

Решение нелинейных уравнений

- Решение одного нелинейного уравнения (методы, примеры, сравнение методов)
- Решение систем нелинейных уравнений (методы, примеры, сравнение методов)

Решение уравнения с одним неизвестным

Дано уравнение в виде $f(x)=0$, где $f(x)$ некоторая функция переменной x . Число x^* называется корнем или решением данного уравнения, если при подстановке $x=x^*$ в уравнение последнее обращается в тождество. $f(x^*)=0$. Число x^* называют также нулем функции $y=f(x)$.

В общем случае уравнение может иметь одно или несколько корней, как действительных, так и комплексных. **Нахождение действительных корней с заданной точностью можно разбить на два этапа: отделение корней**, т.е. определяются отрезки, которые содержат только один корень уравнения; а затем **уточнение**, т.е. вычисляются корни с требуемой точностью ε .

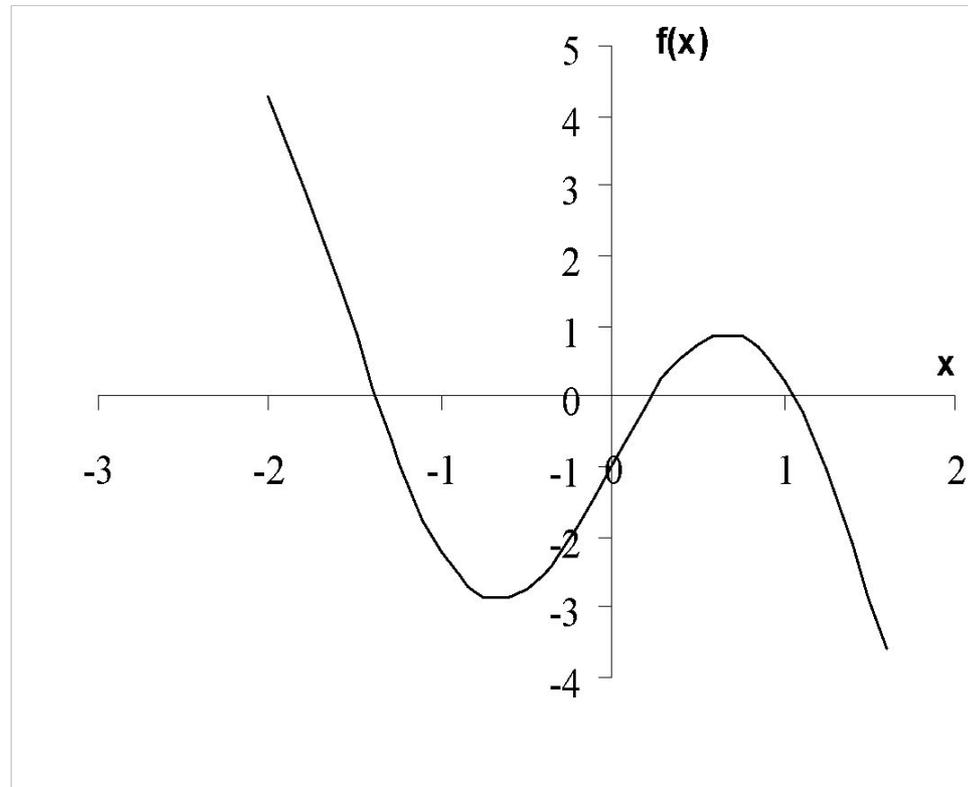
Отделение корней уравнения $f(x)=0$, в области определения, непрерывной функции $f(x)$, можно осуществлять несколькими способами: табулированием и графически

Табулирование – составление таблицы из равноотстоящих значений независимой переменной x и соответствующих значений функции и определение отрезков в которых смежные значения функции имеют различные знаки и следовательно содержат нулевые значения функции.

Графический - строим график функции $f(x)$ и определяем минимальные отрезки, включающие точки пересечения графика функции с осью x .

