Решение нелинейных уравнений

- Решение одного нелинейного уравнения (методы, примеры, сравнение методов)
- Решение систем нелинейных уравнений (методы, примеры, сравнение методов)

Решение уравнения с одним неизвестным

Дано уравнение в виде **$f(x)=0$,** где $f(x)$ некоторая функция переменной x. Число **x^*** называется корнем или решением данного уравнения, если при подстановке $x= x^*$ в уравнение последнее обращается в тождество. **$f(x^*)=0$**. Число x^* называют также нулем функции $y=f(x)$.

В общем случае уравнение может иметь одно или несколько корней, как действительных, так и комплексных. **Нахождение действительных корней с заданной точностью можно разбить на два этапа: отделение корней**, т.е. определяются отрезки, которые содержат только один корень уравнения; а затем **уточнение**, т.е. вычисляются корни с требуемой точностью ε.

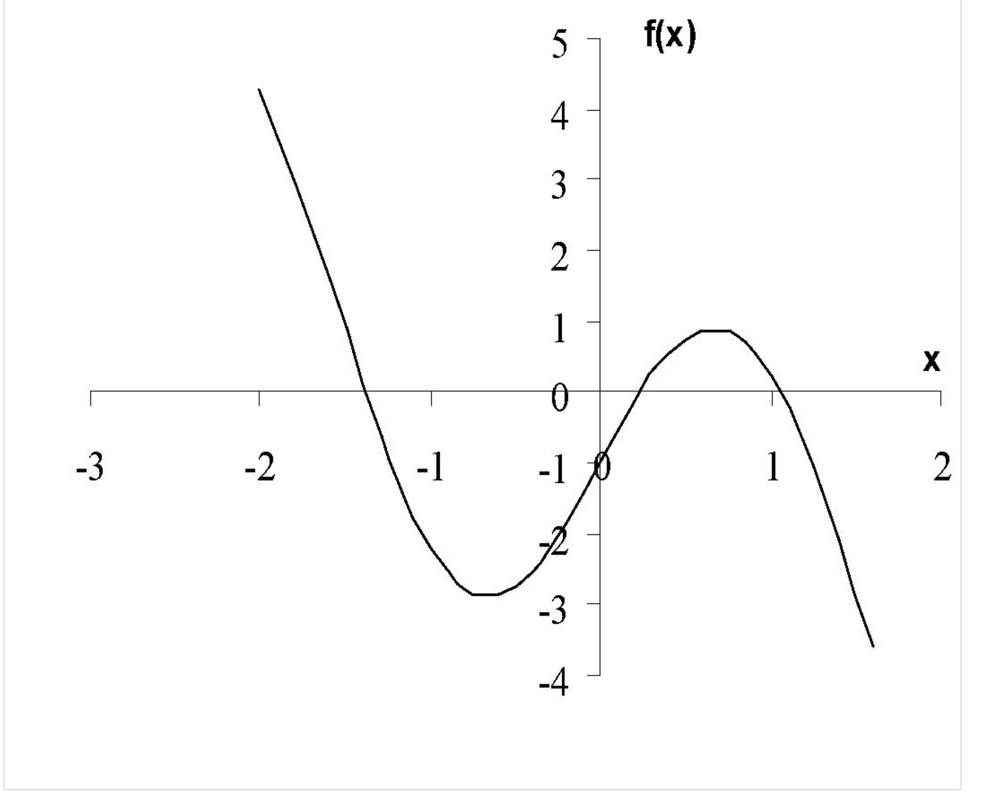
Отделение корней уравнения $f(x)=0$, в области определения, непрерывной функции $f(x)$, можно осуществлять несколькими способами: табулированием и графически

Табулирование – составление таблицы из равноотстоящих значений независимой переменной x и соответствующих значений функции и определение отрезков в которых смежные значения функции имеют различные знаки и следовательно содержат нулевые значения функции.

Графический - строим график функции $f(x)$ и определяем минимальные отрезки, включающие точки пересечения графика функции с осью x.

