

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ



ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- **Теория вероятностей** – раздел математики, изучающий закономерности, присущие массовым случайным явлениям.
- **Предметом** теории вероятностей являются математические модели случайных явлений.
- **Цель** – осуществление прогноза в области случайных явлений.
- **Возникновение** – середина XVII века



МАТЕМАТИКИ, СЫГРАВШИЕ ВЫДАЮЩУЮСЯ РОЛЬ В РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

- Б. Паскаль (1623-1662); П. Ферма (1601- 1665)
- Х. Гюйгенс (1629-1695); Я. Бернулли (1654-1705)
- А. Муавр (1667-1754); П.Лаплас (1749-1827)
- К. Гаусс (1777-1855); С. Пуассон (1781-1840)
- В.Я. Буняковский (1821-1894);
- П.Л. Чебышев (1821-1894); А.М. Ляпунов (1857-1918);
- А. Марков (1856-1918); Е. Слуцкий (1880-1948);
- А. Хинчин (1894-1959); А. Колмогоров (1903-1987)
- Б. Гнеденко (1912-1995) и другие.



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- ▣ **Опыт или испытание** - совокупность условий, при которых данное событие может произойти.

Пример: нагревание воды до 100 градусов, подбрасывание монеты или игральной кости, извлечение шара из урны с шарами и т.д.

- ▣ **События** могут быть:

а) **случайное** – может произойти, а может и не произойти;

б) **достоверное** – произойдёт обязательно при данном испытании;

в) **невозможное** - никогда не произойдёт при данном испытании.

Пример: «выпало число 6 на игральной кости» - случайное событие; «извлекли белый шар из урны с белыми шарами»- достоверное событие; «извлекли белый шар из урны с синими шарами» - невозможное событие.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- ▣ **Совместные** события могут произойти вместе при одном испытании, **несовместные** – не могут произойти вместе.
Пример: события $A = \text{«попал по мишени 1-й стрелок»}$ и $B = \text{«попал по мишени 2-й стрелок»}$ при одновременной стрельбе двух стрелков – совместные события; а события $E = \text{«выпало 5 очков»}$ и $M = \text{«выпало 6 очков»}$ при одном подбрасывании игральной кости – несовместное событие.
- ▣ **Равновозможные события** – события, для которых нет оснований полагать, что одно из них более возможно, чем другое.
Пример: события «на игральной кости выпало число 6» и «на игральной кости выпало число 1» - равновозможные события (исходя из предположения о симметричности кости).



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- ▣ **Элементарное событие** – нельзя представить в виде суммы двух или нескольких событий.

Пример: $D =$ «на игральной кости выпало 3 очка» - элементарное событие; $F =$ «на игральной кости выпало более 3-х очков» можно представить в виде суммы трёх событий: «выпало 4 очка», «выпало 5 очков», «выпало 6 очков» - F не является элементарным событием.

- ▣ **Событие A благоприятно событию B** , если всегда, когда произойдёт A , произойдёт B .

Пример: событие «выпало 6 очков на игральной кости» благоприятно событию «выпало чётное число очков».



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- **Полная группа событий** – совокупность несовместных событий, которые могут произойти при данном испытании (обязательно произойдёт только одно из этих событий).

Пример: если на заочном отделении факультета учатся студенты только из трёх городов, то события $A =$ «контрольная работа пришла из 1-го города», $B =$ «контрольная работа пришла из 2-го города», $C =$ «контрольная работа пришла из 3-го города» образуют полную группу.

- **Противоположные события** A и \bar{A} несовместные события, такие, что если одно из них не произошло, то обязательно произойдёт другое.

A и \bar{A} образуют полную группу событий.

Пример: $A =$ «хотя бы один спортсмен команды занял призовое место», тогда $\bar{A} =$ «ни один спортсмен команды не занял призовое место».



ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

▣ Классическое определение вероятности события

где $P(A)$ - классическая

вероятность события $A, P(A)$

n – число равновероятных, элементарных, несовместных событий (исходов), которые могут произойти при данном испытании;

m – число событий, благоприятных событию A (из n)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(U) = 1 \quad U \text{ – достоверное событие}$$

$$P(V) = 0 \quad V \text{ – невозможное событие}$$



ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

▣ Статистическое определение вероятности события.

Пусть производится n одинаковых независимых испытаний, событие A появилось в них m раз.

Тогда отношение - $\frac{m}{n}$ частота события A .

При увеличении количества испытаний n ,
стремится к числу p ,

где p – статистическая вероятность события A

$$\text{При } n \rightarrow \infty, \quad \frac{m}{n} \rightarrow p$$



ДЕЙСТВИЯ НАД СОБЫТИЯМИ

- ▣ **Сумма** двух или нескольких событий- это событие, которое заключается в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример. Суммой событий $A =$ «на игральной кости выпало меньше 3 очков» и $B =$ «на игральной кости выпало 2 или 3 очка» будет событие «на игральной кости выпало меньше 4 очков»

- ▣ **Произведение** двух или нескольких событий- это событие, которое заключается в появлении всех данных событий вместе.

Пример. Произведением событий $A =$ «на игральной кости выпало меньше 3 очков» и $B =$ «на игральной кости выпало 2 или 3 очка» будет событие «на игральной кости выпало 2 очка»



ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОБЫТИЙ

- Т1.1. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B),$$

если A и B – совместные

- Т1.2. Если A и B – несовместные, то $P(A \cdot B) = 0$

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

если A и B – несовместные



СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

▣ **Следствие 1** Пусть события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу, тогда...

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

▣ **Следствие 2.**

Если A и \bar{A} - противоположные события, то

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$



ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

- Т2.1. Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, при условии, что первое уже произошло.

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A / B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Для нескольких попарно зависимых событий A_1, A_2, \dots, A_n

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$$

- Т2.2. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$



ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ФОРМУЛА БАЙЕСА

- Пусть событие A может произойти только с одним из несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n . Тогда вероятность события A находится по формуле:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$

- Пусть событие A уже произошло, тогда вероятность того, что появилось событие H_i , где $i=1, 2, 3, \dots, n$, равна...

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

где $P(A)$ можно найти по формуле полной вероятности



ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

- Пусть производится n независимых одинаковых испытаний.

Событие A в каждом из испытаний может появиться с вероятностью p , и не появиться с вероятностью $q=1-p$.

Тогда вероятность того, что событие A появится m раз из n находится по формуле

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