пример: $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x) - 1,5 \cdot x - 1 = 0$

x	f(x)
-2,00	4,270
<u>-1,60</u>	1,575
<u>-1,20</u>	-1,226
-0,80	-2,799
-0,40	-2,552
<u>0,00</u>	-1,000
<u>0,40</u>	0,552
<u>0,80</u>	0,799
<u>1,20</u>	-0,774
1,60	-3,575



Построение графика функции

```
f=inline('3*sin(2*x)-1.5*x-1')  
a=input ('a=');  
b=input ('b=');  
h=input ('h=');  
x=a :h :b;  
plot (x, f (x)); grid  
xlabel ('x'); ylabel ('f (x)')
```

Уточнение корня на отрезке $[a, b]$, в котором локализован только один корень, осуществляется **итерационными методами**, в которых последовательно, шаг за шагом, производится уточнение начального приближения корня. **Итерацией** называется совокупность вычислительных операций, приводящих к новому приближенному значению корня. Если каждое последующее значение $x^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) находится все ближе к точному значению, говорят, что метод сходится. В противном случае метод расходится. Для реализации итерационного процесса должны быть заданы начальное приближение $x^{(0)}$ и точность ε , с которой найти решение уравнения. Условие окончания имеет вид: $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \varepsilon$

Метод половинного деления (М П Д)

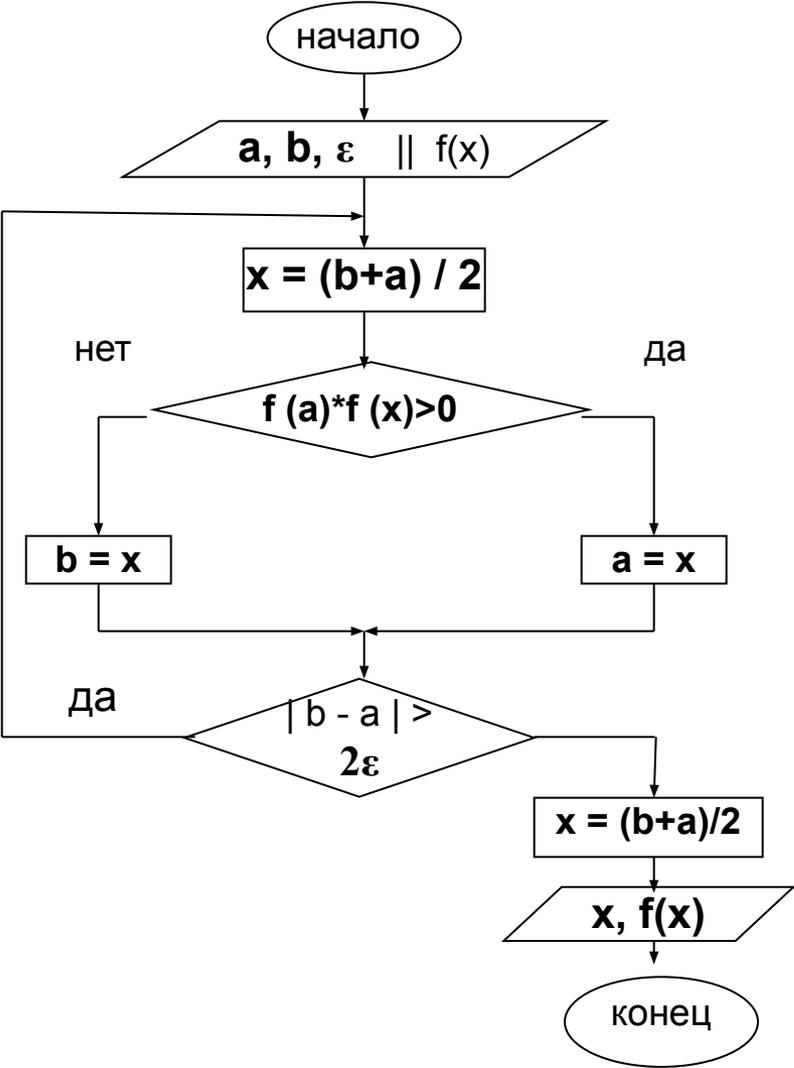
В этом методе на каждой итерации новое приближение определяется как:

$$x^{(k)} = (a^{(k-1)} + b^{(k-1)}) / 2, \quad \text{где } k - \text{номер итерации.}$$

