Вычисление определенных интегралов

- Актуальность задачи
- Постановка задачи
- Численные методы решения задачи
- Примеры для сравнения методов

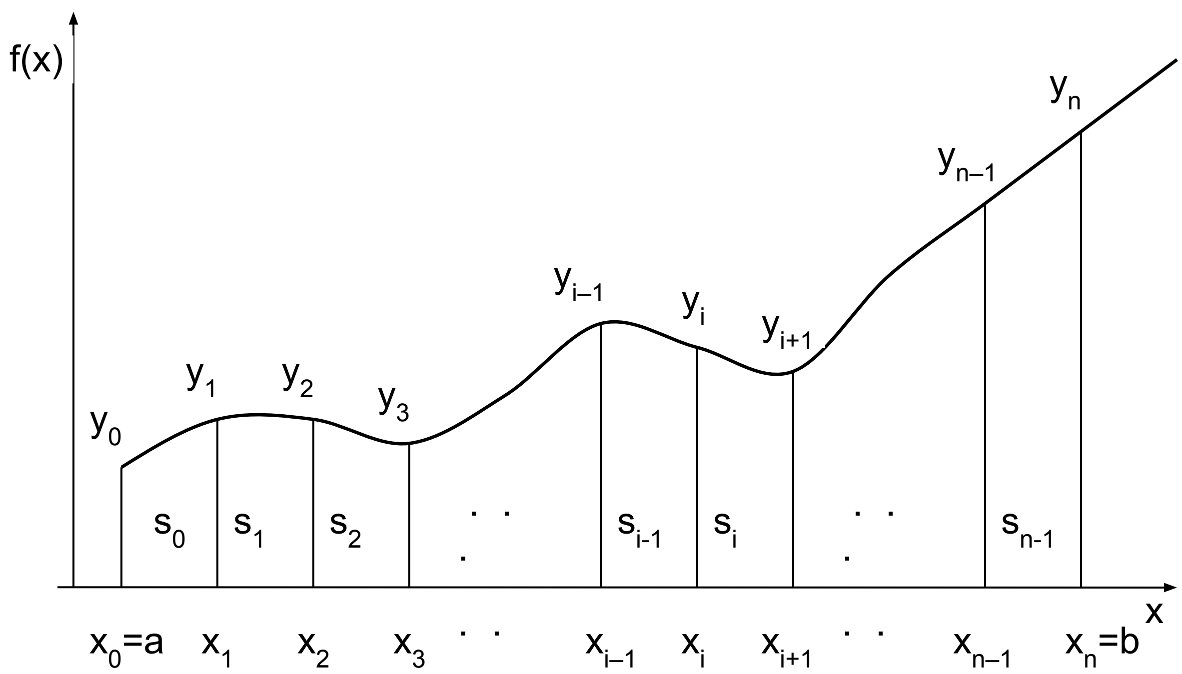
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть на отрезке [a; b] определена непрерывная функция f(x).

Требуется определить значение определенного интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, которое численно равно площади S фигуры, ограниченной графиком функции f(x) и осью x, на заданном отрезке [a; b]. Для приближенного вычисления площади, разобьем отре - зок [a; b] на **n** равных элементарных отрезков точками:

$x_0=a,\ x_1= a +h,\ x_2=x_1+h,\dots,x_i=x_{i-1}+h,\dots,\ x_n =b$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – шаг разбиения.

Значение функции f(x) в точках разбиения x_i обозначим через y_i.



Площадь S можно вычислить как сумму элементарных площадей определенных для соответствующих элементарных отрезков длиной h:

$$S = s_0+s_1+s_2+\ldots\ s_i+\ldots..+ s_{n-1}$$

Произвольную площадь **s_i** можно вычислить, как определенный интеграл на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ от более простой функции $\varphi_i(x)$, которой заменим реальную функцию f(x). В качестве **$\varphi(x)$,** используем интерполяционный многочлен степени **m.**

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx$$

Вид функции **$\varphi_i(x)$** будет определять название метода.

Интерполяционные многочлены, используемые для вычисления определенных интегралов.

- Если m =0, функция принимается постоянной на отрезке – методы прямоугольников
- Если m =1, полином первой степени – метод трапеций
- Если m =2, полином второй степени – метод Симпсона (метод парабол)

Методы п р я м о у г о л ь н и к о в

Значение функции $\varphi_i(x)$ на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ принимается константой

Метод п р я м о у г о л ь н и к о в *в п е р е д*.

Для функции $\varphi_i(x) = y_i$ (левой границе отрезка) значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i dx = y_i \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_i \cdot h$$

$$\boxed{S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i}$$

Метод п р я м о у г о л ь н и к о в *н а з а д*.

Для функции $\varphi_i(x) = y_{i+1}$ (правой границе) значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1} dx = y_{i+1} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1} \cdot h$$

$$\boxed{S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}}$$

Метод п р я м о у г о л ь н и к о в *в с р е д н е м*.

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2} h$$ и значение функции $$\varphi_i(x) = y_{i+1/2}$$

Тогда значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1/2} dx = y_{i+1/2} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1/2} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1/2} \cdot h$$

$$\boxed{S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1/2}}$$

Методы прямоугольников.