пример: $f(x) = 3*\sin(2*x)-1,5*x-1=0$

x	f (x)
-2,00	4,270
-1,60	1,575
-1,20	-1,226
-0,80	-2,799
-0,40	-2,552
0,00	-1,000
0,40	0,552
0,80	0,799
1,20	-0,774
1,60	-3,575



Построение графика функции

```
f=inline('3*sin(2*x)-1.5*x-1')
a=input ('a=');
b=input ('b=');
h=input ('h=');
x=a :h :b;
plot (x, f (x)); grid
xlabel ('x'); ylabel ('f (x)')
```

Уточнение корня на отрезке [a,b], в котором локализован только один корень, осуществляется **итерационными методами**, в которых последовательно, шаг за шагом, производится уточнение начального приближения корня. **Итерацией** называется совокупность вычислительных операций, приводящих к новому приближенному значению корня. Если каждое последующее значение $x^{(k)}$ (k=1,2,3,…) находится все ближе к точному значению, говорят, что метод сходится. В противном случае метод расходится. Для реализации итерационного процесса должны быть заданы начальное приближение $x^{(0)}$ и точность ε, с которой найти решение уравнения.

Условие окончание имеет вид: $\mathbf{|x^{(k)}-x^{(k-1)}| \le \varepsilon}$

Метод половинного деления (М П Д)

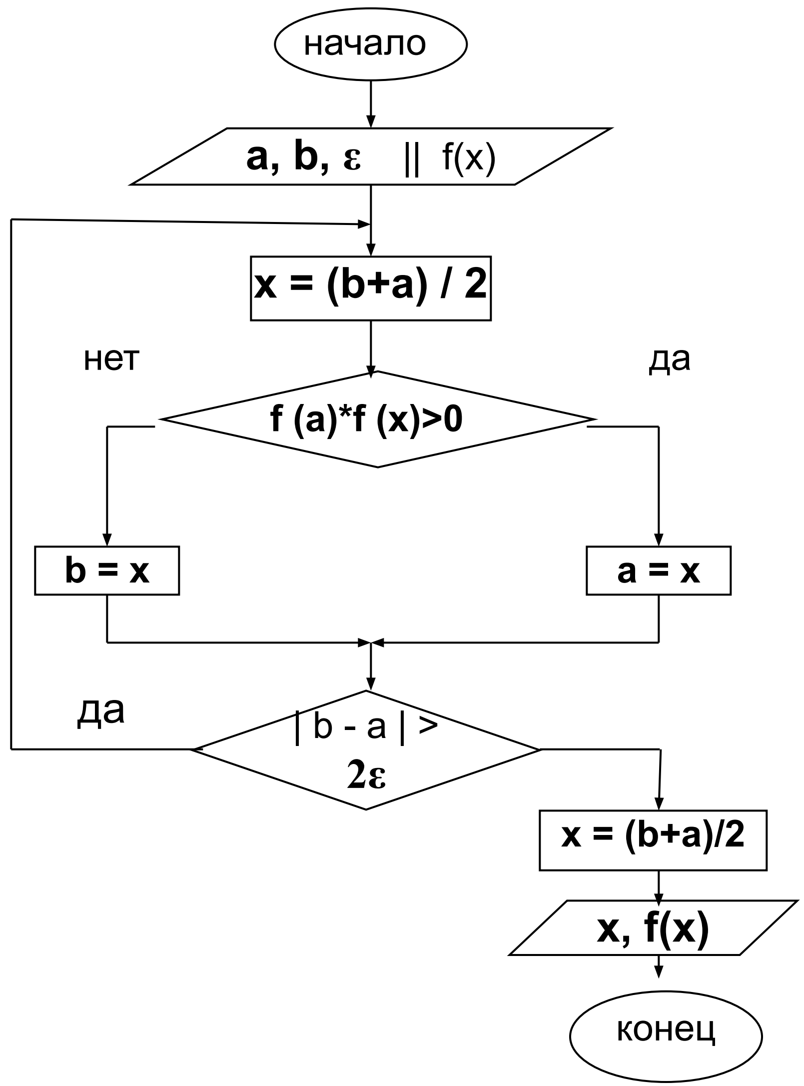
В этом методе на каждой итерации новое приближение определяется как:

$\mathbf{x^{(k)}=(a^{(k-1)}+b^{(k-1)})/2}$, где к – **н о м е р и те р а ц и и**.

