

# Вычисление определенных интегралов

- Актуальность задачи
- Постановка задачи
- Численные методы решения задачи
- Примеры для сравнения методов

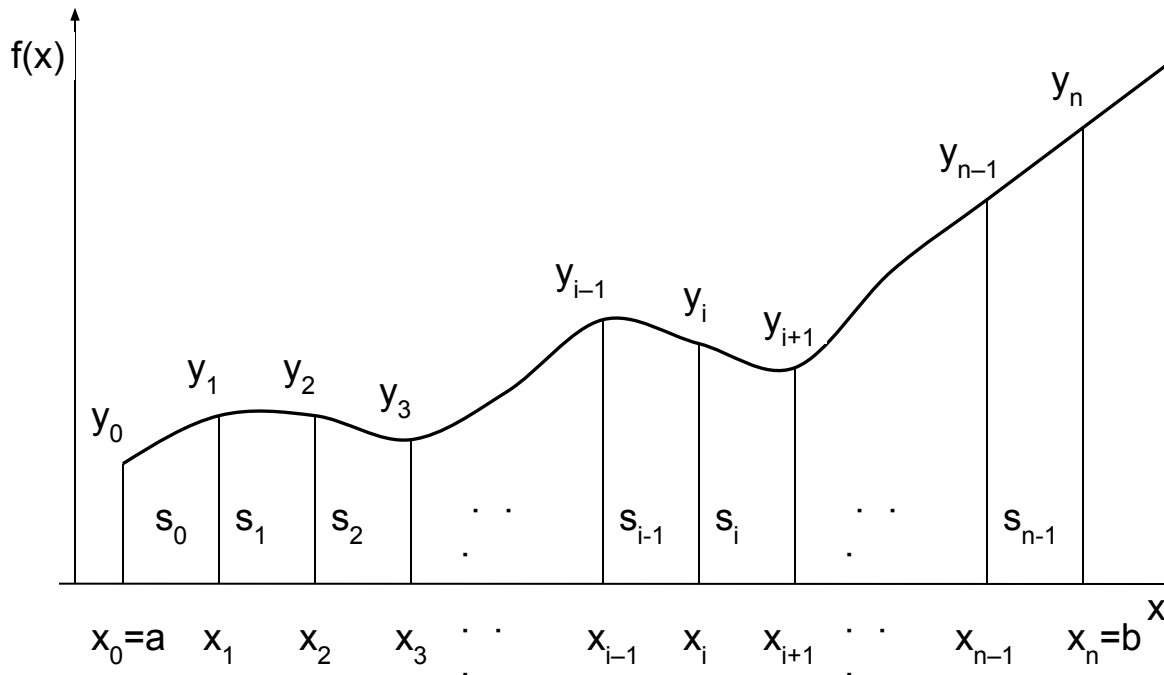
# ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть на отрезке  $[a; b]$  определена непрерывная функция  $f(x)$ .

Требуется определить значение определенного интеграла  $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , которое численно равно площади  $S$  фигуры, ограниченной графиком функции  $f(x)$  и осью  $x$ , на заданном отрезке  $[a; b]$ . Для приближенного вычисления площади, разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  равных элементарных отрезков точками:

$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_i = x_{i-1} + h, \dots, x_n = b$ , где  $h = \frac{b-a}{n}$  — шаг разбиения.

Значение функции  $f(x)$  в точках разбиения  $x_i$  обозначим через  $y_i$ .



Площадь  $S$  можно вычислить как сумму элементарных площадей определенных для соответствующих элементарных отрезков длиной  $h$ :

$$S = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_i + \dots + s_{n-1}$$

Произвольную площадь  $s_i$  можно вычислить, как определенный интеграл на отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  от более простой функции  $\varphi_i(x)$ , которой заменим реальную функцию  $f(x)$ . В качестве  $\varphi(x)$ , используем интерполяционный многочлен степени  $m$ .

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx$$

Вид функции  $\varphi_i(x)$  будет определять название метода.

Интерполяционные многочлены, используемые для вычисления определенных интегралов.

- Если  $m = 0$ , функция принимается постоянной на отрезке – методы прямоугольников
- Если  $m = 1$ , полином первой степени – метод трапеций
- Если  $m = 2$ , полином второй степени – метод Симпсона (метод парабол)

# Методы прямоугольников

Значение функции  $\varphi_i(x)$  на отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  принимается константой

## Метод прямоугольников вперед.

Для функции  $\varphi_i(x) = y_i$  (левой границе отрезка) значения элементарной  $s_i$  и общей  $S$  площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i dx = y_i \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_i \cdot h$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

## Метод прямоугольников назад.

Для функции  $\varphi_i(x) = y_{i+1}$  (правой границе) значения элементарной  $s_i$  и общей  $S$  площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1} dx = y_{i+1} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1} \cdot h$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}$$

## Метод прямоугольников в среднем.

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}h \quad \text{и значение функции} \quad \varphi_i(x) = y_{i+1/2}$$

Тогда значения элементарной  $s_i$  и общей  $S$  площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1/2} dx = y_{i+1/2} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1/2} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1/2} \cdot h$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1/2}$$

## Методы ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ.

ВПЕРЕД

НАЗАД

ПО СРЕДНЕМУ

$x=a:h:b-h;$

$S=h*\text{sum}(f(x));$

$x=a+h:h:b;$

$S=h*\text{sum}(f(x));$

$x=a+h/2:h:b;$

$S=h*\text{sum}(f(x));$

# Метод трапеций

Функцию  $\varphi_i(x)$  будем определять как **линейную** ( $m=1$ ) на отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$ , т.е. ее график должен проходить через две смежные точки  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Функцию  $\varphi_i(x)$  можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по двум точкам  **$(x_i, y_i)$**  и  **$(x_{i+1}, y_{i+1})$** :

$$\varphi_i(x) = Y(x) = y_i \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \cdot \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