Алгоритм

1. **Заданы** функция $f(x)$, отрезок $[a^{(0)}, b^{(0)}]$, точность ε . Пусть **$k=1$** .
2. В ы ч и с л я е м приближение $x^{(k)} = (a^{(k-1)} + b^{(k-1)}) / 2$
3. О п р е д е л я е м новый отрезок $[a^{(k)}, b^{(k)}]$. Проверяем, если $f(a^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k)}) > 0$, то $a^{(k)} = x^{(k)}$ и $b^{(k)} = b^{(k-1)}$ (остается прежним), иначе $b^{(k)} = x^{(k)}$ и $a^{(k)}$ -остается прежним.
4. П р о в е р я е м условие окончания, если $|b^{(k)} - a^{(k)}| \leq 2\varepsilon$, то за ответ принимаем значение равное $x = (a^{(k)} + b^{(k)}) / 2$ и переходим на пункт 5, иначе **$k=k+1$** и переходим на пункт 2.
5. В ы в о д **x и $f(x)$** .

Блок-схема



Достоинства и недостатки метода

Достоинства

- 1. Метод сходится всегда (абсолютная сходимость)*
- 2. Можно заранее определить количество итераций для получения решения*

$$n = \ln((b-a) / (\epsilon)) - 1$$

Недостатки

- 1. При требовании высокой точности решения необходимо большое количество итераций, т.е. **метод медленный** и рекомендуется использовать только для ориентировочного нахождения решения*

Решим предыдущий пример при $a = -1,6$ $b = -1,2$ и $\varepsilon = 0,01$ т.е. $2\varepsilon = 0,02$

a	b	x	f(a)	f(x)	b-a
-1,6	-1,2	-1,4	1,575	0,095	0,4
-1,4	-1,2	-1,3	0,095	-0,597	0,2
-1,4	-1,3	-1,35	0,095	-0,257	0,1
-1,4	-1,35	-1,375	0,095	-0,082	0,05
-1,4	-1,375	-1,3875	0,095	0,006	0,025
-1,3875	-1,375	-1,3812		-0,038	0,012

$x = -1,38 \pm 0,01$ $f(x) = -0,038$ (невязка)

Метод простых итераций (МПИ)

Преобразуем исходное уравнение $f(x)=0$ к эквивалентному виду $x=\phi(x)$. Тогда на каждой итерации новое приближение будем определять как:

$$x^{(1)} = \phi(x^{(0)}), x^{(2)} = \phi(x^{(1)}), x^{(3)} = \phi(x^{(2)}), \dots, \text{ т.е. } x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)}), k=1,2,3 \dots$$

Для оценки сходимости метода проверяем **достаточное условие сходимости**, которое записывается как:

$|\phi'(x)| < 1$, для всех значений x отрезка $[a;b]$, т.е. максимальная производная на заданном отрезке должна быть меньше единицы.

Общий подход для получения итерационной формулы $x=\phi(x)$

Умножим обе части уравнения $f(x)=0$ на множитель β , который будет обеспечивать выполнение достаточного условия сходимости **$\beta f(x)=0$**

и прибавим к обеим частям по x , тогда итерационная формула будет иметь вид:

$$x = x + \beta f(x) = \phi(x)$$

Определить множитель β можно из достаточного условия сходимости.

