

Вычисление определенных интегралов

- Актуальность задачи
- Постановка задачи
- Численные методы решения задачи
- Примеры для сравнения методов

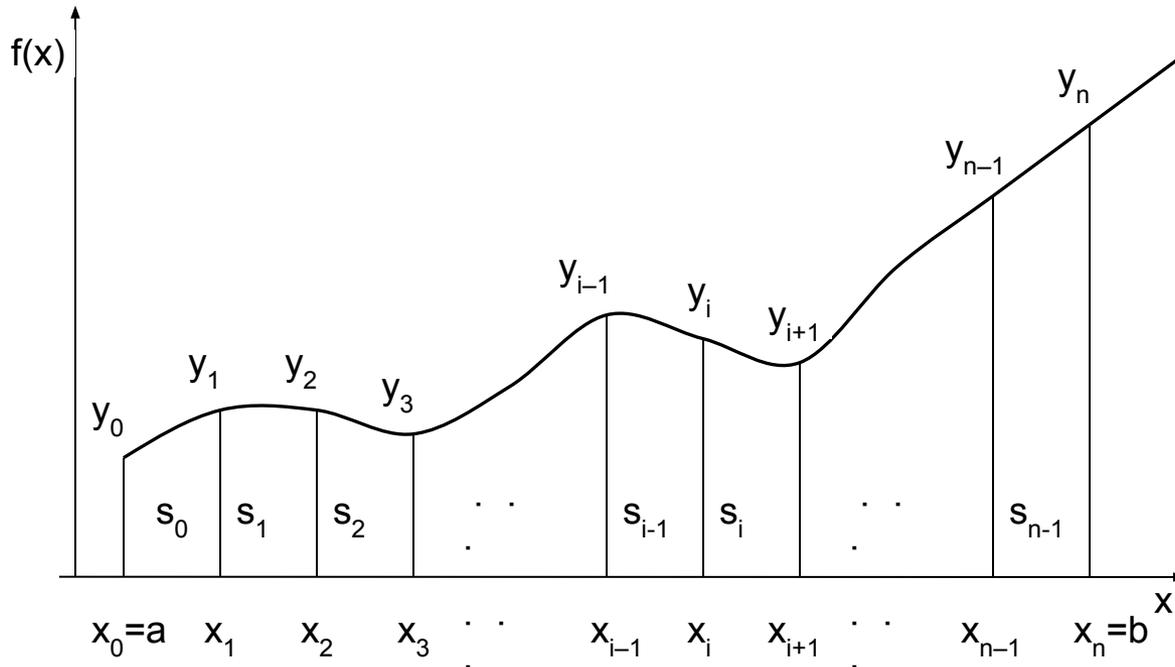
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть на отрезке $[a; b]$ определена непрерывная функция $f(x)$.

Требуется определить значение определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, которое численно равно площади S фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и осью x , на заданном отрезке $[a; b]$. Для приближенного вычисления площади, разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных элементарных отрезков точками:

$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_i = x_{i-1} + h, \dots, x_n = b$, где $h = \frac{b-a}{n}$ — шаг разбиения.

Значение функции $f(x)$ в точках разбиения x_i обозначим через y_i .



Площадь S можно вычислить как сумму элементарных площадей определенных для соответствующих элементарных отрезков длиной h :

$$S = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_i + \dots + s_{n-1}$$

Произвольную площадь s_i можно вычислить, как определенный интеграл на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ от более простой функции $\varphi_i(x)$, которой заменим реальную функцию $f(x)$. В качестве $\varphi(x)$, используем интерполяционный многочлен степени m .

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx$$

Вид функции $\varphi_i(x)$ будет определять название метода.

Интерполяционные многочлены, используемые для вычисления определенных интегралов.

- Если $m = 0$, функция принимается постоянной на отрезке – методы прямоугольников
- Если $m = 1$, полином первой степени – метод трапеций
- Если $m = 2$, полином второй степени – метод Симпсона (метод парабол)

Методы прямоугольников

Значение функции $\varphi_i(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ принимается константой

Метод прямоугольников вперед.

Для функции $\varphi_i(x) = y_i$ (левой границе отрезка) значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i dx = y_i \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_i \cdot h$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Метод прямоугольников назад.

Для функции $\varphi_i(x) = y_{i+1}$ (правой границе) значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1} dx = y_{i+1} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1} \cdot h$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}$$

Метод прямоугольников в среднем.

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}h \quad \text{и значение функции} \quad \varphi_i(x) = y_{i+1/2}$$

Тогда значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1/2} dx = y_{i+1/2} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1/2} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1/2} \cdot h$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1/2}$$

Методы ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ.