Алгоритм

1. **Заданы** функция f(x), отрезок $[a^{(0)},b^{(0)}]$, точность ε. Пусть **k=1**.
2. В ы ч и с л я е м приближение $\mathbf{x^{(k)}=(a^{(k-1)}+b^{(k-1)}) / 2}$
3. О п р е д е л я е м новый отрезок $\mathbf{[a^{(k)},b^{(k)}]}$**.** Проверяем, если $f(a^{(k-1)})*f(x^{(k)})>0$, то $a^{(k)}=x^{(k)}$ и $\mathbf{b^{(k)}=b^{(k-1)}}$ (остается прежним), иначе $\mathbf{b^{(k)}=x^{(k)}}$ и $\mathbf{a_{(k)}}$ -остается прежним.
4. П р о в е р я е м условие окончания, если $\mathbf{|b^{(k)}-a^{(k)}| \le \cdot 2\varepsilon}$, то за ответ принимаем значение равное $x=(a^{(k)}+b^{(k)})/2$ и переходим на пункт 5, иначе **k=k+1** и переходим на пункт 2.
5. В ы в о д **x и f(x).**

Блок-схема



Достоинства и недостатки метода

Достоинства

1.Метод сходится всегда (абсолютная сходимость)

2.Можно заранее определить количество итераций для получения решения

$$\mathbf{n = ln\ ((b\text{-}a)\ /(eps))\text{-}1}$$

Недостатки

1. При требовании высокой точности решения необходимо большое количество итераций, т.е. **метод медленный** *и рекомендуется использовать только для ориентировочного нахождения решения*

Решим предыдущий пример при a= -1,6 b= -1,2 и ε= 0,01 т.е. 2ε = 0,02

a	b	x	f (a)	f (x)	|b-a|
-1,6	-1,2	-1,4	1,575	0,095	0,4
-1,4	-1,2	-1,3	0,095	-0,597	0,2
-1,4	-1,3	-1,35	0,095	-0,257	0,1
-1,4	-1,35	-1,375	0,095	-0,082	0,05
-1,4	-1,375	-1,3875	0,095	0,006	0,025
-1,3875	-1,375	-1,3812		-0,038	0,012

x= –1,38±0,01 f (x) = –0,038 (невязка)

Метод простых итераций (МПИ)

Преобразуем исходное уравнение **$f(x)=0$** к эквивалентному виду **$x=\phi(x)$**. Тогда на каждой итерации новое приближение будем определять как:

$x^{(1)} = \phi\,(x^{(0)})$, $x^{(2)} = \phi\,(x^{(1)})$, $x^{(3)} = \phi\,(x^{(2)})$,….., т.е. $x^{(k)}=\phi(x^{(k-1)})$, $k=1,2,3$… . .

Для оценки сходимости метода проверяем **достаточное условие сходимости**, которое записывается как:

$|\phi\,'(x)| < 1$, для всех значений x отрезка$[a;b]$, т.е. максимальная производная на заданном отрезке должна быть меньше единицы.

Общий подход для получения итерационной формулы $x=\phi(x)$

Умножим обе части уравнения **$f(x)=0$** на множитель **β** , который будет обеспечивать выполнение достаточного условия сходимости **$\beta\, f(x)=0$**

и прибавим к обеим частям по x, тогда итерационная формула будет иметь вид:

$$x = x + \beta f\,(x) = \phi(x)$$

Определить множитель β можно из достаточного условия сходимости.