ВПЕРЕД НАЗАД ПО СРЕДНЕМУ

```
x=a:h:b-h;
S=h*sum (f (x));
```

```
x=a+ h: h: b;
S=h*sum (f (x));
```

```
x=a+h/2:h:b;
S=h*sum (f (x));
```

Метод т р а п е ц и й

Функцию $\varphi_i(x)$ будем определять как **линейную** (m=1) на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$, т.е. ее график должен проходить через две смежные точки (x_i,y_i) и (x_{i+1},y_{i+1}). Функцию $\varphi_i(x)$ можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по двум точкам $(\mathbf{x_i},\mathbf{y_i})$ и $(\mathbf{x_{i+1}},\mathbf{y_{i+1}})$:

$$\varphi_i(x) = Y(x) = y_i \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \cdot \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

тогда значения элементарной s_i площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_1}^{x_i+1} \varphi_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_i+1} y_i \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})}dx + \int_{x_i}^{x_i+1} y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}dx$$

Введем переменную $$t = \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x_i}}{\mathrm{h}}$$

Тогда $x = x_i + h \cdot t$ и $dx = h \cdot dt$. Значениям x, равным x_i, x_{i+1} соответствуют значения t, равные 0, 1. Значение $(x-x_i) = x_i – x_i + h \cdot t = h \cdot t$. Значение $(x-x_{i+1}) = x_i – x_{i+1} + h \cdot t = h(t-1)$. Элементарную площадь s_i с использование новой переменной определим как:

$$\int_0^1 y_i \frac{h(t-1)}{(-h)} hdt + \int_0^1 y_{i+1} \frac{ht}{(h)} hdt = h(\int_0^1 y_i (1-t)dt + \int_0^1 y_{i+1} tdt) = h(y_i (t\Big|_0^1 - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1) + y_{i+1} \frac{t^2}{2}\Big|_0^1) =$$

$$= h \cdot (y_i (1-\frac{1}{2}) + y_{i+1} \frac{1}{2}) = h \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + ... + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + ... + 2y_{n-1} + y_n) = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

$$\boxed{S = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)}$$

Метод трапеций

```
x=a :h :b -h;
S=h*sum((f(x)+f(x+h))/2);
```

```
x=a :h :b;
S=h* trapz ( f (x));
```

Метод С и м п с о н а (метод п а р а б о л)

Определим точку $\mathbf{x_{i+1/2} = x_i + 1/2 \cdot h}$ в середине элементарного отрезка $[x_i;x_{i+1}]$ и значение функции в этой точке $y_{i+1/2}$

Функцию $\varphi_i(x)$ будем определять как ***квадратичную*** на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$, т.е. её график должен проходить через три смежные точки $(x_i,y_i),(x_{i+1/2},y_{i+1/2})$ и (x_{i+1},y_{i+1}). Функцию $\varphi_i(x)$ можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по ***трём точкам*** $\boldsymbol{x_i}$***,*** $\boldsymbol{x_{i+1/2}}$ ***и*** $\boldsymbol{x_{i+1}}$:

$$\varphi_i(x) = Y(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1/2})(x_i - x_{i+1})} +$$

$$+ y_{i+1/2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1/2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+1/2})}$$

Тогда значения элементарной s_i площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(y_i \frac{(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1/2})(x_i - x_{i+1})} + \right.$$

$$\left. y_{i+1/2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1/2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+1/2})} \right) dx$$

Введем переменную $t = \frac{x - x_i}{h}$ тогда $x = x_i + h \cdot t$ и $dx = h \cdot dt$.

Значениям x, равным x_i, $x_{i+½}$, x_{i+1} соответствуют значения t, равные 0,½,1

Значение $(x-x_i) = x_i - x_i + h \cdot t = h \cdot t$. Значение $(x-x_{i+½}) = x_i - x_{i+½} + h \cdot t = h(t- ½)$

Значение $(x-x_{i+1}) = x_i - x_{i+1} + h \cdot t = h(t-1)$

Элементарную площадь s_i с использование новой переменной определим как:

$$s_i = \int_0^1 \left(y_i \frac{h(t-\frac{1}{2})h(t-1)}{(-\frac{h}{2})(-h)} + y_{i+1/2} \frac{hth(t-1)}{(\frac{h}{2})(-\frac{h}{2})} + y_{i+1} \frac{hth(t-\frac{1}{2})}{(h)(\frac{h}{2})} \right) hdt =$$

$$= \int_0^1 (y_i \frac{(t-\frac{1}{2})(t-1)}{(\frac{1}{2})}) + y_{i+1/2} \frac{t(t-1)}{(-\frac{1}{4})} + y_{i+1} \frac{t(t-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})})hdt =$$

$$= h\int_0^1 (y_i(2t^2 - 3t + 1) - 4y_{i+1/2}(t^2 - t) + y_{i+1}(2t^2 - t))dt =$$

$$= h\left(y_i\left(2\frac{t^3}{3}\Bigg| - 3\frac{t^2}{2}\Bigg| + t\Big|\right) - 4y_{i+1/2}\left(\frac{t^3}{3}\Bigg| - \frac{t^2}{2}\Bigg|\right) + y_{i+1}\left(2\frac{t^3}{3}\Bigg| - \frac{t^2}{2}\Bigg|\right)\right) =$$

$$= h\left(y_i\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1\right) - y_{i+1/2}\,4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + y_{i+1}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right) = h\left(y_i\,\frac{1}{6} + y_{i+1/2}\,\frac{4}{6} + y_{i+1}\,\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{h}{6}\left(y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1}\right)$$

Тогда значения общей S площади можно вычислить как:

$$\boxed{S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \frac{h}{6} \cdot \sum_{i=0}^{n-1}\left(y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1}\right)}$$

$$S = \frac{h}{6} \cdot \left(y_0 + 4y_{1/2} + 2y_1 + 4y_{3/2} + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n\right)$$

Метод Симпсона

```
x=a +h :h :b -h;
xs=a+h/2:h:b;
S=h/6*(f(a)+f(b)+2*sum(f(x))+4*sum(f(xs)));
```

```
S=quad ( f, a, b);
```

Сравнение методов

- Пример. Вычислить значение интеграла всеми рассмотренными методами при n=2

  S= $\int_0^2 x^3 dx$