ВПЕРЕД

НАЗАД

ПО СРЕДНЕМУ

$x=a:h:b-h;$

$S=h*\sum (f (x));$

$x=a+ h: h: b;$

$S=h*\sum (f (x));$

$x=a+h/2:h:b;$

$S=h*\sum (f (x));$

Метод трапеций

Функцию $\varphi_i(x)$ будем определять как **линейную** ($m=1$) на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$, т.е. ее график должен проходить через две смежные точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) . Функцию $\varphi_i(x)$ можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по двум точкам **(x_i, y_i)** и **(x_{i+1}, y_{i+1})** :

$$\varphi_i(x) = Y(x) = y_i \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \cdot \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

тогда значения элементарной s_i площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} dx$$

Введем переменную $t = \frac{x - x_i}{h}$

Тогда $x = x_i + h \cdot t$ и $dx = h \cdot dt$. Значениям x , равным x_i, x_{i+1} соответствуют значения t , равные 0, 1. Значение $(x - x_i) = x_i - x_i + h \cdot t = h \cdot t$. Значение $(x - x_{i+1}) = x_i - x_{i+1} + h \cdot t = h(t - 1)$. Элементарную площадь s_i с использованием новой переменной определим как:

$$\int_0^1 y_i \frac{h(t-1)}{(-h)} h dt + \int_0^1 y_{i+1} \frac{ht}{(h)} h dt = h \left(\int_0^1 y_i (1-t) dt + \int_0^1 y_{i+1} t dt \right) = h \left(y_i \left(t \Big|_0^1 - \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) + y_{i+1} \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= h \cdot \left(y_i \left(1 - \frac{1}{2} \right) + y_{i+1} \frac{1}{2} \right) = h \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

$$S = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод трапеций

$x = a : h : b - h;$

$S = h * \text{sum}((f(x) + f(x+h))/2);$

$x = a : h : b;$

$S = h * \text{trapz} (f (x));$

Метод Симпсона (метод парабол)

Определим точку $x_{i+1/2} = x_i + 1/2 \cdot h$ в середине элементарного отрезка $[x_i; x_{i+1}]$ и значение функции в этой точке $y_{i+1/2}$

Функцию $\varphi_i(x)$ будем определять как **квадратичную** на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$, т.е. её график должен проходить через три смежные точки (x_i, y_i) , $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ и (x_{i+1}, y_{i+1}) . Функцию $\varphi_i(x)$ можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по **трём точкам x_i , $x_{i+1/2}$ и x_{i+1}** :

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) = Y(x) = & y_i \frac{(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1/2})(x_i - x_{i+1})} + \\ & + y_{i+1/2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1/2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+1/2})} \end{aligned}$$

Тогда значения элементарной s_i площади можно вычислить как:

$$\begin{aligned} s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} & \left(y_i \frac{(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1/2})(x_i - x_{i+1})} + \right. \\ & \left. y_{i+1/2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1/2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+1/2})} \right) dx \end{aligned}$$

Введем переменную $t = \frac{x - x_i}{h}$ тогда $x = x_i + h \cdot t$ и $dx = h \cdot dt$.

Значениям x , равным $x_i, x_{i+1/2}, x_{i+1}$ соответствуют значения t , равные $0, 1/2, 1$

Значение $(x-x_i) = x_i - x_i + h \cdot t = h \cdot t$. Значение $(x-x_{i+1/2}) = x_i - x_{i+1/2} + h \cdot t = h(t - 1/2)$

Значение $(x-x_{i+1}) = x_i - x_{i+1} + h \cdot t = h(t-1)$

Элементарную площадь s_i с использованием новой переменной определим как:

$$\begin{aligned}
 s_i &= \int_0^1 \left(y_i \frac{h(t - \frac{1}{2})h(t-1)}{(-\frac{h}{2})(-h)} + y_{i+1/2} \frac{hth(t-1)}{(\frac{h}{2})(-\frac{h}{2})} + y_{i+1} \frac{hth(t - \frac{1}{2})}{(h)(\frac{h}{2})} \right) h dt = \\
 &= \int_0^1 \left(y_i \frac{(t - \frac{1}{2})(t-1)}{(\frac{1}{2})} + y_{i+1/2} \frac{t(t-1)}{(-\frac{1}{4})} + y_{i+1} \frac{t(t - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})} \right) h dt = \\
 &= h \int_0^1 (y_i (2t^2 - 3t + 1) - 4y_{i+1/2} (t^2 - t) + y_{i+1} (2t^2 - t)) dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \left(y_i \left(2 \frac{t^3}{3} - 3 \frac{t^2}{2} + t \right) - 4 y_{i+1/2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) + y_{i+1} \left(2 \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \right) = \\
&= h \left(y_i \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right) - y_{i+1/2} 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + y_{i+1} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \right) = h \left(y_i \frac{1}{6} + y_{i+1/2} \frac{4}{6} + y_{i+1} \frac{1}{6} \right) \\
&= \frac{h}{6} (y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1})
\end{aligned}$$

Тогда значения общей S площади можно вычислить как:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \frac{h}{6} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1})$$

$$S = \frac{h}{6} \cdot (y_0 + 4y_{1/2} + 2y_1 + 4y_{3/2} + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n)$$

Метод Симпсона

$x = a + h : h : b - h;$

$xs = a + h/2 : h : b;$

$S = h/6 * (f(a) + f(b) + 2 * \text{sum}(f(x)) + 4 * \text{sum}(f(xs)));$

$S = \text{quad} (f, a, b);$

Сравнение методов

- Пример. Вычислить значение интеграла всеми рассмотренными методами при $n=2$

$$S = \int_0^2 x^3 dx$$