$$|\phi'(x)| < 1$$

$$\phi'(x) = 1 + \beta * f\,'(x)$$

$$|1 + \beta * f\,'(x)| < 1$$

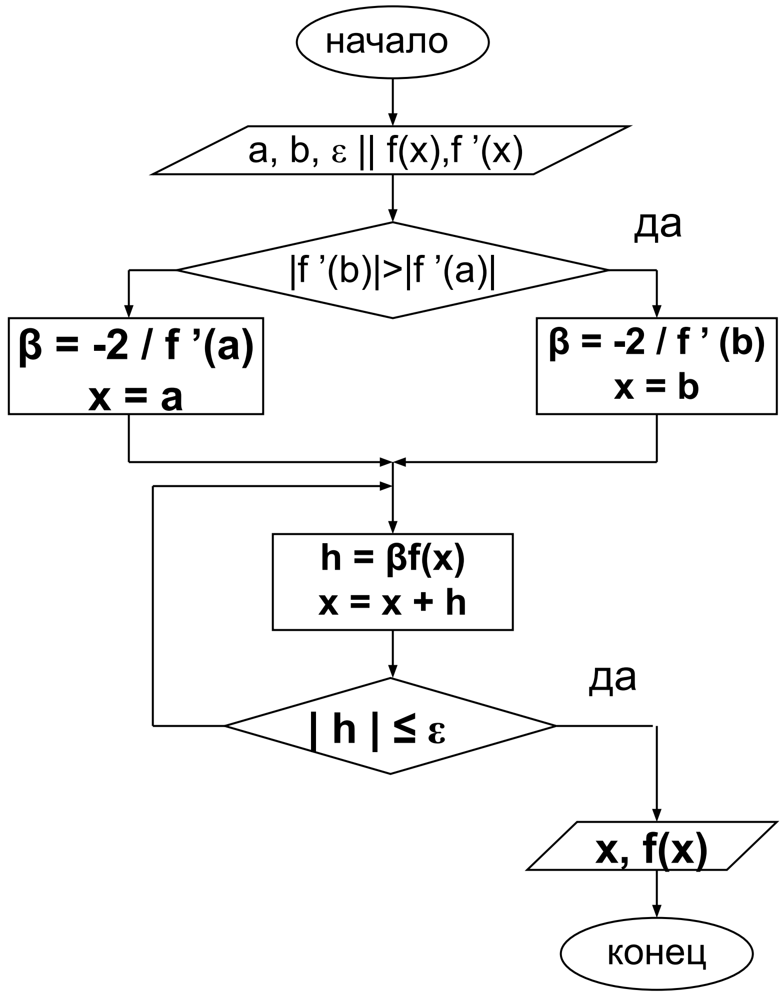
$$-1 < 1 + \beta * f\,'(x) < 1$$

$$-2 < \beta * f\,'(x) < 0.$$

Мы должны выбрать максимальную по модулю производную $|f'(x)|$ на заданном отрезке.

$|f\,'(b)|>|f\,'(a)|$ $\quad\beta = -2/f\,'(b)$,иначе **$\beta = -2/\,f\,'(a)$**

Блок-схема


начало
a, b, ε || f(x),f '(x)
да
|f '(b)|>|f '(a)|
β = -2 / f '(a)
x = a
β = -2 / f ' (b)
x = b
h = βf(x)
x = x + h
да
| h | ≤ ε
x, f(x)
конец

Пример: $f(x) = 3\sin(2x)-1,5x-1$ $f'(x)=6\cos(2x)-1,5$ $\varepsilon=0,01$ $a = -1,6$ $b = -1,2$

$f'(a) = -7,489$ $f'(b) = -5,924$ $\beta = 0,267 \approx 0,2$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \beta^* (3\sin(2x^{(k-1)})-1,5x^{(k-1)}-1)$$

k	$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	h	$x^{(k)}$
1	-1,6	1,5751	0,3150	-1,2850
2	-1,2850	-0,6956	-0,1391	-1,4241
3	-1,4241	0,2685	0,05370	-1,3704
4	-1,3704	-0,1149	-0,0230	-1,3934
5	-1,3934	0,0477	0,0095	-1,3838
	-1,3838	-0,0201		

Ответ: $x = -1,38\pm0,01$ $f(x) = -0,020$

Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть известно некоторое приближение $\mathbf{x^{(k-1)}}$ к решению $\mathbf{x^*}$ уравнения f(x)=0.