$$|\phi'(x)| < 1$$

$$\phi'(x) = 1 + \beta f'(x)$$

$$|1 + \beta f'(x)| < 1$$

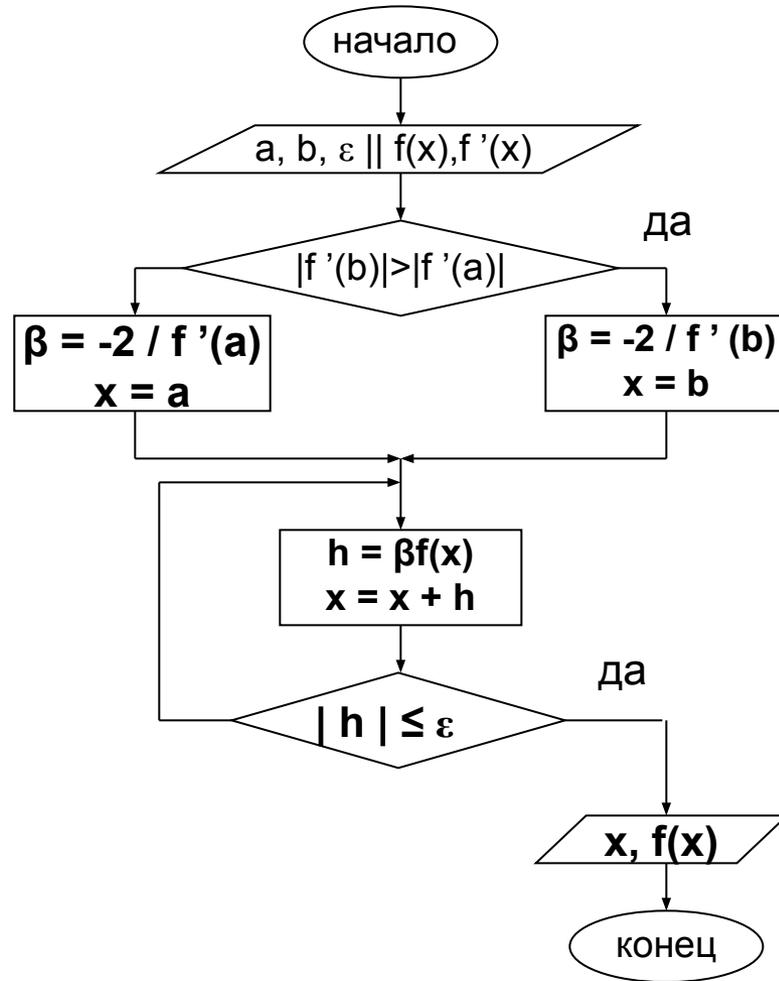
$$-1 < 1 + \beta f'(x) < 1$$

$$-2 < \beta f'(x) < 0.$$

Мы должны выбрать максимальную по модулю производную $|f'(x)|$ на заданном отрезке.

$$|f'(b)| > |f'(a)| \quad \beta = -2/f'(b), \text{ иначе } \beta = -2/f'(a)$$

Блок-схема



Пример: $f(x) = 3\sin(2x) - 1,5x - 1$ $f'(x) = 6\cos(2x) - 1,5$ $\varepsilon = 0,01$ $a = -1,6$ $b = -1,2$
 $f'(a) = -7,489$ $f'(b) = -5,924$ $\beta = 0,267 \approx 0,2$
 $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \beta * (3\sin(2x^{(k-1)}) - 1,5x^{(k-1)} - 1)$

k	$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	h	$x^{(k)}$
1	-1,6	1,5751	0,3150	-1,2850
2	-1,2850	-0,6956	-0,1391	-1,4241
3	-1,4241	0,2685	0,05370	-1,3704
4	-1,3704	-0,1149	-0,0230	-1,3934
5	-1,3934	0,0477	0,0095	-1,3838
	-1,3838	-0,0201		

Ответ: $x = -1,38 \pm 0,01$ $f(x) = -0,020$

Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть известно некоторое приближение $\mathbf{x}^{(k-1)}$ к решению \mathbf{x}^* уравнения $f(x)=0$.