тогда значения элементарной  $s_i$  площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} dx$$

Введем переменную  $t = \frac{x - x_i}{h}$

Тогда  $x = x_i + h \cdot t$  и  $dx = h \cdot dt$ . Значениям  $x$ , равным  $x_i, x_{i+1}$  соответствуют значения  $t$ , равные 0, 1. Значение  $(x - x_i) = x_i - x_i + h \cdot t = h \cdot t$ . Значение  $(x - x_{i+1}) = x_i - x_{i+1} + h \cdot t = h(t - 1)$ . Элементарную площадь  $s_i$  с использованием новой переменной определим как:

$$\int_0^1 y_i \frac{h(t-1)}{(-h)} h dt + \int_0^1 y_{i+1} \frac{ht}{(h)} h dt = h \left( \int_0^1 y_i (1-t) dt + \int_0^1 y_{i+1} t dt \right) = h \left( y_i \left( t \Big|_0^1 - \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) + y_{i+1} \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= h \cdot \left( y_i \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + y_{i+1} \frac{1}{2} \right) = h \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) = h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

$$S = h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$



# Метод трапеций

**$x = a : h : b - h;$**

**$S = h * \text{sum}((f(x) + f(x+h))/2);$**

**$x = a : h : b;$**

**$S = h * \text{trapz} ( f (x));$**

## Метод Симпсона (метод парабол)

Определим точку  $x_{i+1/2} = x_i + 1/2 \cdot h$  в середине элементарного отрезка  $[x_i; x_{i+1}]$  и значение функции в этой точке  $y_{i+1/2}$

Функцию  $\varphi_i(x)$  будем определять как **квадратичную** на отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$ , т.е. её график должен проходить через три смежные точки  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Функцию  $\varphi_i(x)$  можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по **трём точкам  $x_i$ ,  $x_{i+1/2}$  и  $x_{i+1}$** :

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) = Y(x) = & y_i \frac{(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1/2})(x_i - x_{i+1})} + \\ & + y_{i+1/2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1/2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+1/2})} \end{aligned}$$

Тогда значения элементарной  $s_i$  площади можно вычислить как:

$$\begin{aligned} s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( y_i \frac{(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1/2})(x_i - x_{i+1})} + \right. \\ \left. y_{i+1/2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1/2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+1/2})} \right) dx \end{aligned}$$

Введем переменную  $t = \frac{x - x_i}{h}$  тогда  $x = x_i + h \cdot t$  и  $dx = h \cdot dt$ .

Значениям  $x$ , равным  $x_i, x_{i+1/2}, x_{i+1}$  соответствуют значения  $t$ , равные  $0, 1/2, 1$

Значение  $(x-x_i) = x_i - x_i + h \cdot t = h \cdot t$ . Значение  $(x-x_{i+1/2}) = x_i - x_{i+1/2} + h \cdot t = h(t - 1/2)$

Значение  $(x-x_{i+1}) = x_i - x_{i+1} + h \cdot t = h(t-1)$

Элементарную площадь  $s_i$  с использованием новой переменной определим как:

$$\begin{aligned}
 s_i &= \int_0^1 \left( y_i \frac{h(t - \frac{1}{2})h(t-1)}{(-\frac{h}{2})(-h)} + y_{i+1/2} \frac{hth(t-1)}{(\frac{h}{2})(-\frac{h}{2})} + y_{i+1} \frac{hth(t - \frac{1}{2})}{(h)(\frac{h}{2})} \right) h dt = \\
 &= \int_0^1 \left( y_i \frac{(t - \frac{1}{2})(t-1)}{(\frac{1}{2})} + y_{i+1/2} \frac{t(t-1)}{(-\frac{1}{4})} + y_{i+1} \frac{t(t - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})} \right) h dt = \\
 &= h \int_0^1 (y_i (2t^2 - 3t + 1) - 4y_{i+1/2} (t^2 - t) + y_{i+1} (2t^2 - t)) dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \left( y_i \left( 2 \frac{t^3}{3} - 3 \frac{t^2}{2} + t \right) - 4 y_{i+1/2} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) + y_{i+1} \left( 2 \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \right) = \\
&= h \left( y_i \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right) - y_{i+1/2} 4 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + y_{i+1} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \right) = h \left( y_i \frac{1}{6} + y_{i+1/2} \frac{4}{6} + y_{i+1} \frac{1}{6} \right) \\
&= \frac{h}{6} (y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1})
\end{aligned}$$

Тогда значения общей  $S$  площади можно вычислить как:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \frac{h}{6} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1})$$

$$S = \frac{h}{6} \cdot (y_0 + 4y_{1/2} + 2y_1 + 4y_{3/2} + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n)$$

# Метод Симпсона

**$x = a + h : h : b - h;$**

**$xs = a + h/2 : h : b;$**

**$S = h/6 * (f(a) + f(b) + 2 * \text{sum}(f(x)) + 4 * \text{sum}(f(xs)));$**

**$S = \text{quad} ( f, a, b);$**

# Сравнение методов

- Пример. Вычислить значение интеграла всеми рассмотренными методами при  $n=2$

$$S = \int_0^2 x^3 dx$$