Необходимо найти такое $\Delta\mathbf{x(k)}$, чтобы :

$f(x^{(k-1)}+\Delta x^{(k)})=0$ где $\Delta x^{(k)}= x^* - x^{(k-1)}$ и $\mathbf{x^* = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)}}$

Разложим функцию в **ряд Тейлора** и ограничимся линейными членами.

$$f(x^{(k-1)}+\Delta x^{(k)}) = f(x^{(k-1)})+ f'(x^{(k-1)})\Delta x^{(k)} = 0$$

откуда

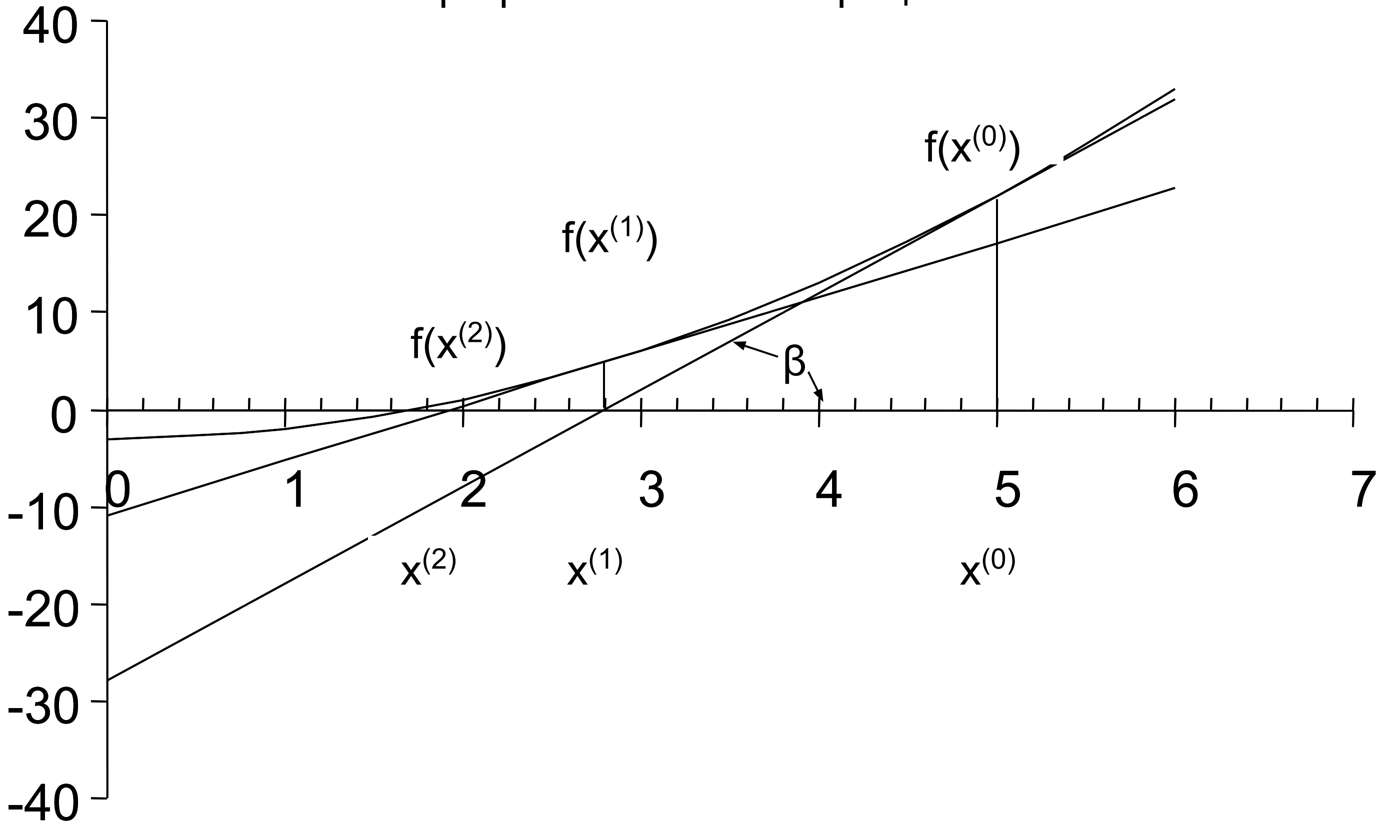
$$\Delta x^{(k)} = -\frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{k-1)})}$$

$$x^* = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{k-1)})}$$

Полученное значение принимаем за новое приближение к решению. Тогда итерационную формулу запишем как:

$$\boxed{x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{k-1)})}}$$

Графическая иллюстрация.