Необходимо найти такое $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$, чтобы :

$$f(\mathbf{x}^{(k-1)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)})=0 \quad \text{где } \Delta\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k-1)} \text{ и } \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}$$

Разложим функцию в **ряд Тейлора** и ограничимся линейными членами.

$$f(\mathbf{x}^{(k-1)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k-1)}) + f'(\mathbf{x}^{(k-1)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = 0$$

откуда

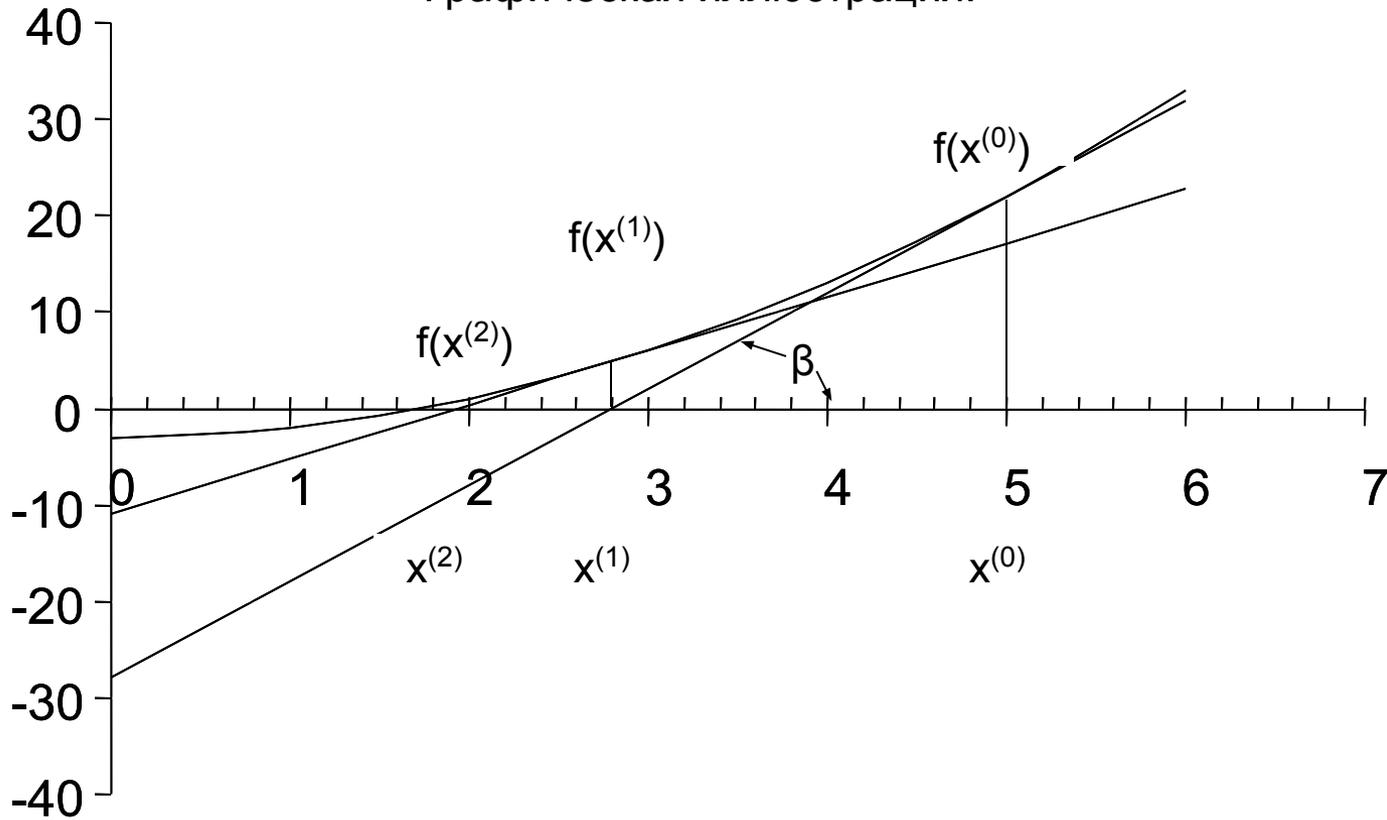
$$\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\frac{f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{f'(\mathbf{x}^{(k-1)})}$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - \frac{f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{f'(\mathbf{x}^{(k-1)})}$$

Полученное значение принимаем за новое приближение к решению. Тогда итерационную формулу запишем как:

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - \frac{f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{f'(\mathbf{x}^{(k-1)})}}$$

Графическая иллюстрация.



