусть события* $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу, тогда…

$$\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1}$$

- ***Следствие 2.***

Если A *и* $\overline{A}$ - противоположные события, то

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

- Т2.1. Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, при условии, что первое уже произошло.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A / B) = P(A) \cdot P(B / A)}$$

Для нескольких попарно зависимых событий $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

- Т2.2. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей

$$\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)}$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ФОРМУЛА БАЙЕСА

- Пусть событие А может произойти только с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots H_n$. Тогда вероятность события А находится по формуле:

$$\boxed{P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)}$$

- Пусть событие А уже произошло, тогда вероятность того, что появилось событие H_i, где $i=1,2,3,\ldots n$, равна…

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}}$$

где P(A) можно найти по формуле полной вероятности

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

- Пусть производится **n** независимых одинаковых испытаний.

  Событие А в каждом из испытаний может появиться с вероятностью **p**, и не появиться с вероятностью **q**=1-p.

  Тогда вероятность того, что событие А появится **m** раз из **n** находится по формуле

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$