На каждой итерации, за новое приближение к корню $x^{(k)}$ принимается точка пересечения касательной к графику, построенной в точке $f(x^{(k-1)})$ с осью абсцисс x:

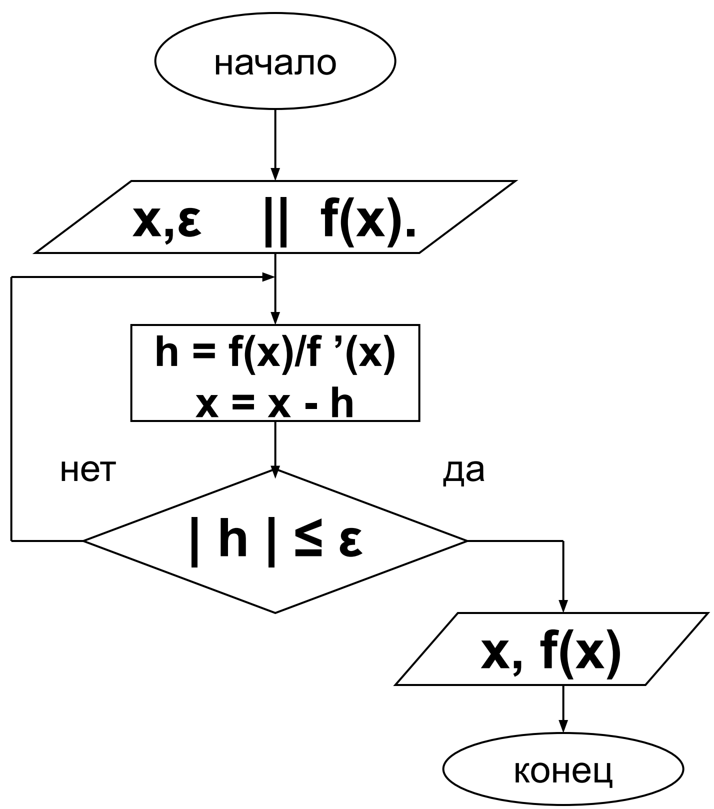
$$tg(\beta) = f'(x^{(k-1)}) = \frac{f(x^{(k-1)})}{-x^{(k)} + x^{(k-1)}}$$

За начальное приближение к корню $x^{(0)}$ принимаем одну из границ отрезка [a; b], содержащего один корень.

Алгоритм метода Ньютона

1. **Заданы** функция **f(x)** отрезок **[a;b]** и точность **ε**. За начальное приближение x принимаем одну из границ заданного отрезка [a,b]. Например **x=a**.
2. Вычисляем значение шага **h= f(x)/f ′(x)** и новое приближение, как **x = x-h**.
3. Проверяем условие окончания если **| h | ≤ ε**, то выводим последнее значение x и f(x). Иначе перейдем на пункт 2

Блок-схема



Пример

$a = -1{,}6$ $b = -1{,}2$ $\varepsilon = 0{,}01$ $f(x)=3\sin(2x) - 1{,}5x - 1$ $f'(x)=6\cos(2x) - 1{,}5$ $x=a= -1.6$

$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	$f'(x^{(k-1)})$	h	$X^{(k)}$
-1,6	1,5751	-7,4898	-0,2103	-1,3897
-1,3897	0,0216	-7,1107	-0,0030	-1,3867

Ответ: **$x = 1{,}387 \pm 0{,}01$ $f(x)=0{,}00002$**

Достоинства и недостатки метода

- Достоинства:
  – Быстрая сходимость

Недостатки:

- Необходимость вычисления производных
- При неправильном выборе начального приближения возможен выход решения за границы интервала (расходимость метода). Метод будет сходиться, если в начальной точке выполняется соотношение

$$f(x) * f''(x) > 0$$

Решение нелинейного уравнения в Матлабе

```
f=inline('x^3-4.790*x^2-3.246*x+12.597');
[x, y]=fzero (f, [a, b], eps)
```