На каждой итерации, за новое приближение к корню $x^{(k)}$ принимается точка пересечения касательной к графику, построенной в точке $f(x^{(k-1)})$ с осью абсцисс x :

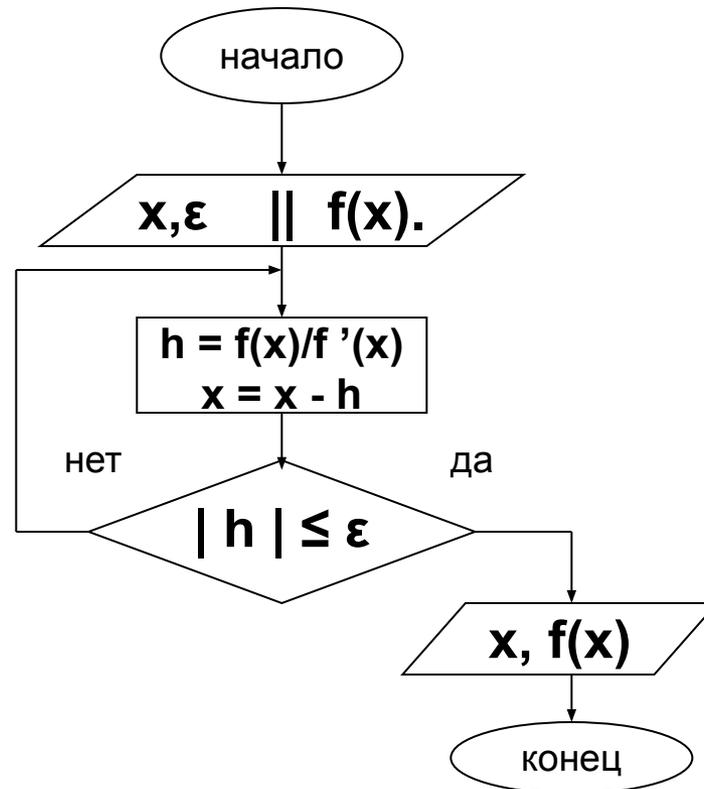
$$\operatorname{tg}(\beta) = f'(x^{(k-1)}) = \frac{f(x^{(k-1)})}{-x^{(k)} + x^{(k-1)}}$$

За начальное приближение к корню $x^{(0)}$ принимаем одну из границ отрезка $[a; b]$, содержащего один корень.

Алгоритм метода Ньютона

1. **Заданы** функция $f(x)$ отрезок $[a;b]$ и точность ϵ . За начальное приближение x принимаем одну из границ заданного отрезка $[a,b]$. Например $x=a$.
2. Вычисляем значение шага $h = f(x)/f'(x)$ и новое приближение, как $x = x - h$.
3. Проверяем условие окончания если $|h| \leq \epsilon$, то выводим последнее значение x и $f(x)$. Иначе перейдем на пункт 2

Блок-схема



Пример

$$a = -1,6 \quad b = -1,2 \quad \varepsilon = 0,01 \quad f(x) = 3\sin(2x) - 1,5x - 1 \quad f'(x) = 6\cos(2x) - 1,5 \quad x = a = -1,6$$

$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	$f'(x^{(k-1)})$	h	$x^{(k)}$
-1,6	1,5751	-7,4898	-0,2103	-1,3897
-1,3897	0,0216	-7,1107	-0,0030	-1,3867

Ответ: $x = 1,387 \pm 0,01 \quad f(x) = 0,00002$

Достоинства и недостатки метода

- Достоинства:

- Быстрая сходимость

Недостатки:

- Необходимость вычисления производных
- При неправильном выборе начального приближения возможен выход решения за границы интервала (расходимость метода). Метод будет сходиться, если в начальной точке выполняется соотношение

$$f(x) * f''(x) > 0$$

Решение нелинейного уравнения в Матлабе

```
f=inline('x^3-4.790*x^2-3.246*x+12.597');  
[x, y]=fzero (f, [a, b], eps)
```