

The Capital Asset Pricing Model (CAPM)

*«При инвестировании величина процента,
которую вы хотите получить, зависит от того,
хотите ли вы хорошо есть или хорошо спать»*

Дж. Кенфилд Морли

Астабацян Мариам
ЭЭМ-503

- САРМ впервые предложил **У.Шарп**
- В России эту модель также называют **МОДА** (модель оценки долгосрочных активов)
- САРМ позволяет точно прогнозировать **взаимосвязь между риском** какого-либо финансового актива и его **ожидаемой доходностью.**



Допущения в модели CAPM

- Инвесторы не могут влиять на цены в результате сделок
- Все инвесторы находятся в одинаковых условиях
- Инвесторы не платят налогов на получаемые ими доходы и не несут операционных издержек при торговле ценными бумагами
- Поведение инвесторов рационально

Основные финансовые понятия

- **Ожидаемая прибыль от вложений**

$$r = (p_1 + d - p_0) / p_0$$

- **Риск** – распределение ожидаемой прибыли
- **Премия за риск**

$$j = r_j - r_f$$

- **Предельная прибыль**

$$\text{Предельная прибыль}_k = \delta r_p / \delta w_k = r_k$$

- **Предельная дисперсия**

$$\text{Предельная дисперсия}_k = \delta \sigma_p^2 / \delta w_k = 2 \sum w_i \sigma_{ik} = 2 \sigma_{kp}$$



Большинство инвесторов желают получить более высокие прибыли, при этом не расположены к риску.

Диверсификация как способ снижения риска

а) при $n=2$

$$r_p = r_1 w_1 + r_2 w_2$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12} = \\ &= \sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2, \text{ т.к.} \\ &\sigma_{12} = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned}$$

б) при $n > 2$

$$\begin{aligned} r_p &= \sum_{j=1}^n w_j r_j \\ \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

Пример (диверсификация)

Портфель состоит из 2 ценных бумаг. Ожидаемые прибыли от каждой равны 10%, Стандартное отклонение для каждой ценной бумаги равно 2.

- а) прибыли от 2 ценных бумаг идеально положительно коррелированы
- б) прибыли от 2 ценных бумаг не являются идеально коррелированными
- в) прибыли от 2 ценных бумаг идеально отрицательно коррелированы

| Случай | $r_1 = r_2$ | w_1 | w_2 | σ_1 | σ_2 | ρ_{12} | σ_{12} | r_p | σ_p^2 | σ_p Риск |
|--------|-------------|-------|-------|------------|------------|-------------|---------------|-------|--------------|--------------------|
| A | 10% | 1,0 | 0,0 | 2,0 | 2,0 | 1,0 | 4,0 | 10% | 4,0 | 2,0 |
| B | 10% | 0,0 | 1,0 | 2,0 | 2,0 | 1,0 | 4,0 | 10% | 4,0 | 2,0 |
| C | 10% | 0,5 | 0,5 | 2,0 | 2,0 | 1,0 | 4,0 | 10% | 4,0 | 2,0 |
| D | 10% | 0,5 | 0,5 | 2,0 | 2,0 | 0,5 | 2,0 | 10% | 3,0 | 1,7 |
| E | 10% | 1,0 | 0,0 | 2,0 | 2,0 | 0,5 | 2,0 | 10% | 4,0 | 2,0 |
| F | 10% | 0,0 | 1,0 | 2,0 | 2,0 | 0,5 | 2,0 | 10% | 4,0 | 2,0 |
| G | 10% | 0,5 | 0,5 | 2,0 | 2,0 | -1,0 | -4,0 | 10% | 0,0 | 0,0 |

β - коэффициент

- Чувствительность доходности ценной бумаги к изменениям доходности всего рынка

$$\beta_k = \sigma_{kp} / \sigma_p^2$$

$$\text{Предельная дисперсия } \sigma_k^2 = 2\delta\sigma_p^2\beta_k$$

Принцип оптимальности портфеля ценных бумаг

Оптимальным является портфель ценных бумаг, в котором все ценные бумаги с той же самой предельной дисперсией (или β -значением) должны иметь идентичные ожидаемые прибыли

Линейная зависимость между риском и прибылью

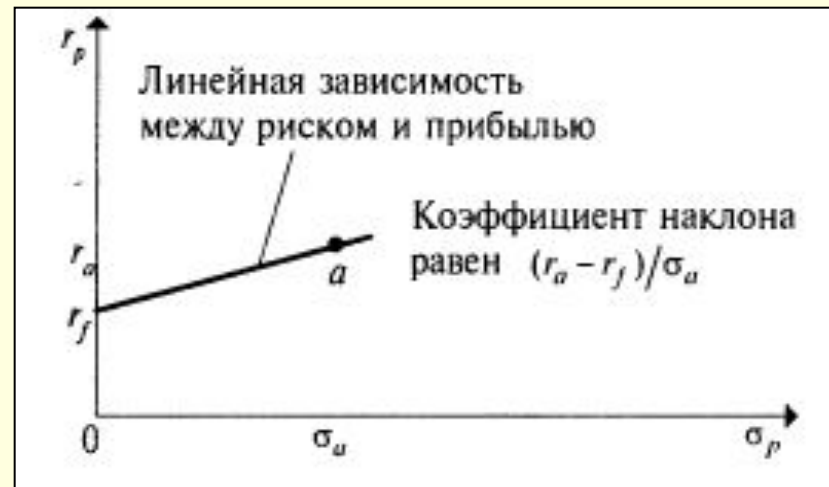
$$r_p = (1-w_a) r_f + w_a r_a$$

$$\sigma_p^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + (1-w_a)^2 \sigma_f^2 + 2w_a(1-w_a)\sigma_{af}, \text{ т.к.}$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_{af} = 0, \text{ то } \sigma_p^2 = w_a^2 \sigma_a^2 \text{ или } \sigma_p = w_a \sigma_a$$

Перегруппируем второе выражение и подставим в уравнение ожидаемой прибыли портфеля

$$r_p = r_f + ((r_a - r_f) / \sigma_a) \sigma_p$$



Эконометрическая реализация структуры модели

1. Линейная зависимость для модели CAPM

$$r_j - r_f = (\sigma_j / \sigma_m) (r_m - r_f)$$

Первый множитель представляет собой β_j

2. Обобщим уравнение путем добавления к нему
постоянного члена α_j и случайного возмущения ε_j

3. Уравнение оценки:

$$r_j - r_f = \alpha_j + \beta_j (r_m - r_f) + \varepsilon_j$$

Применение CAPM

- Управление инвестициями (сравнение ожидаемой доходности с объективной доходностью)
- Планирование долгосрочных инвестиций (вычисление IRR)

Критика CAPM

- Невозможно сформировать портфель, включающий абсолютно все активы
- Не существует безрисковой ставки
- критика предпосылки об идеальных инвесторах
- На ожидаемую доходность влияет не только систематический риск

Использованная литература

1. Э.Берндт «Практика эконометрики: классика и современность»
2. М.Вербик «Путеводитель по современной эконометрике»
3. Асват Дамодаран «Стратегический риск-менеджмент принципы и методики»